

Глава 7. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_1, x_2 \in X |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Лемма 7.1. Если функция равномерно непрерывна на множестве X , то она непрерывна на этом множестве, то есть непрерывна в каждой его точке.

► Достаточно в приведенном определении положить $x_1 := x$, $x_2 := x_0$, и определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 удовлетворено, то есть

$$0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in X |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Замечание. Для доказательства того, что функция не является равномерно непрерывной, удобно использовать лемму в следующей формулировке: если функция разрывна на множестве X , то она не является равномерно непрерывной на этом множестве.

Отличие равномерной от «обычной» непрерывности на некотором множестве (то есть непрерывности в каждой точке этого множества) состоит в том, что в определении равномерной непрерывности для произвольного $\varepsilon > 0$ определяют $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε , общее для всех $x \in X$, тогда как в определении «обычной» непрерывности для произвольного $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in X$ определяют $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, зависящее как от ε , так и от x_0 . Таким образом, в случае «обычной» непрерывности для некоторых значений ε может не существовать значения $\delta(\varepsilon) > 0$, общего для всех x и удовлетворяющего определению, то есть δ изменяется в зависимости от x при фиксированном значении ε и может принимать сколь угодно малые значения.

Геометрическая иллюстрация

Если $f(x)$ равномерно непрерывна на X , то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что прямоугольник со сторонами $\delta(\varepsilon)$ и ε , параллельными осям Ox и Oy , можно так переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рис. 15).

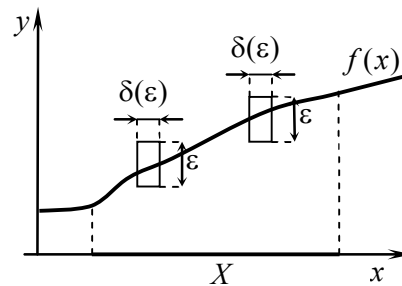


Рис. 15

Лемма 7.2. Функция, равномерно непрерывная на множестве X , равномерно непрерывна на любом его подмножестве.

Лемма 7.3. Если функция не является равномерно непрерывной на множестве A , то она не является равномерно непрерывной на любом множестве, содержащем A .

Теорема 7.1 (необходимое условие равномерной непрерывности). Если функция не ограничена в любой окрестности фиксированной точки x_0 , то она не является равномерно непрерывной на любом множестве, для которого эта точка – предельная.

► Пусть f не ограничена в окрестности x_0 , тогда при $\varepsilon = 1$ $\forall \delta > 0$ в $\delta/2$ окрестности точки x_0 найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, хотя $|x_1 - x_2| < \delta$. Действительно, если выбрать x_1 произвольной, то, в силу неограниченности функции f , найдется такая точка x_2 , что $f(x_2) > 1 + f(x_1)$. ◀

Замечание 1. Если множество неограничено, то равномерно непрерывная на этом множестве функция может быть как ограничена, так и не ограничена на нем.

► Функция $f(x) = ax + b$ является неограниченной равномерно непрерывной на всей числовой оси, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{|a|}, & a \neq 0 \\ \varepsilon, & a = 0 \end{cases} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |ax_1 - ax_2| = \begin{cases} |a||x_1 - x_2| < |a|\delta = \varepsilon, & a \neq 0; \\ 0 < \varepsilon, & a = 0. \end{cases}$$

Функция $g(x) = \sin x$ является ограниченной равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание 2. Ограниченность непрерывной функции не является достаточным условием равномерной непрерывности.

Пример 7.1. Функция $f(x) = \sin(1/x)$ является ограниченной на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной.

► В любой окрестности точки 0 функция f принимает как значение -1 , так и значение 1 , поэтому при $\varepsilon < 2$ для нее уже не выполнено условие равномерной непрерывности.

Действительно, для $\varepsilon = 1$ при любом выборе δ можно выбрать k столь большим, что для $x_1 = \frac{2}{(4k+3)\pi}$ и $x_2 = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ неравенство

$$|x_1 - x_2| = \frac{8}{\pi(4k+3)(4k+1)} < \frac{1}{2\pi k^2} < \delta$$

будет выполнено, но $|f(x_1) - f(x_2)| = |-1 - 1| = 2 > 1 = \varepsilon$. ◀

Теорема 7.2. Сумма и разность конечного числа равномерно непрерывных на (a, b) функций равномерно непрерывны на (a, b) .

► Для доказательства достаточно рассмотреть случай двух равномерно непрерывных на (a, b) функций $f(x)$ и $g(x)$.

Из определения равномерной непрерывности сразу следует, что если $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b) , то и функция $-f(x)$ будет равномерно непрерывна на (a, b) . Поэтому рассмотрим только сумму. Согласно условию,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x_1, x_2 \in (a, b) |x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x_1, x_2 \in (a, b) |x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.2)$$

Если $|x_1 - x_2| < \delta$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то будут выполняться оба неравенства (7.1) и (7.2). Тогда равномерная непрерывность суммы следует из неравенства

$$\begin{aligned} & |f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| \leq \\ & \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

справедливого $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$. ◀

Теорема 7.3. Произведение конечного числа равномерно непрерывных на (a, b) функций равномерно непрерывно на (a, b) .

► Достаточно рассмотреть случай двух равномерно непрерывных на (a, b) функций $f(x)$ и $g(x)$. Так как f и g по условию равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то они ограничены на этом множестве (см. теорему 7.1). Пусть

$$L = \sup_{x \in (a, b)} |f(x)|, \quad M = \sup_{x \in (a, b)} |g(x)|.$$

Тогда, согласно определению равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad |x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (7.3)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad |x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (7.4)$$

Если $|x_1 - x_2| < \delta$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то будут выполняться оба эти неравенства. Тогда равномерная непрерывность произведения следует из неравенства

$$\begin{aligned} & |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = \\ & = |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \leq \\ & \leq |f(x_1)| |g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)| |f(x_1) - f(x_2)| < L \frac{\varepsilon}{2L} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

справедливого $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$. ◀

Замечание. В теоремах 7.2, 7.3 вместо интервала (a, b) можно взять отрезок или полуинтервал. Теоремы остаются справедливыми для луча или всей числовой прямой, но при этом для теоремы 7.3 необходимо потребовать ограниченности функций.

Теорема 7.4. Если функция f равномерно непрерывна на множествах $A = (a, c]$, $B = [c, b)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, то она равномерно непрерывна на множестве $A \cup B = (a, b)$.

► Если $\varepsilon > 0$ фиксировано, то

$$\exists \delta_A > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta_A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists \delta_B > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in B \quad |x_1 - x_2| < \delta_B \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, $x_1, x_2 \in A \cup B$ и при этом $|x_1 - x_2| < \delta$, тогда возможны три случая:

1) $x_1, x_2 \in A$, тогда $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ввиду равномерной непрерывности на множестве A ;

2) $x_1, x_2 \in B$, тогда $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ввиду равномерной непрерывности на множестве B ;

3) $x_1 \in A, x_2 \in B$ или $x_2 \in B, x_1 \in A$, тогда $|x_1 - c| < \delta, |x_2 - c| < \delta$, а значит

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f(c) + f(c) - f(x_2)| \leq \\ &\leq |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ввиду равномерной непрерывности на каждом из рассматриваемых множеств. ◀

Замечание 1. Теорема остается верна в случае замкнутости или неограниченности множеств A и B . В общем случае теорема справедлива, если

$$A \in \{[a, c], (a, c], (-\infty, c]\}, B \in \{[c, b], [c, b), [c, +\infty)\}.$$

Замечание 2. Теорема не верна в случае, если

$$A \in \{(a, c), [a, c)\} \text{ или } B \in \{(c, b), (c, b]\}.$$

► Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2); \\ x + 4, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Она является равномерно непрерывной на множествах $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, но не является равномерно непрерывной на множестве $A \cup B = [1, 3] \setminus \{2\}$, так как

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon = 2 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1 = 2 - \min\left\{0.1; \frac{\delta}{2}\right\} \quad \exists x_2 = 2 + \min\left\{0.1; \frac{\delta}{2}\right\} \\ |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \geq 4 > 2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Если положить $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, то $f(x)$ будет равномерно непрерывной на каждом из рассматриваемых множеств, но не будет равномерно непрерывной на множестве $A \cup B = [1, 3]$. Отсутствие равномерной непрерывности в этом случае можно доказать несколькими способами.

Способ 1. Формальное доказательство отсутствия равномерной непрерывности на множестве $[1, 3] \setminus \{2\}$, приведенное выше, подходит и для множества $[1, 3]$.

Способ 2. Так как $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[1, 3] \setminus \{2\}$, то, в силу леммы 7.3, не является равномерно непрерывной на $[1, 3]$.

Способ 3. Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[1, 3]$, так как она разрывна в точке $x = 2$. ◀

Теорема 7.5. Если функция f равномерно непрерывна на множествах

$$A = (a, c_1], B = [c_2, b), c_1 < c_2, a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

то она равномерно непрерывна на множестве

$$A \cup B = (a, b) \setminus (c_1, c_2).$$

► Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.4 с той лишь разницей, что $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B, c_2 - c_1\}$. Такой выбор δ исключает случай $x_1 \in A, x_2 \in B$ или $x_2 \in B, x_1 \in A$. ◀

Замечание. Теорема остается верна в случае замкнутости или неограниченности множеств A и B . В общем случае теорема справедлива, если

$$A \in \{[a, c_1], [a, c_1), (a, c_1), (a, c_1], (-\infty, c_1), (-\infty, c_1]\},$$

$$B \in \{[c_2, b], [c_2, b), (c_2, b), (c_2, b], (c_2, +\infty), [c_2, +\infty)\}.$$

► Доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 7.5. ◀

Теорема 7.6. Если функция f равномерно непрерывна на множествах A и B таких, что $\bar{A} \cap \bar{B} \subset A$, $\bar{A} \cap \bar{B} \subset B$, то она равномерно непрерывна на множестве $A \cup B$.

► Теорема является следствием теорем 7.4, 7.5. ◀

Теорема 7.7 (теорема Гейне-Кантора о равномерной непрерывности). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

► Докажем от противного. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, но не является равномерно непрерывной на нем. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \alpha, \beta \in [a, b] \quad |\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow |f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$. Каждому n соответствует пара точек α_n, β_n такая, что

$$|\alpha_n - \beta_n| < \delta_n \Rightarrow |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon$$

Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – ограниченные. По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{\alpha_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = x_0$, причем $x_0 \in [a, b]$, так как отрезок – замкнутое множество. Учитывая, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}| < \frac{1}{n_k},$$

получим, что последовательность $\gamma_{n_k} = \alpha_{n_k} - \beta_{n_k}$ – бесконечно мала; следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = x_0$. Тогда, в силу непрерывности функции f ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_{n_k}) = f(x_0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\beta_{n_k}) = f(x_0),$$

а значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| = 0$. Это противоречит тому, что

$$|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| \geq \varepsilon,$$

где ε – некоторое положительное *фиксированное* число. ◀

Следствие 1. Непрерывная на интервале (a, b) функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на нем, если существуют *конечные* односторонние пределы в граничных точках интервала.

► Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = l_2$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} l_1, & x = a; \\ f(x), & x \in (a, b); \\ l_2, & x = b. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что $g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а значит, равномерно непрерывна на $[a, b]$ в силу теоремы Кантора. Тогда по лемме 7.2 функция $g(x)$ равномерно непрерывна и на интервале (a, b) . Но функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на этом интервале. ◀

Замечание. Если существует функция g , совпадающая с f на (a, b) и непрерывная на $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на (a, b) .

Следствие 2. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R},$$

то $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

► По теореме Кантора f равномерно непрерывна на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x > b \quad |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому на луче $(b, +\infty)$ функция будет равномерно непрерывной, так как при фиксированном $\varepsilon > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (b, +\infty)$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - l_1| + |f(x_2) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Аналогично $\forall \varepsilon > 0$ существует луч $(-\infty, a)$, на котором функция f равномерно непрерывна. Следовательно, f равномерно непрерывна на всей числовой прямой. ◀

Следствие 3. Если периодическая функция f непрерывна на всей числовой оси, то она равномерно непрерывна на всей числовой оси.

Теорема 7.8. Если функция f имеет ограниченную производную на связном множестве X , то она равномерно непрерывна на этом множестве.

► Пусть $|f'| < L$, где L – некоторое положительное число. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$, выбрав $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, по теореме Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$ получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| = f'(\xi)|x_1 - x_2| < L|x_1 - x_2|, \quad \xi \in (x_1, x_2),$$

а значит, $\forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. ◀

Замечание. X – произвольное связное множество: замкнутое или незамкнутое, ограниченное или неограниченное.

Пример 7.2. Исследовать функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $[0, +\infty)$.

► Рассмотрим сначала отрезок $[0, 1]$. На этом отрезке функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна, а значит, по теореме Кантора, равномерно непрерывна. На луче $[1, +\infty)$ производная $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ограничена числом $\frac{1}{2}$, следовательно, по теореме 7.8, $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на этом луче. Тогда функция $f(x) = \sqrt{x}$, согласно теореме 7.4, равномерно непрерывна на их объединении, то есть на множестве $[0, +\infty)$. ◀