

Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1.1. ВАЖНЕЙШИЕ КЛАССЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В элементарной математике изучаются действительные (вещественные) числа. Сначала в процессе счета возникли натуральные числа $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, для которых были введены действия сложения и умножения. Позже, для того чтобы для любой пары чисел были возможны также операции вычитания и деления (кроме операции деления на нуль, у которой нет разумного смысла), пришлось расширить класс рассматриваемых чисел. Были введены число 0 и целые отрицательные числа $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$, а затем и рациональные числа вида p/q , где p, q – целые, $q \neq 0$.

Потребность измерения величин и проведение таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифма, решение алгебраических уравнений, привела к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появились иррациональные и, наконец, комплексные числа.

Все рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел, рассмотрению различных классов которых посвящена данная глава; при этом будут приведены только те теоретические положения, которые понадобятся в дальнейшем при изучении курса.

Натуральные числа $\mathbb{N}$

Множество X называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также и число $x+1$. Пересечение индуктивных множеств является индуктивным множеством.

Множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ называют наименьшее индуктивное множество, содержащее число 1. Натуральное число $p \neq 1$ называется *простым*, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и p .

Теорема 1.1 (основная теорема арифметики). Каждое натуральное число допускает и притом единственное (с точностью до порядка сомножителей) представление в виде произведения $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – простые числа.

Свойства натуральных чисел

1. Сумма и произведение натуральных чисел – натуральные числа.
2. Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то $n - 1 \in \mathbb{N}$.
3. Если $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < m$, то $n + 1 \leq m$.
4. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.
5. Натуральное число $n + 1$ непосредственно следует за натуральным числом n (или, что то же самое, число $n - 1$ предшествует числу n), то есть нет натуральных чисел x , удовлетворяющих условию $n < x < n + 1$.

Последнее свойство называется **аксиомой индукции**. Оно выражает тот факт, что путем последовательного прибавления можно получить любое натуральное число. Это свойство лежит в основе широко распространенного метода доказательства – **метода математической индукции**:

Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in \mathbb{N}$ утверждение. Если доказано, что выполняется $A(1)$ и из справедливости $A(n)$ вытекает справедливость $A(n + 1)$, то $A(n)$ справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Индукция может начинаться не с 1, а с любого числа $n_0 \in \mathbb{N}$. В этом случае $A(n)$ верно $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Пример 1.1. Докажем методом математической индукции **неравенство Бернулли** $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ при $\alpha > -1$.

- 1. При $n = 1$ утверждение справедливо.
- 2. Если оно справедливо для некоторого n , то и для $n + 1$ тоже:

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)(1 + \alpha)^n \geq (1 + \alpha)(1 + n\alpha) = \\ &= 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n + 1)\alpha. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Замечание. Очевидно, что если $\alpha \neq 0$ и $n \neq 1$, то неравенство становится строгим.

Пример 1.2. Докажем методом математической индукции, что если $x_i, i = \overline{1, n}$ – некоторые положительные числа, такие что $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n, \quad (1.1)$$

при этом $(x_1 + x_2 + \dots + x_n = n) \Leftrightarrow (\forall i = \overline{1, n} \quad x_i = 1)$.

► При $n = 1$ неравенство (1.1) справедливо и при этом имеет место только знак равенства.

Если $n = 2$ и $x_1 x_2 = 1$, то $x_1 \geq 1, x_2 \leq 1$ или $x_2 \geq 1, x_1 \leq 1$. Положим для определенности $x_1 \geq 1, x_2 \leq 1$. Тогда из тождества

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \quad (1.2)$$

и условия $x_1 x_2 = 1$ следует неравенство $x_1 + x_2 \geq 2$ и условие

$$(x_1 + x_2 = 2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = 1).$$

Предположим теперь, что для произвольных k положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$, произведение которых равно единице, справедливо неравенство $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$, причем

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k = k) \Leftrightarrow (\forall i = \overline{1, k} \ x_i = 1).$$

Рассмотрим $k + 1$ положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$, для которых $x_1 x_2 \dots x_{k+1} = 1$. Если не все x_i равны единице, то найдутся числа как больше, так и меньше единицы. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_1 > 1, x_2 < 1$. Тогда, по предположению, для k положительных чисел $(x_1 x_2), x_3, \dots, x_{k+1}$, произведение которых равно единице, справедливо неравенство

$$x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k, \quad (1.3)$$

причем $(x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} = k) \Leftrightarrow (x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 1)$.

Складывая тождество (1.2) с неравенством (1.3), получаем неравенство $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \geq k + 1$ и условие

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} = k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)) \Leftrightarrow (x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_{k+1} = 1),$$

из которого следует, что

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = k + 1) \Leftrightarrow (\forall i = \overline{1, k+1} \ x_i = 1). \blacktriangleleft$$

Пример 1.3. Докажем, что среднее геометрическое *положительных* чисел не превышает их среднего арифметического, то есть

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем равенство возможно, только если $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

► Пусть $\eta_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, тогда $\frac{x_1}{\eta_n} \frac{x_2}{\eta_n} \dots \frac{x_n}{\eta_n} = 1$. Поэтому, согласно

предыдущему примеру, их сумма $\frac{x_1}{\eta_n} + \frac{x_2}{\eta_n} + \dots + \frac{x_n}{\eta_n} \geq n$; следова-

тельно, $\eta_n \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. При этом знак равенства достигается

только тогда, когда $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$. $\blacktriangleleft$

Целые числа $\mathbb{Z}$

Действительное число z называется **целым**, если существуют такие $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, что $z = n_1 - n_2$.

Свойства целых чисел

1. Сумма и произведение целых чисел – целые числа.
2. Если $n \in \mathbb{Z}$, то $n-1 \in \mathbb{Z}$.
3. Если $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n < m$, то $n+1 \leq m$.
4. Целое число $n+1$ непосредственно следует в $\mathbb{Z}$ за целым числом n (или, что то же самое, число $n-1$ предшествует числу n), то есть нет целых чисел x , удовлетворяющих условию $n < x < n+1$.

Числа $m, n \in \mathbb{Z}$ называются **взаимно простыми**, если у них нет общих делителей, отличных от 1 и -1 . Из основной теоремы арифметики следует, что если произведение $m \cdot n$ взаимно простых чисел $m, n \in \mathbb{Z}$ делится на простое число p , то одно из чисел m, n также делится на p .

Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Действительное число a называется **рациональным**, если существуют $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_2 \neq 0$ такие, что $a = \frac{z_1}{z_2}$ (заметим, что z_1 и z_2 не определены однозначно числом a).

Таким образом, множество рациональных чисел является расширением множества целых чисел. Множество рациональных чисел является замкнутым относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой элемент[♦], то есть если операнды суть рациональные числа, то и результат операции – рациональное число.

Иррациональные числа $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными**. Необходимость введения иррациональных чисел доказал еще Пифагор (570-496 г. до н.э) через теорему о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

[♦] Говорят, что множество замкнуто относительно операции, если для любых операндов из этого множества результат операции также принадлежит этому множеству.

Теорема 1.2 (о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата). Диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом α . Другими словами, $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

► Докажем от противного. Пусть

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad (1.4)$$

где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$.

Способ 1. Возможны три варианта:

m – четное, n – нечетное. Обозначим: $m = 2k$, $n = 2l + 1$. Тогда $2(2l + 1)^2 = (2k)^2$, $(2l + 1)^2 = 2k^2$, «нечетное» = «четное».	m – нечетное, n – четное. Обозначим: $m = 2k + 1$, $n = 2l$. Тогда $2(2l)^2 = (2k + 1)^2$, «четное» = «нечетное».	n – нечетное, m – нечетное. Обозначим: $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$. Тогда $2(2l + 1)^2 = (2k + 1)^2$, «четное» = «нечетное».
---	--	--

В каждом случае получили противоречие.

Способ 2. Возводя (1.4) в квадрат, получим: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, то есть $2n^2 = m^2$. Отсюда получаем: m^2 кратно 2, а значит, m кратно 2, поэтому можно записать $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(2k)^2 = 2n^2$, но тогда и n кратно 2, что противоречит условию о несократимости дроби. ◀

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ включает в себя множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множество иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Иррациональное число называется **алгебраическим**, если оно является корнем алгебраического уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

с рациональными (или, что то же самое, с целыми коэффициентами). В противном случае иррациональное число называется **трансцендентным**. Например, $\sqrt{2}$ – алгебраическое иррациональное число, а π – трансцендентное иррациональное число.

Хотя множество $\mathbb{R}$ полностью определяется вышеописанными аксиомами, на практике часто используют еще ряд утверждений, которые непосредственно следуют из аксиом[♦].

Следствия аксиом сложения

1. В $\mathbb{R}$ имеется только один нуль.
2. Для каждого числа $x \in \mathbb{R}$ существует и притом единственный противоположный элемент $(-x)$.
3. Уравнение $a + x = b$ в $\mathbb{R}$ имеет и притом единственное решение $x = b + (-a)$.

Следствия аксиом умножения

1. В $\mathbb{R}$ имеется только одна единица.
2. Для каждого числа $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеется и притом единственный обратный элемент x^{-1} .
3. Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеет и притом единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.

Следствия аксиомы связи сложения и умножения

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x = (-1) \cdot x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-1) \cdot (-x) = x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x) \cdot (-x) = x \cdot x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0$.
5. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

Следствия аксиом порядка

Кроме отношения $\leq$ на множестве действительных чисел также используют следующие отношения:

$$(x \geq y) := (y \leq x); \quad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y); \quad (x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y).$$

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место в точности одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z)$ и $(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$.

Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

1. $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$

$$(x < y) \Rightarrow (x + z < y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$

$$(x \leq y) \wedge (z \leq w) \Rightarrow (x + z \leq y + w),$$

$$(x \leq y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w).$$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0),$$

$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz),$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz).$$
3. $0 < 1$.
4. $(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1})$.

Принцип непрерывности Дедекинда (эквивалентная формулировка)

Пусть множество $\mathbb{R}$ разделено на два *непустых* подмножества K_1 и K_2 так, что каждое действительное число относится только к одному подмножеству и из условий $a \in K_1$ и $b < a$ следует, что $b \in K_1$. Тогда $\exists! s \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in \mathbb{R}$ если $a < s$, то $a \in K_1$, а если $a > s$, то $a \in K_2$.

[♦] Доказательство этих следствий можно найти в [4].

1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Наглядным представлением множества $\mathbb{R}$ является числовая ось: прямая, на которой заданы точка отсчета (точка 0) и точка 1. Направление, определяемое лучом с вершиной в 0 и содержащим 1, называется положительным. Между множеством $\mathbb{R}$ и точками числовой оси L устанавливается взаимно однозначное соответствие $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $f(x) = x$, где $f(x)$ – число, называемое координатой точки $x \in L$.

Числовую ось расширяют введением в рассмотрение символов $-\infty$, $+\infty$. Перечислим соотношения, принятые между числами $x \in \mathbb{R}$ и символами $-\infty$, $+\infty$.

1. $-\infty < x < +\infty$.	2. $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.
3. $x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x > 0; \\ -\infty, & \text{если } x < 0, \end{cases}$ $x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } x > 0; \\ +\infty, & \text{если } x < 0. \end{cases}$	4. $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$, $x - (+\infty) = -\infty + x = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty + x = +\infty$.

Для символов $-\infty$, $+\infty$ определены действия:

1. $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$.	2. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.
--	---

Наиболее часто встречаются следующие подмножества точек числовой оси (все эти множества называются **числовыми промежутками**):

- **интервал**: $(a, b) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a < x < b\}$;
- **отрезок** или **сегмент**: $[a, b] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a \leq x \leq b\}$;
- **полуинтервалы**: $[a, b) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a \leq x < b\}$,
 $(a, b] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a < x \leq b\}$;
- **лучи**: $[a, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a \leq x\}$, $(-\infty, a] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ x \leq a\}$,
 $(a, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ a < x\}$, $(-\infty, a) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \ x < a\}$;
- **вещественная ось**: $(-\infty, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R}\}$.

Интервал, отрезок и полуинтервал называются **конечными промежутками** в том смысле, что каждому из них может быть поставлено в соответствие число $b - a$ (**длина промежутка**); лучи и вещественную ось называются **бесконечными промежутками**.

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое действительное число. Тогда

1) ε -**окрестностью точки** a называют интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и обозначают $B(a, \varepsilon)$;

2) **проколотой ε -окрестностью точки** a называют множество точек $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ и обозначают $B^0(a, \varepsilon)$;

3) ε -**окрестностью бесконечности** называют множество точек $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$;

4) ε -**окрестностью плюс-бесконечности** называют луч $(\varepsilon, +\infty)$;

5) ε -**окрестностью минус-бесконечности** называют луч $(-\infty, -\varepsilon)$.

1.4. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Говорят, что множество X **равномощно** множеству Y , если существует биективное отображение X на Y , то есть X и Y – эквивалентные множества. Таким образом, мощность – это то общее, что есть у любых двух эквивалентных множеств.

Множество называется **конечным** (по Дедекинду), если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству; в противном случае оно называется **бесконечным**. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества.

Множество X называется **счетным**, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Все бесконечные множества, не являющиеся счетными, называются **несчетными**.

Совокупность всех подмножеств множества X называется **булеаном** и обозначается $\mathcal{P}(X) = \{B \mid B \subset X\}$.

Теорема 1.3 (о мощности булеана). Мощность булеана всегда больше мощности самого множества [6].

* ► Мощность множества X не превышает мощность множества $\mathcal{P}(X)$, так как «одноэлементные» подмножества из X образуют в $\mathcal{P}(X)$ часть, эквивалентную множеству X . Остается доказать, что мощности множеств X и $\mathcal{P}(X)$ не совпадают.

Действительно, пусть X и $\mathcal{P}(X)$ – эквивалентные множества, то есть установлено взаимно однозначное соответствие

$$a \leftrightarrow A, b \leftrightarrow B, \dots, t \leftrightarrow T, \dots,$$

где $a, b, \dots, t, \dots \in X$; $A, B, \dots, T, \dots \in \mathcal{P}(X)$.

Рассмотрим множество

$$M = \{t \mid t \in X, t \notin T\},$$

то есть множество элементов X , не принадлежащих соответствующим им элементам $\mathcal{P}(X)$. Так как $M \subset X$, то $M \in \mathcal{P}(X)$, а значит, ему в соответствие поставлен некоторый элемент $m \in X$.

Согласно характеристике множества M , если $m \in M$, то его не надо включать в M , то есть $m \notin M$, и наоборот, если $m \notin M$, то его надо включать в M , то есть $m \in M$.

Полученное противоречие показывает, что предположение об эквивалентности множеств X и $\mathcal{P}(X)$ неверно, а значит, мощности этих множеств не совпадают.

Таким образом, мощность самого множества X строго меньше мощности его булеана $\mathcal{P}(X)$, что и требовалось доказать. ♦

Следствие. Не существует множества, мощность которого больше мощности любого другого множества.

Пример 1.4. Множество всевозможных последовательностей, составленных из нулей и единиц, несчетно.

* ► Пусть для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ составлено множество $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ всевозможных его подмножеств. Согласно теореме, это множество более чем счетно. С другой стороны, между этим множеством и множеством всевозможных последовательностей, составленных из нулей и единиц, легко устанавливается взаимно однозначное отношение:

$$A \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ и } \forall k \in \mathbb{N} \quad x_k = \begin{cases} 0, & k \notin A; \\ 1, & k \in A. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Особое место среди несчетных множеств занимают множества, эквивалентные вышерассмотренному множеству всех последовательностей, составленных из нулей и единиц. Мощность таких множеств называется мощностью **континуума** ♦, а сами множества — **континуальными**.

Замечание 1. Конечные и счетные множества часто называют **дискретными** множествами, а множества, имеющие мощность континуум, — **непрерывными**.

Замечание 2. Как правило, бесконечные множества, встречающиеся в математическом анализе, или счетны, или континуальны.

♦ От лат. continuum — сплошное, непрерывное.

1.4.1. Счетные множества

К счетным относятся следующие множества:

- множество целых чисел;
- множество рациональных чисел;
- множество алгебраических иррациональных чисел.

Чтобы доказать счетность этих множеств, сперва необходимо доказать несколько теорем.

Теорема 1.4. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

► Достаточно проверить, что всякое бесконечное подмножество E множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел равномощно $\mathbb{N}$. Так как $E \subset \mathbb{N}$, то в E есть единственный минимальный элемент (свойство 4 множеств натуральных чисел), пусть это e_1 . Поставим ему в соответствие число 1. Множество E бесконечно, поэтому $E_2 = E \setminus \{e_1\}$ не пусто. Минимальный элемент E_2 сопоставим числу 2 и назовем его e_2 . Затем рассмотрим множество $E_3 = E \setminus \{e_1, e_2\}$ и т.д. Поскольку E – бесконечное множество, то построение не может оборваться ни на каком шаге с номером n и, как следует из принципа индукции, таким способом каждому числу $n \in \mathbb{N}$ будет сопоставлено некоторое число $e_n \in E$.

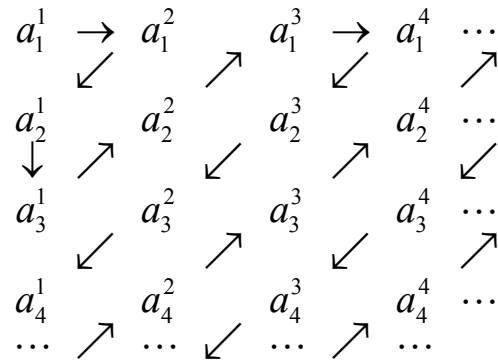
Построенное отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow E$, очевидно, инъективно, и $f(\mathbb{N}) \subseteq E$. Покажем, что оно сюръективно, то есть что $f(\mathbb{N}) = E$. Пусть $e \in E$. Множество $\{n | n \in \mathbb{N}, n \leq e\}$ конечно, и тем более конечно его подмножество $\tilde{E} = \{n | n \in E, n \leq e\}$. Пусть k – мощность множества $\tilde{E}$, тогда по построению $e = e_k$. ◀

Следствие. Любое подмножество счетного множества не более чем счетно (то есть либо конечно, либо счетно). Таким образом, среди бесконечных множеств минимальной мощностью обладают счетные множества.

Теорема 1.5. Объединение множеств конечной или счетной системы счетных множеств есть множество счетное.

► Докажем сначала, что множество A , являющееся объединением счетного числа счетных множеств, счетно. Тогда из предыдущей теоремы будет следовать, что объединение конечного числа счетных множеств счетно (как бесконечное подмножество счетного множества).

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^k, \dots\}$. Проведем нумерацию элементов множества A по следующей схеме:



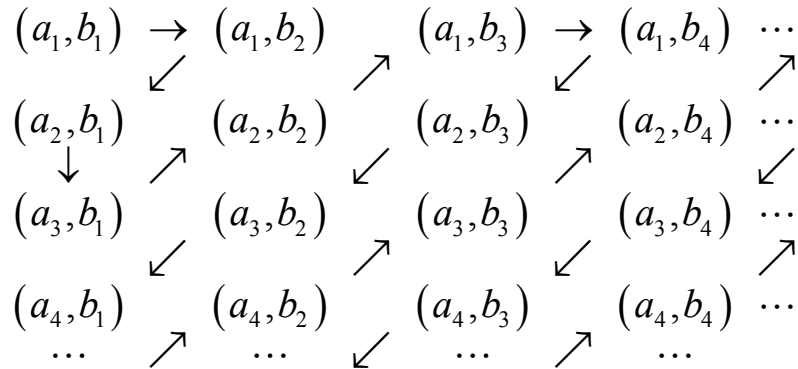
и т.д. (при этом пропускаем уже встречавшиеся элементы). Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами A и $\mathbb{N}$. ◀

Следствие 1. Пересечение не более чем счетного числа счетных множеств не более чем счетно.

Следствие 2. Объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Теорема 1.6. Прямое произведение счетных множеств счетно.

▶ Прямое произведение $A \times B$ счетных множеств A и B – это множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A$, $b \in B$. Пронумеруем элементы множеств A и B . Тогда нумерацию элементов множества $A \times B$ можно сделать следующим образом:



Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множествами $A \times B$ и $\mathbb{N}$. ◀

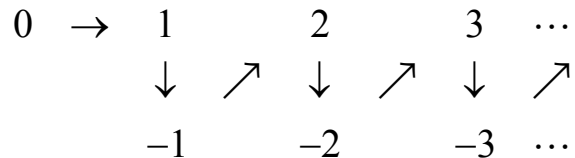
Следствие. Декартово произведение счетного числа счетных множеств счетно.

Теперь докажем счетность множеств, перечисленных в начале параграфа.

Теорема 1.7. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно.

► **Способ 1.** Множество $\mathbb{Z}$ – это объединение двух множеств: множества отрицательных целых чисел и множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$, каждое из которых, очевидно, счетно.

Способ 2. Следующая схема показывает, как установить взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$:



Способ 3. Указанное выше соответствие запишем аналитически:

$$n(z) = \begin{cases} 2z+1, & z \geq 0; \\ -2z, & z < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) $z \in \mathbb{Z}$, $n(z) \in \mathbb{N}$. ◀

Теорема 1.8. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

► Представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби $\frac{k}{n}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда между множеством $\mathbb{Q}$ и некоторым подмножеством декартового произведения $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ установлено взаимно однозначное соответствие. Так как $\mathbb{Q}$ – бесконечное множество, то, в силу теоремы 1.4, $\mathbb{Q}$ – счетно. ◀

Теорема 1.9. Множество алгебраических иррациональных чисел счетно [4].

* ► Алгебраическое уравнение степени k с рациональными коэффициентами можно записать в приведенном виде:

$$x^k + r_1 x^{k-1} + \dots + r_{k-1} x + r_k = 0,$$

где коэффициент при старшей степени равен 1. Таким образом, различных алгебраических уравнений степени k столько же, сколько различных упорядоченных наборов $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ рациональных чисел, то есть счетное множество.

Алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами (произвольных степеней) тоже счетное множество как счетное объединение (по степеням) счетных множеств. У каждого такого уравнения лишь конечное число корней, поэтому множество алгебраических чисел не более чем счетно. Но оно бесконечно, а значит, счетно. ◀

1.4.2. Континуальные множества

Континуальными являются следующие множества:

- множество всех точек отрезка $[a, b]$;
- множества точек интервала (a, b) и полуинтервалов $[a, b)$ и $(a, b]$;
- множество $\mathbb{R}$, множества точек лучей $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$;
- множества всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, внутренней части сферы, и т.д.;
- множество всех прямых на плоскости.

Чтобы доказать континуальность этих множеств, сперва необходимо доказать следующую теорему.

Теорема 1.10. Множество точек отрезка $[0, 1]$ имеет мощность континуума $[1]$.

► В двоичной записи каждая точка единичного отрезка $[0, 1]$ может быть записана в виде

$$0.h_1h_2h_3\dots, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad h_i \in \{0, 1\}.$$

Такая запись единственна, за исключением чисел вида $\frac{n}{2^k}$. Числам такого вида соответствуют в точности две записи (у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а у другой – все единицы).

Множество точек вида $\frac{n}{2^k}$ счетно, следовательно, множество последовательностей, им соответствующих, также счетно; значит, эти множества эквивалентны и между ними существует взаимно однозначное соответствие.

Каждой точке $x = (0.h_1h_2h_3\dots)$, за исключением точек вида $\frac{n}{2^k}$, поставим в соответствие последовательность $h_1, h_2, h_3, \dots$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[0, 1]$ и множеством последовательностей, составленных из нулей и единиц, то есть множество точек отрезка имеет мощность континуума. ◀

Замечание. Часто мощность континуума определяется как мощность множества точек отрезка $[0, 1]$.

Теорема 1.11. Отрезок $[0,1]$ и интервал $(0,1)$ имеют одинаковую мощность.

► Множество рациональных чисел интервала $(0,1)$ счетно. Множество рациональных чисел отрезка $[0,1]$ также счетно. Следовательно, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Каждому иррациональному числу отрезка $[0,1]$ поставим в соответствие это же число из интервала $(0,1)$.

Таким образом, между точками интервала $(0,1)$ и отрезка $[0,1]$ установлено взаимно однозначное соответствие, а значит, эти множества равномощны. ◀

Замечание. Отрезок $[0,1]$ и полуинтервалы $(0,1]$ и $[0,1)$ имеют одинаковую мощность.

Теперь докажем континуальность некоторых множеств, перечисленных в начале параграфа.

Теорема 1.12. Множество всех точек отрезка $[a,b]$ континуально.

► Покажем, что множество точек отрезка $[a,b]$ эквивалентно множеству точек отрезка $[0,1]$. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между точками данных множеств следующим образом:

$$x \in [a,b] \leftrightarrow \xi = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1].$$

Следовательно, рассматриваемые множества равномощны. ◀

Теорема 1.13. Множества точек промежутков

$$(a,b), [a,b) \text{ и } (a,b]$$

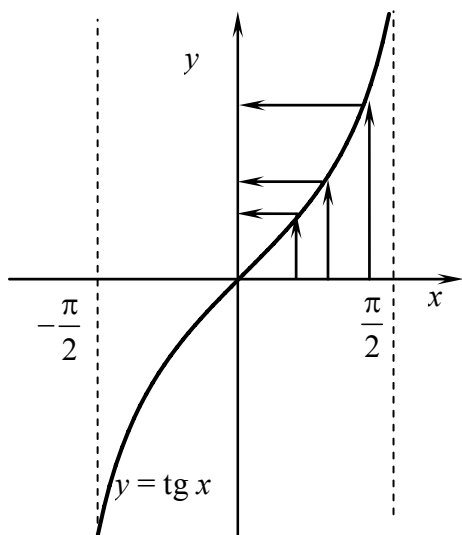
континуальны.

► Множество точек интервала (a,b) эквивалентно множеству точек интервала $(0,1)$, которое, в свою очередь, эквивалентно множеству точек отрезка $[0,1]$; следовательно, исходное множество континуально.

Для полуинтервалов $[a,b)$ и $(a,b]$ доказательство аналогично. ◀

Теорема 1.14. Множество $\mathbb{R}$, множества точек лучей $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ континуальны.

► Множество точек интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ континуально.



С другой стороны, между точками этого интервала и множеством $\mathbb{R}$ можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом (рис. 1):

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow y = \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, рассматриваемые множества равномощны, и $\mathbb{R}$ континуально.

Рис. 1

При доказательстве континуальности лучей достаточно изменить исходное множество точек и функцию $y(x)$ следующим образом:

- для луча $(a, +\infty)$ интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \operatorname{tg} x + a$;
- для луча $[a, +\infty)$ полуинтервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \operatorname{tg} x + a$;
- для луча $(-\infty, a)$ интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $y = \operatorname{tg} x + a$;
- для луча $(-\infty, a]$ полуинтервал $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $y = \operatorname{tg} x + a$. ◀

Замечание. Доказав, что числовая ось имеет континуальное (несчетное) множество точек, мы доказали существование иррациональных и трансцендентных чисел (так как множества рациональных и алгебраических чисел – счетны).

Теорема 1.15. Множество внутренних точек прямоугольника континуально.

* ► Возьмем интервал $(0,1)$ и прямоугольник $ABCD$ (рис. 2).

Каждую точку T этого прямоугольника можно задать двумя числами:

$$x = \frac{QT}{AB} \text{ и } y = \frac{PT}{AD}.$$

Эти числа можно записать как бесконечные десятичные дроби. Так как x и y не больше 1, то дроби имеют вид

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n..., \quad y = 0.\beta_1\beta_2...\beta_n...,$$

где α_i и β_i – десятичные знаки чисел x и y .

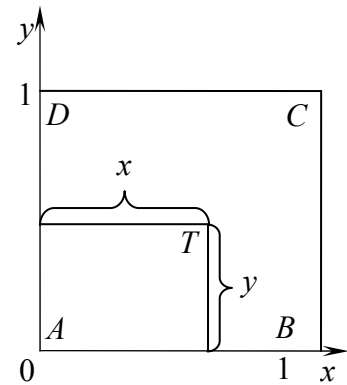


Рис. 2

Теперь надо указать точку z интервала $(0,1)$, соответствующую точке T . Определим эту точку z следующим образом:

$$z = 0.\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2...\alpha_n\beta_n...,$$

то есть десятичные знаки числа z получаются «перетасовыванием» десятичных знаков чисел x и y .

Ясно, что различным точкам прямоугольника соответствуют разные точки интервала. Всех точек интервала мы не получим. Например, точка $z = 0.191919...$ должна была бы получиться из пары $x = 0.111...$, $y = 0.999...$, соответствующей точке на стороне DC прямоугольника $ABCD$.

Мы установили, таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками прямоугольника и *частью* точек интервала $(0,1)$. Это показывает, что множество точек прямоугольника имеет не большую мощность, чем множество точек отрезка. Но его мощность и не меньше, а потому эти мощности совпадают, то есть мощность множества внутренних точек прямоугольника – континуум. ◀

Замечание. Чтобы показать, что числа $0.999...$ и 1 совпадают, достаточно предположить, что это не так. Тогда отрезок $[0.999...; 1]$ должен содержать еще, по крайней мере, одно число, что приводит к противоречию, так как десятичной записи для этого числа не существует.

1.4.3*. Кардинальные числа

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств.

Класс, которому принадлежит множество X , называется **мощностью множества X** , **кардиналом** или **кардинальным числом множества X** и обозначается символом $\text{card } X$. Если X равномощно Y , то пишут $\text{card } X = \text{card } Y$.

Говорят, что кардинальное число множества X не больше кардинального числа множества Y , и пишут $\text{card } X \leq \text{card } Y$, если X равномощно некоторому подмножеству множества Y .

Подобно тому, как отношение неравенства упорядочивает действительные числа на числовой прямой, введенное отношение « $\leq$ » упорядочивает мощности или кардинальные числа множеств. Для этого отношения справедливы следующие свойства:

- $(\text{card } X \leq \text{card } Y) \wedge (\text{card } Y \leq \text{card } Z) \Rightarrow (\text{card } X \leq \text{card } Z)$;
- теорема Шредера-Бернштейна –
 $(\text{card } X \leq \text{card } Y) \wedge (\text{card } Y \leq \text{card } X) \Rightarrow (\text{card } X = \text{card } Y)$;
- теорема Кантора –
 $\forall X \forall Y (\text{card } X \leq \text{card } Y) \vee (\text{card } Y \leq \text{card } X)$.

Если X – счетное множество, то $\text{card } X = \text{card } N = \aleph_0^*$, а если X – континуальное множество, то $\text{card } X = \aleph$.

Свойства кардинальных чисел

1. Если $A \subset B$, то $\text{card } A \leq \text{card } B$.
2. Если $A \cap B = \emptyset$, то $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$, причем
$$n + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \aleph = \aleph, \quad \aleph + \aleph = \aleph.$$
3. $\text{card}(A \times B) = \text{card } A \cdot \text{card } B$, причем
$$n \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph, \quad \aleph \cdot \aleph = \aleph.$$

* $\aleph$ – древнееврейская буква «алеф».

Проблема континуума (континуум-гипотеза)

В начале 80-х годов XIX века Г. Кантор высказал гипотезу о том, что мощность континуума есть первая мощность, превосходящая мощность множества натуральных чисел. Или, другими словами, всякое бесконечное подмножество множества мощностью континуум либо равномощно множеству натуральных чисел, либо имеет мощность континуум.

В 1936 г. К. Гедель доказал, что континуум-гипотеза совместна с естественной системой аксиоматической теории множеств и, следовательно, не может быть опровергнута традиционными средствами.

В 1963 г. П. Коэн сумел доказать, что и отрицание континуум-гипотезы совместно с этой системой, так что континуум-гипотезу невозможно доказать с помощью обычных методов теории множеств. ♦

Следует отметить, что несуществование множества, мощность которого больше мощности любого конечного множества, но меньше $\aleph_0$, легко доказуемо (см. следствие из теоремы 1.4).

Пример 1.5. Пусть A – некоторое множество, а B – множество функций $f : A \rightarrow \{0,1\}$. Тогда $\text{card } A < \text{card } B$.

► Покажем сначала, что $\text{card } A \leq \text{card } B$. Для этого каждой точке a множества A поставим в соответствие функцию

$$f^a(x) = \begin{cases} 1, & x = a; \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Ясно, что разным точкам a соответствуют разные функции $f^a(x)$. Таким образом, $\text{card } A \leq \text{card } B$.

Покажем теперь, что $\text{card } A \neq \text{card } B$. Действительно, пусть A и B – эквивалентные множества, то есть установлено взаимно однозначное соответствие

$$a \leftrightarrow f_a(x), b \leftrightarrow f_b(x), \dots t \leftrightarrow f_t(x), \dots,$$

где $a, b, \dots, t, \dots \in A$; $f_a(x), f_b(x), \dots, f_t(x), \dots \in B$.

Определим новую функцию $\varphi(x)$ следующим образом

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x). \quad (1.6)$$

Очевидно, что функция $\varphi(x)$ определена на множестве A и прини-

♦ Большая Российская Энциклопедия. Математика. Москва, 1998.

мают значения 0 и 1; следовательно, $\varphi(x) \in B$. Но тогда, по предположению, $\varphi(x)$ соответствует некоторой точке $m \in A$, а значит,

$$\varphi(x) = f_m(x).$$

Учитывая равенство (1.6) для $\varphi(x)$, получаем, что

$$\forall x \in A \quad 1 - f_x(x) = f_m(x).$$

Положив в этом равенстве $x = m$, получим $1 - f_m(m) = f_m(m)$, следовательно, $f_m(m) = 1/2$. Но это противоречит тому, что $f_m(x) \in B$, а именно тому, что ее значения равны 0 и 1.

Полученное противоречие показывает, что предположение об эквивалентности множеств A и B неверно, а значит $\text{card } A \neq \text{card } B$.

Таким образом, $\text{card } A < \text{card } B$, что и требовалось доказать. $\blacktriangleleft$

Замечание. Этот пример является ещё одним способом доказательства несуществования множества максимальной мощности.

1.5. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху (снизу)*, если

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq c \quad (x \geq c).$$

Число c в этом случае называют *верхней (нижней) гранью* множества X или *мажорантой (минорантой)* множества X . Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* или *максимальным* (*наименьшим* или *минимальным*) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \quad x \leq a \quad (x \geq a)$. Обозначения (соответственно):

$$a = \max X = \max_{x \in X} x \quad (a = \min X = \min_{x \in X} x).$$

Лемма 1.1. Если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он единственный.

► Справедливость леммы следует из аксиом порядка и определения максимального (минимального) элементов. $\blacktriangleleft$

Замечание. Не во всяком, даже ограниченном, множестве имеется максимальный (минимальный) элемент. Например, множество $[0, 1)$ имеет минимальный элемент, но не имеет максимального элемента.

Точной верхней (нижней) гранью ограниченного множества X называется наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху (снизу). Точная верхняя (нижняя) грань множества X обозначается символом $\sup X$ или $\sup_{x \in X} x$ ($\inf X$ или $\inf_{x \in X} x$) и читается «супремум X » («инфимум X »):

$$\begin{aligned} s = \sup_{x \in X} x &\Leftrightarrow \begin{aligned} &1) \forall x \in X \quad x \leq s, \\ &2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X \quad x' > s - \varepsilon \text{ или } \forall s' < s \quad \exists x' \in X \quad s' < x'. \end{aligned} \\ i = \inf_{x \in X} x &\Leftrightarrow \begin{aligned} &1) \forall x \in X \quad i \leq x, \\ &2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X \quad x' < i + \varepsilon \text{ или } \forall i' > i \quad \exists x' \in X \quad x' < i'. \end{aligned} \end{aligned}$$

Верхней гранью неограниченного сверху множества X принято считать « $+\infty$ », а **нижней гранью неограниченного снизу множества X** « $-\infty$ ».

Теорема 1.16 (принцип верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет и притом единственную точную верхнюю (нижнюю) грань [4].

► Докажем, что непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.

Обозначим через $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ и } \forall x \in X, y \geq x\}$ множество верхних граней множества X . По условию $X \neq \emptyset$ и ограничено, а значит, и $Y \neq \emptyset$.

Докажем теперь единственность точной верхней грани. Так как $X \neq \emptyset$ и $Y \neq \emptyset$, то, в силу аксиомы полноты, существует число d такое, что

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq d \leq y, \quad (1.7)$$

причем число d есть элемент множества Y , так как для него выполняется характеристика множества Y . С другой стороны, из (1.7) следует, что $\forall y \in Y, y \geq d$, следовательно, d – минимальный элемент множества Y , причем единственный (см. лемму 1.1).

Существование и единственность точной нижней грани ограниченного снизу множества доказывается аналогично. ◀

Следствие. В любом непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве множества целых чисел имеется максимальный (минимальный) элемент.

► Докажем случай ограниченного сверху множества.

Пусть $M \subset \mathbb{Z}$ – рассматриваемое множество. По условию $M \neq \emptyset$, следовательно, $\exists! \sup M = s \in \mathbb{R}$. Тогда, по определению $\sup$, взяв $\varepsilon = 1$, можно утверждать, что

$$\exists n \in M \quad s - 1 < n \leq s. \quad (1.8)$$

Докажем от противного, что $n = \max M$. Если предположить, что $\exists n' \in M$ такой, что $n' > n$, то (см. свойства целых чисел)

$$n' \geq n + 1. \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) получаем $s < n + 1 \leq n'$. Но неравенство $s < n'$ противоречит тому, что $s = \sup M$.

Для ограниченного снизу множества доказательство аналогично. ◀

Замечание 1. Точная грань может как принадлежать, так и не принадлежать множеству.

Замечание 2. Если точная верхняя (нижняя) грань принадлежит множеству, то она совпадает с максимальным (минимальным) элементом множества.

Замечание 3. Каждое непустое числовое множество имеет верхнюю и нижнюю грани, принадлежащие расширенному множеству действительных чисел.

Свойства точных граней

$$1. \sup \{-x | x \in X\} = -\inf X, \quad \inf \{-x | x \in X\} = -\sup X.$$

$$2. \sup \{x + y | x \in X, y \in Y\} = \sup X + \sup Y, \\ \inf \{x + y | x \in X, y \in Y\} = \inf X + \inf Y.$$

$$3. \sup \{x - y | x \in X, y \in Y\} = \sup X - \inf Y.$$

4. Если $\lambda \geq 0$, то

$$\sup \{\lambda x | x \in X\} = \lambda \sup X, \quad \inf \{\lambda x | x \in X\} = \lambda \inf X.$$

5. Пусть $X = \{x | x \geq 0\}$, $Y = \{y | y \geq 0\}$. Тогда

$$\sup \{xy | x \in X, y \in Y\} = \sup X \sup Y, \\ \inf \{xy | x \in X, y \in Y\} = \inf X \inf Y.$$

Теорема 1.17 (теорема Архимеда). Если $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, то

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! k \in \mathbb{Z} \quad (k-1)h \leq x < kh.$$

► Рассмотрим множество $A = \left\{ n \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{x}{h} < n \right\}$:

1) $A \neq \emptyset$, так как $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху;

2) A ограничено снизу (например, числом $\frac{x}{h}$). Следовательно, в множестве A есть минимальный элемент $k = \min A$, то есть $\forall n \in A \quad n \geq k$, а значит $k-1 \notin A$.

$$\begin{array}{c|c} k \in A & k-1 \notin A \\ k > \frac{x}{h} & k-1 \leq \frac{x}{h} \\ \hline k-1 \leq \frac{x}{h} < k. \end{array}$$

Учитывая, что $h > 0$, из последнего двойного неравенства получим

$$(k-1)h \leq x < kh.$$

Единственность $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего этим двум неравенствам, следует из единственности минимального элемента числового множества. ◀

Следствие 1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

► По теореме Архимеда $\exists n \in \mathbb{Z} \quad 1 < \varepsilon \cdot n$ ($x := 1, h := \varepsilon, k := n$). Поскольку $0 < 1$ и $0 < \varepsilon$, имеем $0 < n$. Таким образом, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ◀

Следствие 2. Если число $x \in \mathbb{R}$ таково, что $0 \leq x$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x < \frac{1}{n}$, то $x = 0$.

► Соотношение $0 < x$ невозможно в силу предыдущего следствия, так как если $x > 0$, то $\exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} < x$, что противоречит условию. ◀

Следствие 3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \quad a < r < b\}$.

► Учитывая следствие 1, подберем $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$0 < \frac{1}{n} < b - a.$$

По теореме Архимеда найдем такое число $m \in \mathbb{Z}$, что

$$\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n} \quad (x := a, h := \frac{1}{n}, k := m).$$

Тогда $\frac{m}{n} < b$, ибо в противном случае $\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n}$, и, следовательно, $\frac{1}{n} \geq b - a$. Таким образом, $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ и $a < \frac{m}{n} < b$. ◀

Следствие 4. $\forall a, b \in \mathbb{R} \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ a < r < b\}$.

► Из предыдущего следствия получим, что между числами $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{2}}$ найдется некоторое рациональное число $\frac{m}{n}$, но тогда для иррационального числа $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ выполняется неравенство $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. ◀

Следствие 5. $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! k \in \mathbb{Z} \ k \leq x < k + 1$.

► Утверждение следует из теоремы Архимеда, если положить $h = 1$. ◀

Замечание. Указанное число k обозначается $[x]$ и называется *целой частью числа x* , а величина $\{x\} := x - [x]$ называется *дробной частью числа x* . Таким образом, $x = [x] + \{x\}$, причем $\{x\} \geq 0$.

Следствие 6. Числовую прямую можно покрыть не более чем счетным количеством непересекающихся интервалов.

► Докажем от противного. Пусть числовая прямая покрыта более чем счетным количеством непересекающихся интервалов. Выберем в каждом интервале по одной рациональной точке. Это можно сделать, так как по свойству 4 между любыми двумя вещественными числами существует рациональное число. Так как интервалы не пересекаются, то разным интервалам будут соответствовать разные рациональные числа. Множество рациональных чисел счетно, поэтому количество интервалов не может быть более чем счетно. ◀

Пример 1.6. Покажем, что множество всех правильных дробей:

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ и } 0 < m < n \right\},$$

не имеет наименьшего и наибольшего элементов; $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

► Докажем от противного. Пусть $\frac{m}{n}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) – наименьшее (наибольшее) число. Тогда, учитывая, что $\forall n, m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0 \quad \left(\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1 \right), \quad (1.10)$$

получаем, соответственно, меньший (больший), чем указанный наименьший (наибольший) элемент множества. Следовательно, предположение о существовании наименьшего и наибольшего элементов неверно.

Согласно теореме Архимеда ($x := m$, $h := \varepsilon$, $k := n$):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > m/\varepsilon.$$

Тогда $m/n < \varepsilon$ и, учитывая неравенства (1.10), получим: $\inf \{m/n\} = 0$.

Аналогично для верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (x := p, h := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, k := m).$$

Отсюда $\frac{m}{p+m} > 1-\varepsilon$, то есть при $n = p+m$ имеем $m/n > 1-\varepsilon$, а это

вместе с неравенством $m/n < 1$ означает, что $\sup \{m/n\} = 1$. ◀

Системой вложенных отрезков называют множество S , элементами которого являются отрезки, причем $\forall I_1, I_2 \in S \quad I_1 \subset I_2$ или $I_2 \subset I_1$.

Функцию $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ натурального аргумента называют **последовательностью элементов множества X** . Значение $f(n)$ функции f , соответствующее числу $n \in \mathbb{N}$, обычно обозначают x_n и называют n -м членом последовательности.

Система вложенных отрезков называется **последовательностью вложенных отрезков**, если они занумерованы, причем любой отрезок с большим номером содержится в отрезке с меньшим номером.

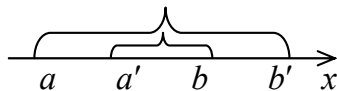
Последовательность вложенных отрезков называется **стягивающейся**, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.

Лемма 1.2 (о вложенных отрезках, или принцип Коши-Кантора). Пусть S – система вложенных отрезков, тогда

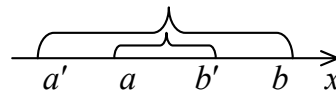
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \quad x \in I.$$

► Пусть A – множество левых, а B – множество правых концов отрезков. Тогда $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$. Действительно, пусть $[a, b'], [a', b] \in S$ – произвольные отрезки, тогда возможны два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & [a, b'] \subset [a', b], \\ & a' \leq a < b' \leq b, \\ & a \leq b; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2) \quad & [a', b] \subset [a, b'], \\ & a \leq a' < b \leq b', \\ & a \leq b. \end{aligned}$$



Поэтому, в силу аксиомы полноты, $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq x \leq b$, а значит, $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \quad x \in I$. ◀

Лемма 1.3 (о последовательности стягивающихся отрезков). Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом единственную.

► Наличие этой точки следует из предыдущей леммы. Докажем единственность от противного. Пусть все отрезки содержат две различных точки a и b (для определенности положим $a < b$), тогда длина всех отрезков должна быть больше, чем $b - a > 0$, но это противоречит тому, что в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины. ◀

Теорема 1.18 (теорема Кантора о мощности отрезка). Множество точек отрезка несчетно.

► Докажем от противного. Пусть все точки отрезка занумерованы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Делим отрезок на 3 части. Тогда точка x_1 не принадлежит одному из этих отрезков. Делим его на 3 части. Тогда точка x_2 не принадлежит одному из получившихся отрезков и т.д. Мы получим систему вложенных отрезков. По лемме о вложенных отрезках, существует точка, принадлежащая сразу всем отрезкам. Но эта точка не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ по построению. ◀

Говорят, что *система S множеств X покрывает множество Y* , если $Y \subset \bigcup_{X \in S} X$.

Лемма 1.4 (лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии). В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

► Пусть S – система интервалов, покрывающих отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S , то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что, по крайней мере, одна из его половинок, которую мы обозначим I_2 , тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим I_3 и т.д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия S . Поскольку длина отрезка, полученного на n -м шаге, по построению равна $|I_{n+1}| = |I_1|/2^n$, то в последовательности $I_1, I_2, I_3, \dots$ есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме о вложенных отрезках

$$\exists! c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad c \in I_n.$$

Так как $c \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $(\alpha, \beta) = U \in S$, содержащий точку c , то есть $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n , что $|I_n| < \varepsilon$. Так как $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, то $I_n \subset U = (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. ◀

Пусть X — произвольное множество вещественных чисел. Точка a называется **предельной точкой множества** X , если в любой ее окрестности содержится бесконечное количество точек множества X , или, что то же самое, в любой ее окрестности есть хотя бы одна точка множества X , отличная от a .

Лемма 1.5 (о предельной точке, или принцип Больцано-Вейерштрасса). Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

▶ Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — данное множество. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $X \subset [a, b] = I \subset \mathbb{R}$. Покажем, что, по крайней мере, одна из точек отрезка I является предельной для X .

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность, в которой либо вообще нет точек множества X , либо их там конечное число. Совокупность таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих отрезок I . Но поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает все множество X . Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число точек множества X , значит, в их объединении тоже конечное число точек X , то есть X — конечное множество. А по теореме Кантора (о мощности отрезка) множество точек отрезка бесконечно. ◀