Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. МАКСИМЕНКО, А.В. ГОБЫШ, О.В. ШЕРЕМЕТ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 2

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2008

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, доц. *Д.В. Воронин*,
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Г. Чередниченко*,
канд. техн. наук, доц. *Б.Г. Писляков,*
ст. преп. *Г.А. Кузин*,
канд. физ.-мат наук, доц. *А.А. Шалагинов*

Работа выполнена на кафедре инженерной математики НГТУ
для студентов I курса технических специальностей

Максименко В.Н.

Практикум по математическому анализу : учеб. пособие / В.Н. Максименко, А.В. Гобыш, О.В. Шеремет; под ред. В.Н. Максименко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – Ч. 2. – 168 с.

ISBN

Настоящее пособие включает в себя задачи с подробными решениями и упражнения по следующим разделам курса математического анализа: кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды.

© В.Н. Максименко, А.В. Гобыш,
О.В. Шеремет, 2008
© Новосибирский государственный
технический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

ГЛАВА 1. Кратные интегралы 7

1.1. Двойные интегралы 7
1.1.1. Вычисление двойных интегралов 8
1.1.2. Применение двойных интегралов 13
1.2. Тройные интегралы 18
1.2.1. Вычисление тройных интегралов 18
1.2.2. Применение тройных интегралов 31

ГЛАВА 2. Криволинейные и поверхностные интегралы 42

2.1. Криволинейные интегралы первого рода (криволинейные интегралы по длине дуги) 42
2.1.1. Вычисление криволинейных интегралов первого рода 42
2.1.2. Применение криволинейных интегралов первого рода 45
2.2. Криволинейные интегралы второго рода (криволинейные интегралы по координатам) 47
2.2.1. Вычисление криволинейных интегралов второго рода 47
2.2.2. Формула Остроградского–Грина 51
2.2.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования 53
2.2.4. Применение криволинейных интегралов второго рода 56
2.3. Поверхностные интегралы первого рода (интегралы по площади поверхности) 58
2.3.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода 58
2.3.2. Применение поверхностных интегралов первого рода 61
2.4. Поверхностные интегралы второго рода (поверхностные интегралы по координатам) 64
2.4.1. Вычисление поверхностных интегралов второго рода 64
2.4.2. Формула Остроградского–Гаусса 68

ГЛАВА 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения 71

3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка 71
3.1.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 71
3.1.2. Уравнения в полных дифференциалах 74
3.1.3. Однородные дифференциальные уравнения 77
3.1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли 81
3.2. Дифференциальные уравнения высших порядков 87
3.2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка 87
3.2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 98
3.2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 102
3.2.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью 106
3.2.5. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 114

ГЛАВА 4. Ряды 120

4.1. Числовые ряды 120
4.1.1. Знакоположительные ряды 121
4.1.2. Знакочередующиеся ряды 134
4.2. Функциональные ряды 139
4.2.1. Функциональные и степенные ряды 139
4.2.2. Ряды Тейлора и Маклорена 144
4.2.3. Некоторые приложения рядов 150
4.3. Ряды Фурье 154
Библиографический список 167

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой практикум по четырем разделам математического анализа: кратные интегралы, криволинейные интегралы, дифференциальные уравнения, ряды и ряды Фурье. Каждая глава содержит краткие теоретические сведения и подробные решения типичных задач по указанным темам. Содержание пособия соответствует Государственным стандартам по основам математического анализа для студентов первого курса технических специальностей (НГТУ).

Целью пособия является самостоятельное освоение студентами методов решения задач по математическому анализу. Рассмотренные примеры демонстрируют технические приемы решения и акцентируют внимание на условиях применимости теоретического материала в решениях. В пособии содержится большое количество оригинальных задач, составленных преподавателями кафедры инженерной математики НГТУ, а также приведены задачи из сборника задач по курсу математического анализа Г.Н. Бермана [1]. Нумерация задач выполнена внутри каждой главы. С целью закрепления изученного материала читателю предлагается ряд задач для самостоятельного решения из сборника [1], обозначен знаком • в конце каждого раздела.

На CD диске, прилагаемом к пособию, содержится электронная оболочка с набором варьируемых заданий для осуществления контроля и самоконтроля знаний по заявленным в пособии темам. В электронном виде для каждого тестового задания приводятся подробные решения, комментарии и краткие теоретические сведения по данной теме. У студентов есть следующие возможности: сгенерировать тест из 10 случайно выбранных заданий, провести тестирование по заданиям определенной темы или по всем заявленным заданиям. Предоставлен-

ная электронная оболочка позволяет студентам выбрать индивидуальную траекторию обучения и самоконтроля знаний по математическому анализу.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность преподавателям кафедры инженерной математики НГТУ и рецензентам, чьи поправки, критические замечания и предложения способствовали улучшению пособия.

Благодарим за помощь в создании учебного пособия
преподавателей кафедры инженерной математики НГТУ:

А.В. Гобыш (гл. 2), *А.В. Дедову* (разд. 1.1.2, 1.2.2),
С.А. Зайцева (разд. 3.1.4), *Т.И. Ерзину* (разд. 3.2.3, 3.3),
В.И. Икрянникова (разд. 3.2.2),
Г.Б. Корабельникову (разд. 4.2), *Г.А. Кузина* (разд. 1.1.1),
В.В. Кузнецова (разд. 3.1.3),
И.Н. Медведева (разд. 3.1.1, 3.1.2), *Л.В. Павшок* (разд. 3.2.4),
Г.Б. Пислякова (разд. 4.3),
С.В. Побаченко (разд. 3.2.1), *А.А. Шалагинова* (разд. 4.1),
Э.Б. Шварца (разд. 1.2.1)

ГЛАВА 1
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Двойные интегралы

Область $D \subset \mathbf{R}^2$ называется *правильной в направлении координатной оси*, если любая прямая параллельная этой оси пересекает границу области не более чем в двух точках.

На плоскости Oxy рассмотрим область $D \subset \mathbf{R}^2$ вида $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ – правильную в направлении оси Oy. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D вычисляется с помощью повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Для нахождения повторного интеграла сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$, в котором x считается постоянным, а затем внешний интеграл, т.е. результат первого интегрирования интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

Если область $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ – правильная в направлении оси Ox, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

При вычислении внутреннего интеграла $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ аргумент y считается постоянным.

Перечислим основные свойства двойного интеграла:

1) $\iint\limits_D c\,f(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, c – const;

2) $\iint\limits_D \big(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$;

3) $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод замены переменных. Преобразование двойного интеграла в декартовых координатах x, y к полярным координатам ρ, φ, связанным с декартовыми координатами соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\; d\varphi,$$

где $\tilde{D}$ – область в координатах ρ, φ, соответствующая области D, множитель ρ в подынтегральном выражении – модуль якобиана при переходе от декартовых координат к полярным, $J = \rho$.

1.1.1. Вычисление двойных интегралов

Задача 1.1. Расставить пределы и изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

Р е ш е н и е. Изобразим область D на рис. 1.1 и зададим ее неравенствами как правильную в направлении Oy:

$$D = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \le x \le 1, \quad e^{-x} \le y \le e^x\right\}.$$

Выразим двойной интеграл через повторный:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)\,dy .$$

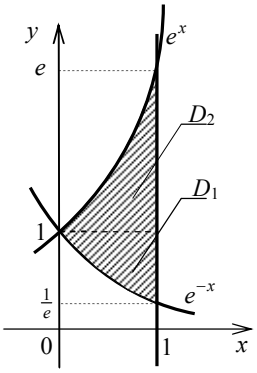


Рис. 1.1

Изменим порядок интегрирования в полученном повторном интеграле, для чего заданную область D представим в виде суммы двух областей D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$) как правильные в направлении Ox. Выразив из уравнений линий $y = e^x$, $y = e^{-x}$ переменную x, получим $x = \ln y$, $x = -\ln y$ соответственно.

$$D_1 = \left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{e} \le y \le 1,\quad -\ln y \le x \le 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y)\,\middle|\,1 \le y \le e,\quad \ln y \le x \le 1\right\}$$

и, в силу свойства аддитивности двойного интеграла (свойство 3), представим двойной интеграл в виде суммы двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\frac{1}{e}}^1 dy \int\limits_{-\ln y}^1 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx .$$

Ответ. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\frac{1}{e}}^1 dy \int\limits_{-\ln y}^1 f(x,y)\,dx +$

$$+\int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx .$$

Задача 1.2. Расставить пределы и изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

Р е ш е н и е. Изобразим область $D = D_1 \cup D_2$ на рис. 1.2 и представим D_1 и D_2 как правильные в направлении оси Oy:

$$D_1 = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^2\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \le x \le 2, \quad 0 \le x \le 2 - x\right\}.$$

Воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла (свойство 3):

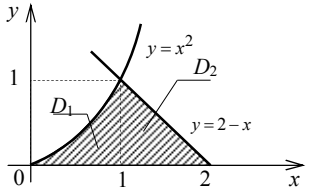


Рис. 1.2

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy.$$

Изменим порядок интегрирования, для этого выразим переменную x из уравнений линий

$$y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y},$$

$y = 2 - x \;\Rightarrow\; x = 2 - y$. Область D является правильной в направлении оси Ox:

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 1, \quad \sqrt{y} \le x \le 2 - y\right\},$$

тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

Ответ. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\,dx.$$

Задача 1.3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y\,dxdy$, где область D определена неравенствами $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, $\sin x \le y \le \cos x$.

Р е ш е н и е. Изобразим область D на рис. 1.3 и определим ее как правильную в направлении оси Oy:

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\quad \sin x \le y \le \cos x \right\}.$$

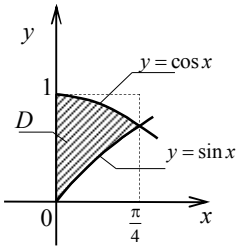


Рис. 1.3

Вычислим интеграл:

$$\iint\limits_D y dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{\sin x}^{\cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$$

Ответ. $\iint\limits_D y\,dxdy = \dfrac{1}{4}$.

Задача 1.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} dxdy$, где область D задана неравенствами $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le y \le x\sqrt{3}$.

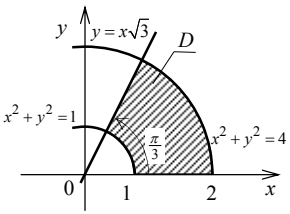


Рис. 1.4

Р е ш е н и е. Изобразим область D на рис. 1.4. Неравенство $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ определяет множество точек кольца с центром в начале координат внутреннего радиуса $R = 1$ и внешнего радиуса $R = 2$.

Неравенство $0 \le y \le x\sqrt{3}$ определяет множество точек первой координатной чет-

верти, заключенных между прямыми $y = x\sqrt{3}$ и $y = 0$ – осью Ox.

Перейдем к полярным координатам. Подынтегральная функция в полярных координатах примет вид

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi\right) = \varphi.$$

Запишем неравенства, определяющие область интегрирования в полярных координатах:

а) $1 \le x^2 + y^2 \le 4 \;\Leftrightarrow\; 1 \le \rho^2 \le 4 \;\Leftrightarrow\; 1 \le \rho \le 2$,

б) $0 \le y \le x\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; 0 \le \rho\sin\varphi \le \rho\cos\varphi\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; 0 \le tg\varphi \le \sqrt{3} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда

$$\tilde{D} = \left\{\left(\rho,\varphi\right)\middle|\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\quad 1 \le \rho \le 2\right\}.$$

Вычислим интеграл:

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} \varphi\,\rho\,d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\pi/3} \varphi d\varphi \int\limits_1^2 \rho\,d\rho =$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\left|\begin{matrix}\pi/3\\ 0\end{matrix}\right. \frac{\rho^2}{2}\left|\begin{matrix}2\\ 1\end{matrix}\right. = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} - 0\right)\frac{4-1}{2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ответ. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy = \frac{\pi^2}{12}$.

Задача 1.5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(y^2 + x^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$ и $y = 0$.

Р е ш е н и е. Построим область D (рис. 1.5). Кривая $y = \sqrt{4 - x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 4$ с центром в начале

координат радиусом $R = 2$. Прямая $y = 0$ – ось Ox. Уравнение границы области D и подынтегральная функция содержат выражение $x^2 + y^2$, поэтому рационально вычислить двойной интеграл в полярных координатах.

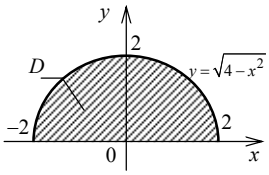


Рис. 1.5

Подынтегральная функция в полярных координатах примет вид:

$$x^2 + y^2 = = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 .$$

Запишем уравнения границ области в полярных координатах:

а) $y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi} \Leftrightarrow \rho^2 \sin^2 \varphi =$

$= 4 - \rho^2 \cos^2 \varphi \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2$,

б) $y = 0 \Leftrightarrow \rho \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0, \varphi = \pi$.

Области D в полярных координатах будет соответствовать область $\tilde{D}$:

$$\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \rho \le 2 \right\}.$$

Получим

$$\iint\limits_D \left(y^2 + x^2 \right) dx dy = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 \rho \, d\rho = \varphi \Big|_0^{\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = 4\pi ,$$

где множитель ρ в подынтегральной функции – якобиан перехода от декартовых координат к полярным.

Ответ. $\iint\limits_D \left(y^2 + x^2 \right) dx dy = 4\pi$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3477 – 3484, 3485 – 3497, 3498 – 3512, 3525 – 3535, 3536 – 3540.*

1.1.2. Применение двойных интегралов

Рассмотрим некоторые примеры применения двойного интеграла.

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью $D \subset Oxy$, равна

$$S_D = \iint\limits_D ds = \iint\limits_D dx dy . \qquad (1.1)$$

Объем тела $V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\}$ (D – проекция V на плоскость Oxy) вычисляется по формуле

$$V_T = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy. \tag{1.2}$$

Если $\gamma = \gamma(x, y)$ – поверхностная плотность плоской пластинки, ограниченной областью $D \subset Oxy$, то *масса* пластинки выражается двойным интегралом

$$m_D = \iint\limits_D \gamma(x, y)\,ds. \tag{1.3}$$

В случае однородной пластинки плотность γ = const.

Задача 1.6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4$.

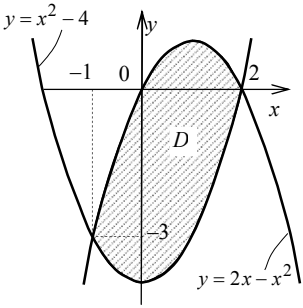


Рис. 1.6

Р е ш е н и е. Построим фигуру D (рис. 1.6), ограниченную следующими линиями:

а) $y = 2x - x^2$ или $y - 1 = -(x - 1)^2$ – уравнение параболы с вершиной в точке $(1, 1)$, ветви которой направлены вниз;

б) $y = x^2 - 4$ – уравнение параболы с вершиной в точке $(0, -4)$, ветви которой направлены вверх.

Параболы пересекаются в точках $(-1, 3)$ и $(2, 0)$ (точки пересечения находим, приравнивая правые части равенств $y = 2x - x^2$ и $y = x^2 - 4$, т.е. из уравнения $2x - x^2 = x^2 - 4$).

Область D является правильной в направлении каждой из координатных осей. Опишем ее с помощью неравенств как правильную в направлении оси Oy:

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -1 \le x \le 2, \quad x^2 - 4 \le y \le 2x - x^2 \right\}.$$

Вычислим площадь фигуры D:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-4}^{2x-x^2} dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(2x - 2x^2 + 4 \right) dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 11.$$

Принимая область D как правильную в направлении оси Ox, имеем $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -4 \le y \le -3, \quad -\sqrt{y+4} \le x \le \sqrt{y+4} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -3 \le y \le 0, \quad 1 - \sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{y+4} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 1, \quad 1 - \sqrt{1-y} \le x \le 1 + \sqrt{1-y} \right\}.$$

В этом случае площадь фигуры вычисляется с помощью трех интегралов по каждой из областей D_1, D_2 и D_3. Этот способ является более трудоемким, чем вычисление площади области D, правильной в направлении оси Oy.

Ответ. $S = 11$.

Задача 1.7. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x = 1$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $z = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Изобразим на рис. 1.7, *а* тело, ограниченное поверхностями:

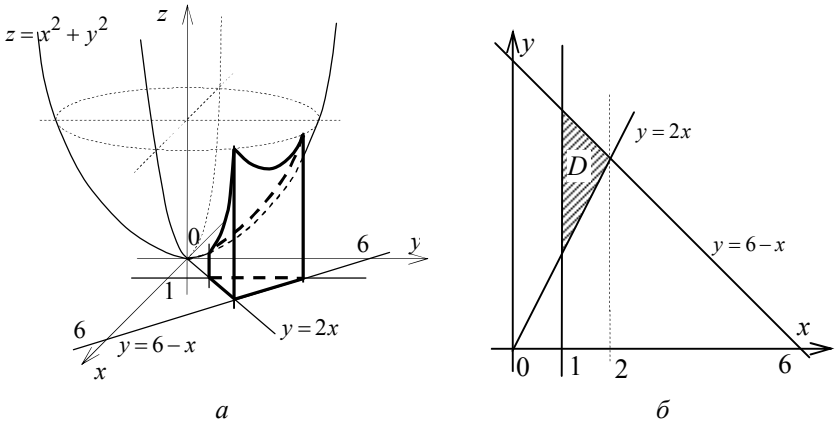
а) $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения с вершиной в точке $O(0, 0, 0)$ и осью, совпадающей с координатной осью Oz;

б) $x = 1$, $x + y = 6$, $y = 2x$ – плоскости, параллельные оси Oz;

в) $z = 0$ – плоскость Oxy.

Область, ограничивающая тело T, – правильная в направлении оси Oz, ее проекция на плоскость Oxy есть треугольник, образованный прямыми $x = 1$, $x + y = 6$ и $y = 2x$ (рис. 1.7, *б*). Опишем область интегрирования D с помощью неравенств как правильную в направлении оси Oy:

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 1 \le x \le 2, \quad 2x \le y \le 6 - x \right\}.$$



а *б*

Рис. 1.7

Объем тела T вычислим с помощью двойного интеграла:

$$V_T = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy,$$

где $f(x, y)$ – поверхность, ограничивающая сверху тело T (снизу тело ограничено плоскостью z), область D – проекция этого тела на плоскость Oxy.

$$V_T = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{2x}^{6-x} dx = \int\limits_1^2 \left(x^2 (6-x) + \frac{(6-x)^3}{3} - x^2 2x - \frac{8x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \left(-6x^3 + 12x^2 - 36x + 72\right)\Big|_1^2 = \frac{47}{2}.$$

Ответ. $V_T = \dfrac{47}{2}$.

Задача 1.8. Найти массу пластинки, определяемой неравенствами $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 3$, $y \le \dfrac{3}{2}x$ и $y \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, с заданной в каждой ее точке плотностью распределенного вещества $\gamma = \dfrac{x}{y}$.

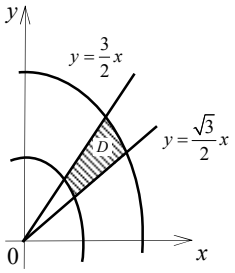


Рис. 1.8

Р е ш е н и е. Построим область D, которую занимает пластинка (рис. 1.8):

а) неравенства $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 3$ определяют эллиптическое кольцо;

б) неравенства $y \le \dfrac{3}{2}x$, $y \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ определяют часть плоскости, заключенной между прямыми $y = \dfrac{3}{2}x$ и $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

Массу плоской пластинки с плотностью распределения вещества $\gamma = \gamma(x, y)$ найдем с помощью интеграла $m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy$, где D – область, которую занимает пластинка. Двойной интеграл вычислим с помощью перехода к обобщенным полярным координатам:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

принимая $a = 2$ и $b = 3$. Якобиан преобразования декартовых координат в полярные в таком случае будет равен $|J| = ab\rho = 6\rho$.

Подынтегральная функция в обобщенных полярных координатах примет вид

$$\gamma = \frac{x}{y} = \frac{a\rho\cos\varphi}{b\rho\sin\varphi} = \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\varphi = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Область D опишем с помощью неравенств в обобщенных полярных координатах:

а) $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{4\rho^2\cos^2\varphi}{4} + \dfrac{9\rho^2\sin^2\varphi}{9} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \rho^2 \le 3$;

б) $y \le \dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow 3\rho\sin\varphi \le \dfrac{3}{2}2\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi \le 1 \Leftrightarrow \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$;

в) $y \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}x \Leftrightarrow 3\rho\sin\varphi \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}2\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi \ge \dfrac{\pi}{6}$,

следовательно, $\tilde{D} = \left\{(\rho,\varphi)\middle|\ \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4},\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}\right\}$ – область в обобщенных полярных координатах, соответствующая области D.

Переходя к повторному интегралу, найдем массу:

$$m = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{2\rho\cos\varphi}{3\rho\sin\varphi} 6\rho\, d\rho = \ln|\sin\varphi|\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \cdot 4\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\ln 2.$$

Ответ. $m = 2\ln 2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3597 – 3608, 3559 – 3595.*

1.2. Тройные интегралы

1.2.1. Вычисление тройных интегралов

В пространстве $Oxyz$ область $V \subset \mathbf{R}^3$ вида

$$V = \left\{(x,y,z)\middle|\ (x,y) \in D,\quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\right\},$$

где D – проекция множества V на плоскость Oxy, называется *правильной в направлении оси Oz*.

Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области V, правильной в направлении оси Oz, то

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

где повторный интеграл в правой части полученного выражения является результатом последовательного вычисления сначала интеграла по z при фиксированных x и y, а затем двойного интеграла по x, y.

Упростить вычисление тройного интеграла можно с помощью перехода от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим ρ, φ, z, связанным соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$$

($0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$ или $0 \le \rho < \infty,\ -\pi < \varphi \le \pi,$ $-\infty < z < +\infty$). Формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам имеет вид

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz,$$

где Ω – область в цилиндрических координатах, соответствующая области V; множитель ρ в подынтегральном выражении – якобиан преобразования $J = \rho$.

В некоторых случаях вычисление тройного интеграла удобно проводить, перейдя к сферическим координатам, связанным с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$$

($0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$). Формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Omega f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

где Ω – область в сферических координатах, соответствующая области V, $J = \rho^2\sin\theta$ – якобиан преобразования.

Задача 1.9. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{y}{1+z}\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $y = \sqrt{ax}$, $y = \sqrt{bx}$ $(b > a)$, $z = 0$, $z + x - 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Построим область V, ограниченную следующими поверхностями:

а) $y = \sqrt{ax}$, $y = \sqrt{bx}$ – уравнения цилиндрических поверхностей, содержащих ось Oz, с образующими, параллельными оси Oz (рис. 1.9, *а*);

б) $z + x - 2 = 0$ – плоскость, параллельная оси Oy (рис. 1.9, *б*);

в) $z = 0$ – плоскость Oxy.

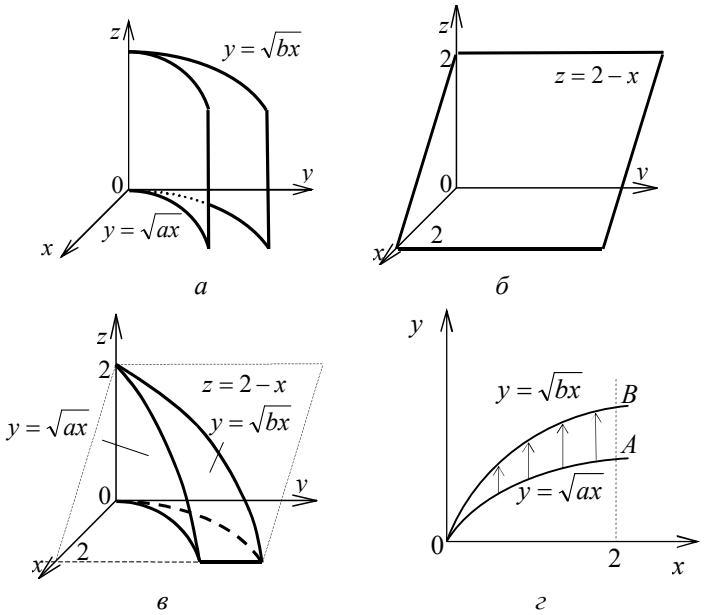


Рис. 1.9

Область V – правильная в направлении оси Oz (рис. 1.9, *в*), ее проекция D на плоскость Oxy есть криволинейный треугольник AOB (рис. 1.9, *г*) со сторонами OA, OB, AB, заданными уравнениями $y = \sqrt{ax}$, $y = \sqrt{bx}$, $x = 2$ соответственно. Уравнение линии AB на

плоскости Oxy получено из уравнения плоскости $z + x - 2 = 0$ при $z = 0$.

Области V и D запишем с помощью неравенств:

$$V = \left\{(x, y, z) \middle| \, (x, y) \in D, \quad 0 \le z \le -x + 2\right\},$$

$$D = \left\{(x, y) \middle| \, 0 \le x \le 2, \quad \sqrt{ax} \le y \le \sqrt{bx}\right\},$$

где область D – правильная в направлении оси Oy.

Вычислим тройной интеграл, перейдя к повторному:

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{-x+2} \frac{y}{1+z} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{bx}} ydy \int\limits_0^{-x+2} \frac{dz}{1+z} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{bx}} ydy \left(\ln|1+z| \Big|_0^{-x+2} \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{bx}} ydy \left(\ln|3-x| - \ln 1 \right) =$$

$$= \int\limits_0^2 \ln|3-x| dx \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{bx}} \right) = \frac{b-a}{2} \int\limits_0^2 x \ln|3-x| dx.$$

Последний интеграл вычислим по формуле интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

учитывая, что $\ln|3-x| = \ln(3-x)$ для $x \in [0;2]$.

Здесь $u = \ln(3-x) \Rightarrow du = -\dfrac{dx}{3-x}$; $dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$, следовательно,

$$I = \frac{b-a}{2}\int_0^2 x\ln|3-x|\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^2 x\ln(3-x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln(3-x)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2(3-x)}dx\right).$$

Для вычисления интеграла $\int_0^2 \frac{x^2}{2(3-x)}dx$ выделим целую часть дроби $\frac{x^2}{3-x}$, разделив многочлен числителя x^2 на многочлен знаменателя $(3-x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2 & x-3 \\ \underline{x^2-3x} & x+3 \\ -\,3x & \\ \underline{3x-9} & \\ 9 & \end{array}$$

имеем $\frac{x^2}{3-x} = -\left(x+3+\frac{9}{x-3}\right)$ и, продолжив вычисления, получим:

$$I = \frac{b-a}{4}\left(4\ln 1 + \int_0^2\left(x+3+\frac{9}{x-3}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(\frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3|\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{b-a}{4}(8 - 9\ln 3).$$

Ответ. $I = \frac{b-a}{4}(8-9\ln 3)$.

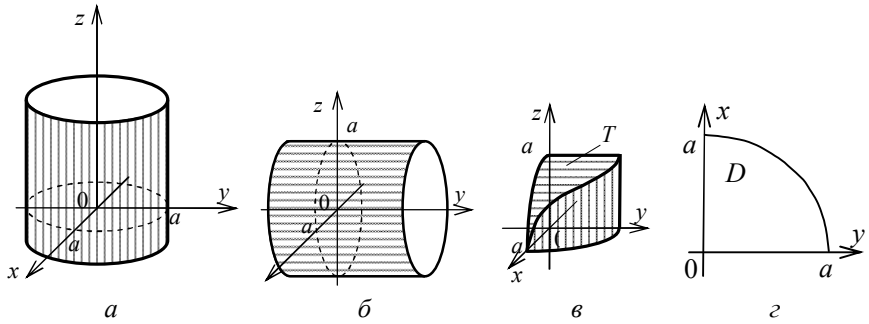
Задача 1.10. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, где область V задана следующей системой неравенств: $x^2 + y^2 \le a^2$, $x^2 + z^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Р е ш е н и е. Построим область V, ограниченную следующими поверхностями:

а) $x^2 + y^2 \le a^2$ – круговой цилиндр радиуса a с осью, совпадающей с координатной осью Oz (рис. 1.10, *а*);

б) $x^2 + z^2 \le a^2$ – круговой цилиндр радиуса a с осью, совпадающей с осью координат Oy (рис. 1.10, *б*);

в) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy соответственно (рис. 1.10, *в*).



а *б* *в* *г*

Рис. 1.10

Область V расположена в первом октанте (рис. 1.10, *в*) и является правильной в направлении оси Oz, ее проекцией на плоскость Oxy является четверть круга D радиуса a, расположенная в первом квадранте (рис. 1.10, *г*):

$$V = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D, \quad 0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\},$$

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

Вычислим тройной интеграл через повторный:

$$I = \int_0^a x\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} z\,dz = \int_0^a x\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x\left(a^2 - x^2\right)dx \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \right) = \frac{1}{4}\int_0^a x\left(a^2 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^2 d\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{8}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^2 d\left(a^2 - x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{\left(a^2 - x^2\right)^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^6}{24}.$$

Ответ. $I = \dfrac{a^6}{24}$.

Задача 1.11. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 8z$.

Р е ш е н и е. Построим область V, ограниченную следующими поверхностями:

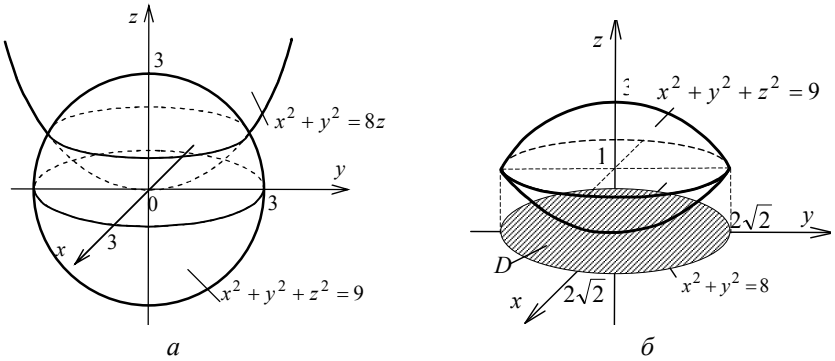
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ – сфера радиуса 3 с центром в точке $O(0, 0, 0)$ (рис. 1.11, *а*),

б) $x^2 + y^2 = 8z$ – параболоид вращения с вершиной в точке $O(0, 0, 0)$ и осью, совпадающей с координатной осью Oz (рис. 1.11, *а*).

Область V, расположенная в верхней полуплоскости и ограниченная сверху поверхностью сферы, снизу – параболоидом (рис. 1.11, *б*), является правильной в направлении оси Oz:

$$V = \left\{ (x,\ y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D,\quad \frac{x^2 + y^2}{8} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right\},$$

где D – проекция области V на плоскость Oxy.



а *б*

Рис. 1.11

Найдем уравнение границы области D, являющейся проекцией линии пересечения сферы и параболоида. Для этого разрешим относительно переменной z систему уравнений сферы и параболоида:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 8z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - z^2, \\ x^2 + y^2 = 8z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - z^2, \\ 9 - z^2 = 8z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - z^2, \\ z^2 + 8z - 9 = 0. \end{cases}$$

Корни уравнения $z^2 + 8z - 9 = 0$ – числа $z_1 = 1$ и $z_2 = -9$. Корень z_2 не удовлетворяет первому уравнению системы $x^2 + y^2 = 9 - z^2$, так как левая часть уравнения неотрицательна, а разность $9 - z_2^2 = 9 - 81 = -72 < 0$, следовательно, система уравнений сферы и параболоида равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ z = 1. \end{cases}$$

Следовательно, область $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 8 \right\}$ – окружность радиуса $\sqrt{8}$ с центром в начале координат $O(0, 0)$ (рис. 1.11, *б*). Так как неравенства, определяющие области V и D, содержат сумму квадратов $x^2 + y^2$, то вычисления удобнее провести в цилиндрической системе координат.

В цилиндрических координатах неравенство $\dfrac{x^2 + y^2}{8} \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, определяющее область V, примет вид

$$\frac{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}{8} \le z \le \sqrt{9 - (\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2}{8} \le z \le \sqrt{9 - \rho^2}\,.$$

Неравенство $x^2 + y^2 \le 8$, определяющее границы области D, преобразуется в $\rho^2 \le 8$ или $0 \le \rho \le \sqrt{8}$. Полученные неравенства определяют ограничения на ρ и z. На координату φ дополнительных ограничений нет и потому $0 \le \varphi \le 2\pi$. Таким образом, области V в декартовых координатах соответствует область

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi, z) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{8}, \quad \frac{\rho^2}{8} \le z \le \sqrt{9 - \rho^2} \right\}.$$

Подынтегральная функция в цилиндрических координатах имеет вид

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2\,.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz = \iiint\limits_\Omega \rho^2 \rho\, d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{8}}^{\sqrt{9-\rho^2}} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho^3 d\rho \left(z \left| \begin{matrix} \sqrt{9-\rho^2} \\ \\ \frac{\rho^2}{8} \end{matrix} \right. \right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho^3 \left(\sqrt{9-\rho^2} - \frac{\rho^2}{8} \right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho^3 \sqrt{9-\rho^2}\, d\rho - \int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho^3 \frac{\rho^2}{8} d\rho \right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(I_1 - I_2\right).$$

Найдем значения интегралов I_1 и I_2:

а) введем новую переменную $t = \sqrt{9-\rho^2}$, тогда $\rho = \sqrt{9-t^2}$ и $d\rho = -\dfrac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}$; так как $0 \le \rho \le \sqrt{8}$, то $\sqrt{9-0^2} \le t \le \sqrt{9-\left(\sqrt{8}\right)^2}$ или $3 \le t \le 1$.

$$I_1 = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{9-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \int\limits_3^1 \left(\sqrt{9-t^2}\right)^3 t \left(\frac{-t}{\sqrt{9-t^2}} \right) dt = \int\limits_1^3 \left(9-t^2\right)t^2\, dt = \int\limits_1^3 \left(9t^2 - t^4\right) dt =$$

$$= \left(\frac{9t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Bigg|_1^3 = \left(3 \cdot 27 - \frac{3^5}{5} \right) - \left(3 - \frac{1}{5} \right) = \frac{148}{5};$$

б) $I_2 = \int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{\rho^5}{8} d\rho = \frac{\rho^6}{48}\Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{8^3}{48} = \frac{32}{3}$.

Вычислив $I_1 - I_2 = \frac{148}{5} - \frac{32}{3} = \frac{284}{15}$, перейдем к решению исходного интеграла:

$$I = \frac{284}{15} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{284}{15}\left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{568}{15}\pi .$$

Ответ. $I = \frac{568}{15}\pi$.

Задача 1.12. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$, где область V ограничена поверхностями $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $a > 0$.

Р е ш е н и е. Построим область V, ограниченную следующими поверхностями:

а) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ – цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, направляющей является лемниската Бернулли;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ – сфера радиуса a с центром в точке $O(0, 0, 0)$;

в) $z = 0$ – плоскость Oxy.

Область V расположена в первом октанте ($z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) и является правильной в направлении оси Oz. Для определения проекции тела V на плоскость Oxy и построения цилиндрической поверхности перейдем к цилиндрической системе координат.

Уравнение поверхности $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ в цилиндрических координатах примет вид

$$\left((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2\right)^2 = a^2\left((\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^4 = a^2\rho^2\left(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

Так как ρ принимает только положительные значения, то

$$\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k\,,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$$

При $k = 0$ имеем $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, а так как область V расположена в первом октанте, то $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ преобразуется в цилиндрических координатах следующим образом:

$$(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow \rho^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z^2 = a^2 - \rho^2,$$

и для первого октанта $z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$.

Проекцией $z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$ сферы на плоскость Oxy $(z = 0)$ является круг, граница которого есть окружность радиуса a: $x^2 + y^2 = a^2$, или в цилиндрических координатах $\rho = a$.

Точки пересечения окружности $\rho = a$ и лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ найдем из решения уравнения $a = a\sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow \cos 2\varphi = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\varphi = 2\pi m \Rightarrow \varphi = \pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$. При $m = 0$ имеем $\varphi = 0$.

Итак, проекцией области V на плоскость $z = 0$ является область

$$\tilde{D} = \left\{(\rho,\ \varphi)\,\middle|\, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\quad 0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}\right\},$$

области V в цилиндрической системе координат соответствует область

$$\Omega = \left\{ (\rho,\ \varphi,\ z) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\quad 0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\varphi},\quad 0 \le z \le \sqrt{a^2 - \rho^2} \right\}.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \rho\, z\, d\varphi\, d\rho\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho \int\limits_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho \left(\frac{z^2}{2} \,\middle|_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/4} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 \left(a^2 - \rho^2 \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi \left(a^2 \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/4} \left(a^6 \frac{\cos^2 2\varphi}{4} - a^6 \frac{\cos^3 2\varphi}{6} \right) \left(-\frac{d\cos 2\varphi}{2} \right) =$$

$$= -\frac{a^6}{8} \left(\frac{\cos^3 2\varphi}{12} - \frac{\cos^4 2\varphi}{24} \right) \Bigg|_0^{\pi/4} = -\frac{a^6}{8 \cdot 24} \big(2(0-1) - (0-1) \big) = \frac{a^6}{192}.$$

Ответ. $I = \dfrac{a^6}{192}$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3547 – 3551.*

1.2.2. Применение тройных интегралов

Объем тела, занимающего область V, вычисляется по формуле

$$V_V = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V dxdydz . \qquad (1.4)$$

Если $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – объемная плотность массы тела, то *масса тела*, занимающего область V, равна

$$m_V = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dv . \qquad (1.5)$$

Для однородных тел плотность γ принимается постоянной.

Для тела, занимающего область V с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$ и массой m_V, *статические моменты относительно координатных плоскостей* вычисляются по формулам:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V \gamma x \, dV , \; M_{xz} = \iiint\limits_V \gamma y \, dV , \; M_{xy} = \iiint\limits_V \gamma z \, dV ; \qquad (1.6)$$

координаты центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m_V}, \; y_c = \frac{M_{xz}}{m_V}, \; z_c = \frac{M_{xy}}{m_V} . \qquad (1.7)$$

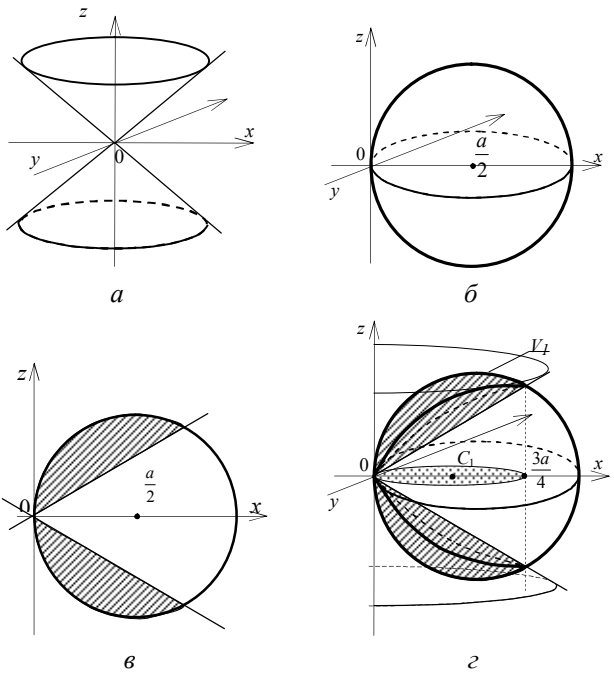
Задача 1.13. Найти объем части шара $x^2 + y^2 + z^2 \le ax$, находящейся внутри конуса $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Р е ш е н и е. Изобразим область V, которая ограничена поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 3z^2$ – конус с вершиной в точке $O(0, 0, 0)$ и осью, совпадающей с осью Oz (рис. 1.12, *а*);

б) $x^2 + y^2 + z^2 \le ax \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ – сфера радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $C\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ (рис. 1.12, *б*).

Область V не является правильной в направлении оси Oz (сечение области плоскостью Oxz отмечено штриховкой на рис. 1.12, *в*), поэтому представим $V = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 – симметричные части области над и под плоскостью Oxy соответственно. Схематически область V показана на рис. 1.12, *г*.



а *б* *в* *г*

Рис. 1.12

Исключив из уравнений сферы и конуса переменную z, получим $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}ax$ или $\left(x - \frac{3a}{8}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3a}{8}\right)^2$ – окружность на плоскости Oxy с центром в точке $C_1\left(\frac{3a}{8}, 0, 0\right)$ и радиуса $\frac{3a}{8}$ – проекция на плоскость Oxy линии пересечения конуса и сферы. Из геометрических

соображений следует, что интегрирование проще проводить в сферической системе координат, в которой данный конус является координатной поверхностью. Формула для вычисления объема (1.4) примет вид

$$V = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_\Omega \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

где Ω – область V в сферических координатах.

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ преобразуется к виду $\rho^2 = a\rho\cos\varphi\sin\theta \Rightarrow \rho = a\cos\varphi\sin\theta$. Так как $\rho \geq 0$, то

$$\cos\varphi\sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \geq 0, \\ \sin\theta \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos\varphi \leq 0, \\ \sin\theta \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{2}, \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Так как для сферических координат $\theta \in [0, \pi]$, то $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Уравнение конуса $x^2 + y^2 = 3z^2$ примет вид $\rho^2 \sin^2\theta = 3\rho^2\cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 3\left(1 - \sin^2\theta\right) \Rightarrow \sin^2\theta = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$ (при извлечении квадратного корня взяли только положительное значение, так как $\theta \in [0, \pi]$).

Зададим область V_1 в сферических координатах ρ, φ, θ:

$$\Omega_1 = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \rho \leq a\cos\varphi\sin\theta \right\}.$$

Вычислим объем тела, занимающего область V_1:

$$V_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\cos\varphi\sin\theta} \rho^2 d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{a\cos\varphi\sin\theta} \right) =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin^4\theta d\theta =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \cos^3\varphi d\varphi = \cos^2\varphi\left(\cos\varphi\, d\varphi\right) = \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi \\ \sin^4\theta = \left(\sin^2\theta\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\sin\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3} \left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/3} \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{12} \frac{4}{3} \int\limits_0^{\pi/3} \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4\theta\right)\right) d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{12} \frac{4}{3} \left(\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta \right) \right) \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{a^3}{9}\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{a^3}{9}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{a^3}{144}\left(8\pi - 9\sqrt{3}\right).$$

Ответ. $V = 2V_1 = \dfrac{a^3}{72}\left(8\pi - 9\sqrt{3}\right)$.

Задача 1.14. Вычислить объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Р е ш е н и е. Для вычисления объема эллипсоида воспользуемся формулой (1.4) и введем обобщенные сферические координаты:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\rho\cos\theta, \end{cases}$$

якобиан перехода от декартовых координат к обобщенным сферическим координатам равен $J = abc\rho^2\sin\theta$.

Уравнение эллипсоида в координатах (ρ,φ,θ) принимает вид $\rho = 1$, а области V, которую занимает эллипсоид, соответствует область $\tilde{V}$ в обобщенных сферических координатах:

$$\tilde{V} = \left\{(\rho,\varphi,\theta)\,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le \theta \le \pi,\, 0 \le \rho \le 1\right\}.$$

Вычисления дают:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{1}\rho^2 d\rho =$$

$$= abc\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{1}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Отметим, что в данном случае вычисление объема тела в обобщенных сферических координатах позволило избежать сложных вычислений тройного интеграла в декартовых координатах, а именно:

$$V = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\left(x^2/a^2\right)-\left(y^2/b^2\right)}}^{c\sqrt{1-\left(x^2/a^2\right)-\left(y^2/b^2\right)}} dz .$$

Ответ. $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

Задача 1.15. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $x + y = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.

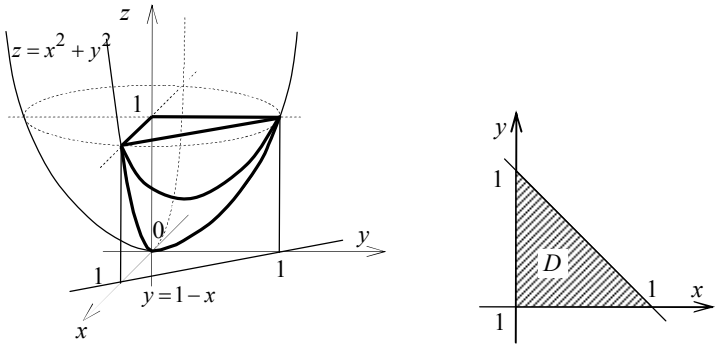
Р е ш е н и е. Построим область V, в которой содержится тело, ограниченное поверхностями (рис. 1.13, *а*):

а) $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения с вершиной в точке $O(0, 0, 0)$ и осью, совпадающей с координатной осью Oz;

б) $z = 1$ – плоскость, параллельная плоскости Oxy, проходящая через точку $B(0, 0, 1)$;

в) $x + y = 1$ – плоскость параллельная оси Oz;

г) $x = 0$ и $y = 0$ – координатные плоскости Oyz и Oxz соответственно.



а *б*

Рис. 1.13

Область V – правильная в направлении оси Oz, ее проекция D на плоскость Oxy есть треугольник AOB, в котором сторона OA задана уравнением $y = 0$, сторона OB – $x = 0$, сторона AB – $y = 1 - x$ (рис. 1.13, *б*).

Опишем области V и D с помощью неравенств:

$$V = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D, \quad x^2 + y^2 \le z \le 1 \right\},$$

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x \right\},$$

где область D – правильная в направлении осей Ox и Oy.

Для вычисления объема тела воспользуемся формулой (1.4) и перейдем к повторному интегралу:

$$V_V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(y\left(1 - x^2\right) - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{4x^3 - 6x^2 + 2}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4 - 2x^3 + 2x}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $V_V = \frac{1}{3}$.

Задача 1.16. Вычислить массу тела, определяемого неравенствами $z \ge 0$, $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, с заданной в каждой его точке функцией объемной плотности $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е. Построим область тела V (рис. 1.14):

а) неравенство $z \ge 0$ задает часть пространства, лежащую выше координатной плоскости Oxy;

б) $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ – область, заключенная между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ радиусов 2 и 3 соответственно.

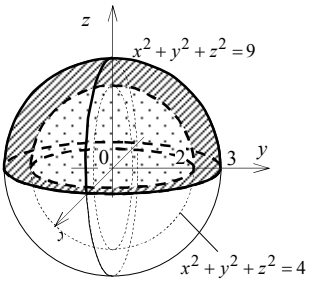


Рис. 1.14

Для вычисления массы воспользуемся формулой (1.5). Интеграл вычислим в сферических координатах.

Неравенство $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ в сферических координатах примет вид

$$4 \le (\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 +$$

$$+(\rho\cos\theta)^2 \le 9 \Leftrightarrow 4 \le \rho^2 \le 9 \Leftrightarrow 2 \le \rho \le 3.$$

Неравенство $z \ge 0$ в сферических координатах определит пределы изменения переменной θ: $\rho\cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow \rho \ge 0$ и $\cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Запишем область V с помощью полученных неравенств в сферических координатах:

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \,\middle|\, 2 \le \rho \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Функция плотности $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$ в сферических координатах:

$$\gamma = (\rho\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 = \rho^2\sin^2\theta,$$

$$\text{якобиан } J = \rho^2\sin\theta.$$

Вычислим массу тела, переходя от тройного интеграла к повторному:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \gamma(\rho, \varphi, \theta)|J|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2\sin^2\theta\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta \int\limits_2^3 \rho^4 d\rho = \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right)\left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta \right)\left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_2^3 \right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3^5 - 2^5}{5}\right)\int_0^{\pi/2}\left(-\sin^2\theta\right)d\cos\theta = \frac{422\pi}{5}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta - 1\right)d\cos\theta =$$

$$= \frac{422\pi}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{422\pi}{5}\frac{2}{3} = \frac{844}{15}\pi.$$

Ответ. $m = \dfrac{844}{15}\pi$.

Задача 1.17. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$ и $x^2 + y^2 = z + 2$, $z \le 0$.

Р е ш е н и е. Построим область тела V (рис. 1.15):

а) $x^2 + y^2 = z^2$ – конус с вершиной в точке $O(0,0,0)$ и осью, совпадающей с координатной осью Oz;

б) $x^2 + y^2 = z + 2$ – параболоид вращения с вершиной в точке $O(0,0,-2)$ и осью, совпадающей с координатной осью Oz;

в) неравенство $z \le 0$ задает часть пространства, лежащую ниже координатной плоскости Oxy.

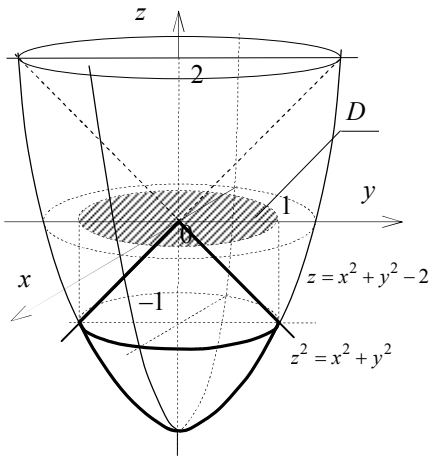


Рис. 1.15

Область V – правильная в направлении оси Oz. Найдем ее проекцию D на плоскость Oxy. Приравнивая правые части уравнений конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и параболоида $x^2 + y^2 = z + 2$, найдем значение z, при котором эти поверхности пересекаются: $z^2 = z + 2 \Leftrightarrow$ $z_1 = -1,\ z_2 = 2$. Подставляя значение $z_1 = -1$ (значение $z_2 = 2$ не подходит, так как $z \le 0$ по условию задачи) в любое из уравнений, получим уравнение линии, по которой пересекаются конус и параболоид. Следовательно, область D – круг с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом, равным 1. Область V в декартовых координатах имеет вид

$$V = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1,\quad x^2 + y^2 - 2 \le z \le -\sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Так как уравнения поверхностей, определяющих область V, содержат сумму квадратов координат $x^2 + y^2$, то вычисления рациональнее провести в цилиндрических координатах. Преобразуем неравенства, определяющие область V в цилиндрических координатах:

а) $x^2 + y^2 - 2 \le z \le -\sqrt{x^2 + y^2} \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2 \le z \le -\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - 2 \le z \le -\rho\,;$$

б) $x^2 + y^2 \le 1 \ \Leftrightarrow\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le 1 \ \Leftrightarrow\ \rho \le 1$,

имеем:

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi, z) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \rho \le 1,\quad \rho^2 - 2 \le z \le -\rho \right\}.$$

Координаты центра тяжести вычислим по формулам (1.7).

Масса тела равна

$$m_V = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2 - 2}^{-\rho} dz = 2\pi \int\limits_0^1 \left(-\rho^2 - \rho^3 + 2\rho \right) d\rho = \frac{5\pi}{6},$$

где плотность γ примем равной единице.

Статические моменты тела:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_{\rho^2-2}^{-\rho} dz = 0,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_{\rho^2-2}^{-\rho} dz = 0,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} \rho z \, d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \, d\rho \int\limits_{\rho^2-2}^{-\rho} z dz = -\frac{11\pi}{12}.$$

Таким образом, координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m_V} = 0, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m_V} = 0, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m_V} = -\frac{11\pi \cdot 6}{12 \cdot 5\pi} = -1{,}1.$$

Ответ. $(0,\ 0,\ -1{,}1)$ – координаты центра тяжести.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3609 – 3625.*

ГЛАВА 2
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Криволинейные интегралы первого рода (криволинейные интегралы по длине дуги)

2.1.1. Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $A(\alpha, y(\alpha))$, $B(\beta, y(\beta))$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\ y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx, \qquad (2.1)$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ – дифференциал дуги кривой $y = y(x)$.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует значение параметра $t = \alpha$, точке B – значение параметра $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),\,y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt\,, \qquad (2.2)$$

где $dl = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt$ – дифференциал дуги кривой.

Если кривая AB задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi\big)\sqrt{\rho(\varphi)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi\,, \qquad (2.3)$$

где $dl = \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi$ – дифференциал дуги кривой.

Задача 2.1. Вычислить $I = \int\limits_l \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где l – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Р е ш е н и е. Уравнение прямой, проходящей через точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$ согласно каноническому уравнению $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-0}{2-0}$ имеет вид $y = 2x$, $x \in [0,1]$. Дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}\,dx = \sqrt{1 + \big(2x\big)'^2}\,dx = \sqrt{1+4}\,dx = \sqrt{5}\,dx$. Подставляя полученные выражения в (2.1), вычисляем интеграл:

$$I = \int\limits_l \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2 + 4}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Ответ. $I = \ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 2.2. Вычислить $I = \int\limits_l \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, где l – часть спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиусом R с центром в точке $O(0,0)$.

Р е ш е н и е. Вычислим интеграл с помощью формулы (2.3). Найдем пределы интегрирования, для этого приравняем правые части уравнений спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$ и окружности $\rho = R$: $2\varphi = R$, откуда $\varphi = \frac{R}{2}$. Дифференциал дуги $\rho = 2\varphi$ равен $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi =$ $= \sqrt{4\varphi^2 + 4}\,d\varphi$. Подынтегральную функцию выразим в полярных координатах, связанных с декартовыми координатами соотношениями: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, и вычислим интеграл:

$$I = \int\limits_0^{R/2} \operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\sqrt{(2\varphi)^2 + 2^2}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{R/2} \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{R/2} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,d\left(\varphi^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\varphi^2 + 1\right)^{3/2}\Bigg|_0^{R/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{R^2}{4} + 1\right)^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{\left(R^2 + 4\right)^{3/2} - 8}{12}.$$

Ответ. $I = \dfrac{\left(R^2 + 4\right)^{3/2} - 8}{12}$.

Задача 2.3. Вычислить $I = \int\limits_l y\,dl$, где l – дуга окружности; $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Р е ш е н и е. Вычислим интеграл с помощью формулы (2.2), учитывая, что $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$:

$$I = \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt == -\cos t \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2 .$$

Ответ. $I = 2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3770 – 3775.*

2.1.2. Применение криволинейных интегралов первого рода

Длина дуги кривой AB вычисляется по формуле

$$L = \int_{AB} dl , \tag{2.4}$$

где dl – дифференциал дуги кривой.

Если функция $\mu(x, y)$ определяет плотность вещества в точке (x, y) кривой AB, то масса M кривой AB вычисляется по формуле

$$M = \int_{AB} \mu(x, y)\, dl . \tag{2.5}$$

Задача 2.4. Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$ между точками ее пересечения с прямой $x + y = 2$.

Р е ш е н и е. Вычислим длину дуги с помощью формулы (2.4). Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 , \; x_2 = 1 .$$

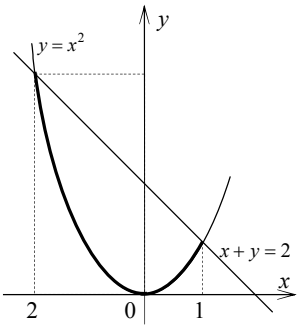


Рис. 2.1

Дифференциал дуги параболы $y = x^2$:

$$dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(\left(x^2\right)'\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx,$$

следовательно,

$$L = \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right|\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{17} + \ln\sqrt[4]{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{17} - 4}}.$$

Ответ. $L = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{17} + \ln\sqrt[4]{\dfrac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{17} - 4}}$.

Задача 2.5. Найти массу четверти окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, расположенной в первом квадранте, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату ординаты этой точки.

Р е ш е н и е. Для вычисления массы кривой воспользуемся формулой (2.5). Если $M(x, y)$ – точка на кривой l, то по условию задачи плотность вещества в точке M равна $\mu(x, y) = y^2$. Параметр t для четверти окружности изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Дифференциал дуги окружности

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,dt = dt.$$

Вычислим интеграл:

$$m = \int\limits_l y^2 dl = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $m = \dfrac{\pi}{4}$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3784 – 3788.*

2.2. Криволинейные интегралы второго рода (криволинейные интегралы по координатам)

2.2.1. Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода также сводится к вычислению определенного интеграла. Предположим, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой AB, тогда имеют место следующие утверждения.

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $A(\alpha, y(\alpha))$, $B(\beta, y(\beta))$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x\right)dx . \quad (2.6)$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует значение параметра $t = \alpha$, точке B – значение параметра $t = \beta$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t\right)dt \ . \quad (2.7)$$

Если кривая AB задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция,

для вычисления криволинейного интеграла второго рода по кривой AB применяется формула (2.7) при следующей параметризации кривой: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$.

Если AB – пространственная кривая, которая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, то криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

вычисляется по формуле

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x_t' + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y_t' + \\ + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z_t' \Big)dt . \qquad (2.8)$$

Задача 2.6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{AB} (xy - 1)dx + x^2 ydy$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$:

а) по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$;

б) по прямой $2x + y = 2$;

в) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$.

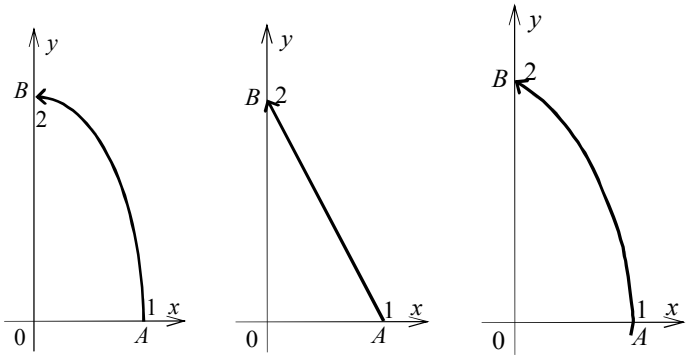
Р е ш е н и е. а) Вычислим интеграл по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ (рис. 2.2, *а*) от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$, применяя формулу (2.7). Координаты точек A и B соответствуют значениям параметра $t_1 = 0$ и $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$ соответственно. Учитывая, что $x_t' = -\sin t$, $y_t' = 2\cos t$, получим:

$$I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \Big((\cos t\, 2\sin t - 1)(-\sin t) + \cos^2 t\, 2\sin t\, 2\cos t \Big)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(-2\cos t \sin^2 t + \sin t + 4\cos^3 t \sin t \Big)dt =$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, d(\sin t) + \int_0^{\pi/2} \sin t dt - 4\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\, d(\cos t) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\sin^3 t - \cos t - \cos^4 t \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$



а *б* *в*

Рис. 2.2

б) Кривая интегрирования задана уравнением $2x + y = 2$ (рис. 2.2, *б*), откуда $y = 2 - 2x$ и $y' = -2$. Вычислим интеграл, применяя формулу (2.6):

$$I = \int_1^0 \Big(x(2 - 2x) - 1 + x^2 (2 - 2x)(-2) \Big) dx =$$

$$= \int_1^0 \Big(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \Big) dx =$$

$$= \Big(x^4 - 2x^3 + x^2 - x \Big)\Big|_1^0 = 1.$$

в) Вычислим криволинейный интеграл I по дуге параболы $4x + y^2 = 4$ (рис. 2.2, *в*). Разрешим уравнение параболы относительно

переменной x: $x = 1 - \dfrac{y^2}{4}$ и $dx = -\dfrac{y}{2}dy$. Пределы интегрирования определим из ординат точек A и B: $y_A = 0$, $y_B = 2$:

$$I = \int_0^2 \left(\left(y\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) - 1 \right)\left(-\frac{y}{2}\right) + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 y \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4} \right)\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{5}.$$

Ответ. а) $I = \dfrac{4}{3}$; б) $I = 1$; в) $I = -\dfrac{1}{5}$.

Задача 2.7. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_l ydx + zdy + xdz$, если l: а) отрезок CO; б) ломаная $OABC$ (рис. 2.3), где $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C(a, a, a)$, $O(0, 0, 0)$.

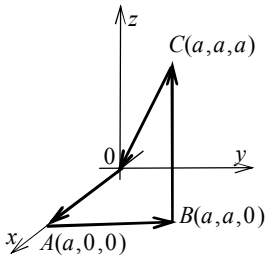


Рис. 2.3

Решение. а) Запишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $C(a, a, a)$ и $O(0, 0, 0)$:

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y - a}{-a} = \frac{z - a}{-a} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -at + a,\ y = -at + a,\ z = -at + a.$$

Координаты точки C соответствуют значению параметра $t_1 = 1$, координаты точки O – значению $t_2 = 0$. Заметим, что $x(t) = y(t) = z(t) = -at + a$ и $x'(t) = y'(t) = z'(t) = -a$, следовательно,

$$I = -3a\int_1^0 (a - at)\,dt = -3a^2\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^0 = \frac{3}{2}a^2 .$$

б) Ломаная $OABC$ (рис. 2.3) состоит из трех отрезков:

$$OA = \{y = 0,\ z = 0,\ 0 \le x \le a\};\ AB = \{x = a,\ z = 0,\ 0 \le y \le a\};$$

$$BC = \{x = a,\ y = a,\ 0 \le z \le a\}.$$

Применив свойство аддитивности криволинейного интеграла, вычислим интеграл I на каждом из участков ломаной $OABC$:

$$I_{OA} = \int_{OA} ydx + zdy + xdz = \int_0^a 0dx = 0,$$

$$I_{AB} = \int_{AB} ydx + zdy + xdz = \int_0^a 0dy = 0,$$

$$I_{BC} = \int_{BC} ydx + zdy + xdz = \int_0^a (a \cdot 0 + a \cdot 0 + a\,dz) = az\Big|_0^a = a^2 .$$

Таким образом, $I = I_{OA} + I_{AB} + I_{BC} = 0 + 0 + a^2 = a^2$.

Ответ. а) $I = \frac{3}{2}a^2$; б) $I = a^2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3806 – 3821.*

2.2.2. Формула Остроградского–Грина

Теорема 2.1. *Пусть:* 1) *функции* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в открытой односвязной области* $G \subset Oxy$; 2) l *– кусочно-гладкий контур, ограничивающий область* $D \subset G$, *и при положительном обходе* l *ближайшая часть области* D *находится слева от наблюдателя. Тогда справедлива формула*

$$\oint_l P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy , \qquad (2.9)$$

– формула Остроградского–Грина.

Задача 2.8. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_l \left(y + x^5 \right) dx + \left(3x + y^8 \right) dy$, где контур l образован линиями $x^2 + y^2 = R^2$ и $y = 0$ ($y > 0$), контур обходится: а) по движению часовой стрелки, б) против движения часовой стрелки.

Р е ш е н и е. По условию задачи $P(x, y) = y + x^5$, $Q(x, y) = 3x + y^8$, так как $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 3$, то функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ дифференцируемы и их частные производные непрерывны на всей плоскости Oxy, следовательно, для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой (2.9). Контур l ограничивает область D, являющуюся верхней половиной круга радиусом R с центром в точке $(0, 0)$:

$$D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

Если контур обходится против движения часовой стрелки, то

$$I = \iint_D (3 - 1) dx dy .$$

Полученный интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, в которых область D примет вид:

$$\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \rho \le R \right\}.$$

Итак,

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} 2\rho \, d\rho = \pi \rho^2 \Big|_0^R = \pi R^2 .$$

Если контур l обходится по движению часовой стрелки (контур не будет положительно ориентированным), то $I = -\pi R^2$, так как при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на противоположный.

Ответ. а) $I = -\pi R^2$; б) $I = \pi R^2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3822 – 3827.*

2.2.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Теорема 2.2. *Если функции* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой односвязной области V, то равносильны следующие четыре утверждения*:

1) $\int\limits_l Pdx + Qdy + Rdz = 0$, где l *– замкнутый контур, лежащий внутри* V;

2) $\int\limits_l Pdx + Qdy + Rdz$ *не зависит от выбора пути интегрирования*;

3) *подынтегральное выражение* $Pdx + Qdy + Rdz$ *есть полный дифференциал некоторой функции* $u(x, y, z)$;

4) *выполняются равенства:* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$.

Функцию $U(x, y, z)$ *можно найти, используя формулу*

$$U(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz + C, \qquad (2.10)$$

где (x_0, y_0, z_0) *– некоторая фиксированная точка области* V; C *– произвольная постоянная.*

Задача 2.9. Убедиться, что выражение $4\left(x^2 - y^2\right)x\,dx - -4\left(x^2 - y^2\right)y\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,\ y)$, и найти ее.

Р е ш е н и е. Проверим выполнение равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4\left(x^2 - y^2\right)x\right) = -8xy\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-4\left(x^2 - y^2\right)y\right) = -8xy\,.$$

Следовательно, $4\left(x^2 - y^2\right)x\,dx - 4\left(x^2 - y^2\right)y\,dy = dU(x, y)$. Для определения функции $U(x,\ y)$ воспользуемся формулой (2.10), принимая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$:

$$U(x,\ y) = \int_0^x 4\left(x^2 - 0\right)x dx + \int_0^y (-4)\left(x^2 - y^2\right)y dy =$$

$$= 4\int_0^x x^3 dx - 4\int_0^y \left(x^2 y - y^3\right)dy =$$

$$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + C\,.$$

Ответ. $U(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + C$.

Задача 2.10. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_l y\cos x\,dx + +\sin x\,dy$ по дуге окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 2$.

Р е ш е н и е. Здесь $P(x, y) = y\cos x$, $Q(x, y) = \sin x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} =$ $= \cos x$, следовательно, согласно теореме 2.2, $I = 0$.

Ответ. $I = 0$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3845 – 3852, 3855 – 3860.*

Задача 2.11. Вычислить $I = \int\limits_{(1;\,1)}^{(2;\,3)} (2x + 3y)dx + (y + 3x)dy$.

Р е ш е н и е. Интеграл не зависит от пути интегрирования, так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y) = 3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 3x) = 3$ на всей плоскости Oxy. Выберем в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны осям координат (рис. 2.4). Имеем на первом участке $y = 1$, $dy = 0$, $1 \le x \le 2$, на втором участке $x = 2$, $dx = 0$, $1 \le y \le 3$. Следовательно,

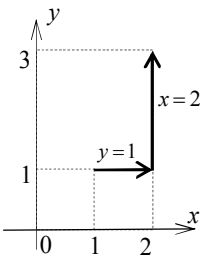


Рис. 2.4

$$I = \int_1^2 (2x + 3 \cdot 1)dx + \int_1^3 (y + 3 \cdot 2)dy =$$

$$= \left(x^2 + 3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6y\right)\Big|_1^3 = 22.$$

Решим задачу другим способом. Так как подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,\ y)$, то

$$I = U(x, y)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)} = U(2, 3) - U(1, 1).$$

Найдем функцию $U(x,\ y)$, используя формулу (2.10), в которой $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$U(x,\ y) = \int_0^x (2x + 0)dx + \int_0^y (y + 3x)dy =$$

$$= x^2\Big|_0^x + \left(\frac{y^2}{2} + 3xy\right)\Big|_0^y + C = x^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy + C.$$

Таким образом,

$$I = \left(x^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy + C \right) \Bigg|_{(1,1)}^{(2,3)} = 4 + \frac{9}{2} + 18 - 1 - \frac{1}{2} - 3 = 22 .$$

Ответ. $I = 22$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3810 – 3812, 3820.*

2.2.4. Применение криволинейных интегралов второго рода

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой кривой l, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_l x dy - y dx , \qquad (2.11)$$

при этом кривая l обходится против часовой стрелки.

Переменная сила $\mathbf{F} = \{P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)\}$ при перемещении материальной точки вдоль пространственной кривой l производит работу, которая вычисляется по формуле

$$A = \int_l P dx + Q dy + R dz . \qquad (2.12)$$

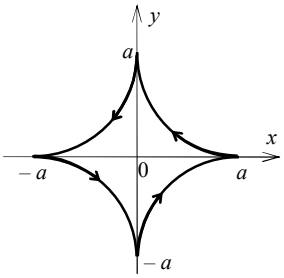


Рис. 2.5

Задача 2.12. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $x = a\sin^3 t$.

Р е ш е н и е. При прохождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π (рис. 2.5). Применим формулу (2.11), учитывая, что $dx = 3a\sin^2 t \cos t\, dt$, $dy = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Ответ. $S = \dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Задача 2.13. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = \{z, x, y\}$ вдоль кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$.

Р е ш е н и е. Работа силового поля $\mathbf{F} = \{z, x, y\}$ согласно формуле (2.12) равна криволинейному интегралу

$$A = \int_l z\,dx + x\,dy + y\,dz,$$

который приводим к определенному интегралу по параметру t при $0 \le t \le 1$ и $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2 dt$:

$$A = \int_0^1\left(t^3 + t2t + t^2 3t^2\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{91}{60}.$$

Ответ. $A = \dfrac{91}{60}$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3861 – 3868, 3869 – 3875.*

2.3. Поверхностные интегралы первого рода (интегралы по площади поверхности)

2.3.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} – проекции поверхности S, заданной уравнением $z = z(x, y)$, на плоскость Oxy:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x, y, z(x, y)\right)\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,. \quad (2.13)$$

Отметим, что если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{D_{xz}} f\left(x,\ y(x, z),\ z\right)\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2}\,dxdz\,,$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_{D_{yz}} f\left(x(y, z),\ y,\ z\right)\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + \left(x'_z\right)^2}\,dydz\,,$$

где области D_{xz} и D_{yz} – проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно.

Задача 2.14. Вычислить $I = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right)ds$, где S – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Р е ш е н и е. По условию задачи $z \geq 0$, значит, поверхность задана уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 2.6). Вычислим интеграл по формуле (2.13):

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy,$$

следовательно,

$$I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{2}\,dxdy,$$

где область $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ – пересечение части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 1$. Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах:

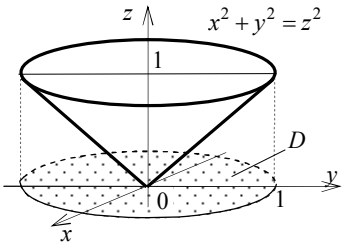


Рис. 2.6

$$I = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\,\rho\,d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

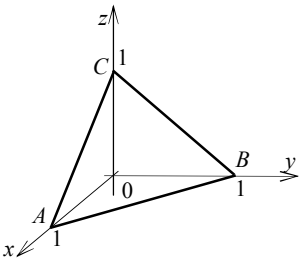


Рис. 2.7

Задача 2.15. Вычислить $I = \iint\limits_S x\,dS$, где S – полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x + y + z = 1$.

Р е ш е н и е. Полная поверхность S тетраэдра состоит из четырех граней: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, где $S_1 = \Delta AOB$, $S_2 = \Delta AOC$, $S_3 = \Delta BOC$, $S_4 = \Delta ABC$ (рис. 2.7). Выпи-

шем уравнения каждой из граней тетраэдра и вычислим для них элементы dS:

а) $S_1: z = 0$, $dS = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy = dxdy$;

б) $S_2: y = 0$, $dS = \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2}\,dxdz = dxdz$;

в) $S_3: x = 0$, $dS = \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + \left(x'_z\right)^2}\,dydz = dydz$;

г) $S_4: x = 1 - z - y$, $dS = \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + \left(x'_z\right)^2}\,dydz = \sqrt{3}dydz$.

Так как уравнения поверхностей заданы в явном виде, то определены плоскости, на которые проектируются эти поверхности: грань S_1 проектируется на плоскость Oxy, грань S_2 – на Oxz, грани S_3 и S_4 – на Oyz. Пусть D_i – области, на которые проектируются грани S_i, $i = 1,...,4$, тогда по свойству аддитивности поверхностного интеграла имеем:

$$I = \iint\limits_{S_1} x\,dS + \iint\limits_{S_2} x\,dS + \iint\limits_{S_3} x\,dS + \iint\limits_{S_4} x\,dS =$$

$$= \iint\limits_{D_1} xdydx + \iint\limits_{D_2} xdxdz + \iint\limits_{D_3} 0dydz + \iint\limits_{D_4} (1 - y - z)dydz,$$

где в двойных интегралах в подынтегральной функции независимые переменные (переменные из области D_i) остаются без изменения, зависимая переменная заменяется из явного уравнения соответствующей поверхности. Вычислим двойные интегралы:

$$D_1 = \left\{(x, y)\middle|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\right\},$$

$$\iint\limits_{D_1} xdxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} dy = \int\limits_0^1 x(1 - x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$D_2 = \{(x,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1-x\},\ \iint\limits_{D_2} x\,dx\,dz = \frac{1}{6},$$

так как вычисление интеграла по области D_1 аналогично вычислению интеграла по области D_2;

$$D_3 = D_4 = \{(y,z) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1-y\},$$

$$\iint\limits_{D_3} 0\,dy\,dz = 0;$$

$$\iint\limits_{D_4} (1-y-z)\sqrt{3}\,dy\,dz = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-z)\,dz =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^1 dy\,(1-y-z)^2\Big|_{z=0}^{z=1-y} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^1 (1-y)^2\,dy = -\frac{\sqrt{3}}{6}(1-y)^3\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.

Ответ. $I = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3876 – 3884.*

2.3.2. Применение поверхностных интегралов первого рода

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D, в которой $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$ – непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy. \qquad (2.14)$$

Масса поверхности S с заданной в каждой ее точке плотностью распределения массы $\mu = \mu(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_S \mu(x, y, z)\, dS\,. \tag{2.15}$$

Задача 2.16. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ при $z \geq 0$.

Р е ш е н и е. Вычислим площадь поверхности, используя формулу (2.14). Изобразим поверхность на чертеже (рис. 2.8) и запишем ее с помощью неравенств

$$S = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D,\quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

где $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = Rx\right\}$ – проекция поверхности на плоскость Oxy.

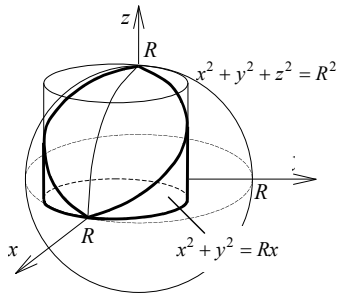


Рис. 2.8

Так как поверхность сферы, расположенная внутри цилиндра, симметрична относительно плоскости Oxz, и

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,,\quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,,$$

то площадь поверхности будет

$$S = 2R \iint\limits_{\tilde{D}} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,,$$

где $\tilde{D}$ – половина области D, соответствующая $y \geq 0$. Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах. Так как уравнению окружности $x^2 + y^2 = Rx$ соответствует уравнение $\rho = R\cos\varphi$ в полярных координатах, то область $\tilde{D}$ примет вид

$$\tilde{D}' = \left\{(\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq \rho \leq R\cos\varphi\right\},$$

и площадь поверхности

$$S = 2R\iint\limits_{\tilde{D}'} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -R\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \left(R^2 - \rho^2\right)^{-1/2} d\left(R^2 - \rho^2\right) =$$

$$= -2R\int\limits_0^{\pi/2} \left(R^2 - \rho^2\right)^{1/2}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = 2R^2\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin\varphi) d\varphi = R^2(\pi - 2).$$

Ответ. $S = R^2(\pi - 2)$.

Задача 2.17. Найти массу полусферы радиуса R при $z \geq 0$, если в каждой точке поверхности плотность $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е. Вычислим массу заданной поверхности по формуле (2.15). Спроектируем поверхность полусферы, уравнение которой $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, на плоскость Oxy и получим область интегрирования D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

$$m = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy =$$

$$= R\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам:

$$m = R\iint\limits_D \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}d\rho = 2\pi R\int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}d\rho$$

и произведем вычисления полученного интеграла с помощью подстановки $\rho = R\sin t$, тогда $d\rho = R\cos t\,dt$ и пределы интегрирования $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{R^2\sin^2 t}{R\cos t}\,R\cos t\,dt = R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{R^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Следовательно, $m = 2\pi R\dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{\pi^2 R^3}{2}$.

Ответ. $m = \dfrac{\pi^2 R^3}{2}$.

2.4. Поверхностные интегралы второго рода (поверхностные интегралы по координатам)

2.4.1. Вычисление поверхностных интегралов второго рода

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} – проекции поверхности S, заданной уравнением $z = z(x, y)$, на плоскость Oxy:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} f\left(x, y, z(x, y)\right)dxdy. \qquad (2.16)$$

Отметим, что если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} f\big(x, y(x, z), z\big)dxdz ,$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} f\big(x(y, z), y, z\big)dydz ,$$

где области D_{xz}, D_{yz} – проекции поверхности S на плоскость Oxz, Oyz соответственно. Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности S: знак плюс берется, если нормаль к поверхности образует с осью Oy острый угол, а знак минус – если тупой угол.

Если S – гладкая двусторонняя поверхность, ориентация которой характеризуется нормалью $\mathbf{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \pm\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функции, определенные и непрерывные на S, то поверхностные интегралы первого и второго рода связаны соотношением

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdy + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_S \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)dS . \qquad (2.17)$$

Задача 2.18. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, где S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ – положительная (внешняя) сторона сферы при $z = 0$.

Р е ш е н и е. Положительная сторона поверхности $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ характеризуется нормальным вектором $\mathbf{n} = \{-z'_x, -z'_y, +1\}$, угол между этим вектором и положительным направлением Oz является острым. Проекция поверхности S есть область $D = \{(x, y)\,|\,x^2 + y^2 \le R^2\}$ – круг радиуса R с центром в начале координат. По формуле (2.16) име-

ем $I = \iint\limits_D x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$. Для вычисления полученного двойного интеграла переходим к полярным координатам, в которых область интегрирования D имеет вид $\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \middle| \, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le R \right\}$:

$$I = \iint\limits_{\tilde{D}} \rho^5 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = I_1 \cdot I_2 ,$$

где $I_1 = \int\limits_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho$, $I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$.

Интеграл I_1 вычислим с помощью подстановки $\sqrt{R^2 - \rho^2} = t$, откуда $\rho^2 = R^2 - t^2$, и $t_1 = R^2$, $t_2 = 0$ – пределы интегрирования:

$$I_1 = \int\limits_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho = -\frac{1}{2} \int\limits_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{R^2}^0 \left(R^2 - t^2 \right)^2 t^2 dt = \frac{8R^7}{105};$$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{8} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно имеем $I = I_1 \cdot I_2 = \dfrac{2\pi R^7}{105}$.

Ответ. $I = \dfrac{2\pi R^7}{105}$.

Задача 2.19. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S 2y^2 dydz + x^2 dxdz - 4z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной плоскостью $z = 2$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл можно вычислить двумя способами. Первый способ – вычислить три поверхностных интеграла второго рода, составляющих данный поверхностный интеграл. Второй способ, которым и вычислим данный интеграл, состоит в использовании связи между поверхностными интегралами первого и второго рода (2.17). Внешняя сторона поверхности S характеризуется нормальным вектором, который составляет тупой угол с положительным направлением оси Oz (рис. 2.9):

$$\mathbf{n} = \left\{z'_x, z'_y, -1\right\} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1\right\}.$$

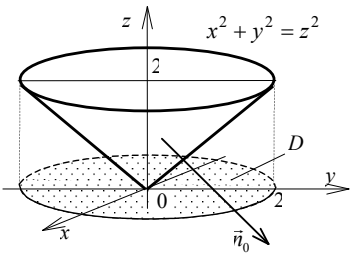


Рис. 2.9

Так как модуль вектора $|\mathbf{n}| = \sqrt{\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$, то для единичного нормального вектора $\mathbf{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

По формуле (2.17) имеем:

$$I = \iint\limits_S \left(2y^2 \cos\alpha + x^2 \cos\beta - 4z^2 \cos\gamma\right) dS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_S \left(\frac{2y^2 x + x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4z^2\right) dS.$$

Так как проекция поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной плоскостью $z = 2$, на плоскость Oxy есть область $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 4\right\}$, $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy = \dfrac{dx\, dy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{2}\, dx\, dy$, то по формуле вычисления поверхностного интеграла первого рода (2.13) имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_D \left(\frac{2y^2 x + x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4(x^2 + y^2) \right) \sqrt{2} dx dy .$$

Полученный двойной интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам, в которых область интегрирования примет вид $\tilde{D} = \left\{(\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2\right\}$:

$$I = \iint\limits_{\tilde{D}} \left(2\rho^2 \sin^2\varphi \cos\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi \sin\varphi + 4\rho^2 \right) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \left(2\sin^2\varphi \cos\varphi + \cos^2\varphi \sin\varphi + 4 \right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2 \right) \left(\frac{2}{3}\sin^3\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3} + 4\varphi \right)\bigg|_0^{2\pi} = 32\pi .$$

Ответ. $I = 32\pi$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3887 – 3893.*

2.4.2. Формула Остроградского – Гаусса

Интеграл по замкнутой поверхности S можно преобразовать в тройной интеграл по области V, ограниченной этой поверхностью, по формуле Остроградского–Гаусса:

$$\iint\limits_S P dydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz , \quad (2.18)$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ *непрерывны в области* G *вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Задачи 2.20. По формуле Остроградского–Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \iint\limits_S 4x^3 dydz + 4y^3 dxdy - 6z^4 dxdy$, где S – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

Р е ш е н и е. По условию задачи имеем $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$, их частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2, \frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3 .$$

Применяя формулу (2.18), получим

$$I = 12 \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 - 2z^3 \right) dxdydz ,$$

где область $V = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D,\ 0 \le z \le h \right\}$, $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le a^2 \right\}$.

Полученный тройной интеграл вычислим, перейдя к цилиндрическим координатам, в которых область V примет вид $\tilde{V} = \left\{ (\rho, \varphi, z) \,\middle|\, (\rho, \varphi) \in \tilde{D},\ \ 0 \le z \le h \right\}$, где $\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le a \right\}$. Итак:

$$I = 12\iint\limits_{\tilde{D}} dxdy \int\limits_0^h \left(x^2 + y^2 - 2z^3\right)dz = 12\iint\limits_{\tilde{D}} \left[\left(x^2 + y^2\right)z - \frac{z^4}{2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=h} dxdy =$$

$$= 12\iint\limits_{\tilde{D}} \left(\rho^2 h - \frac{h^4}{2}\right)\rho d\varphi d\rho =$$

$$= 12h\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\rho^3 - \frac{h^3}{2}\rho\right)d\rho = 6\pi a^2 h(a^2 - h^3)\,.$$

Ответ. $I = 6\pi a^2 h(a^2 - h^3)\,.$

• *Рекомендуем решить задачи: № 3896 – 3900.*

ГЛАВА 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

3.1.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, где $M_1(x)$, $M_2(x)$, $N_1(y)$, $N_2(y)$ – заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. Уравнение с разделяющимися переменными может быть записано в виде $y' = f(x)\,g(y)$.

Задача 3.1. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+1)^3\,dy - (y-2)^2\,dx = 0\,.$$

Р е ш е н и е . Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, где $M_1(x) = 1$, $M_2(x) = (x+1)^3$, $N_1(y) = -(y-2)^2$, $N_2(y) = 1$. Разделим переменные, разделив обе части уравнения на $(x+1)^3(y-2)^2$:

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0 \text{ или } \frac{dy}{(y-2)^2} = \frac{dx}{(x+1)^3}\,.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{dy}{(y-2)^2}=\frac{dx}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{(y-2)}=\frac{-1}{2(x+1)^2}+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{(y-2)}=\frac{1}{2(x+1)^2}+C\,.$$

При делении обеих частей уравнения на $(x+1)^3(y-2)^2$ необходимо потребовать, чтобы $x+1\neq 0$ и $y-2\neq 0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $x=-1$ и $y=2$ являются решениями и ни при каких значениях параметра C не могут быть получены из общего интеграла:

$$\frac{1}{(y-2)}=\frac{1}{2(x+1)^2}+C \ \Leftrightarrow \ y=2+\frac{2\left(x+1\right)^2}{2C\left(x+1\right)^2+1}\neq 2 \quad \forall C\in \mathbf{R}\,.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{(y-2)}=\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$ – общий интеграл уравнения, $y=2$ – особое решение.

Ответ. Общий интеграл уравнения $\dfrac{1}{(y-2)}=\dfrac{1}{2(x+1)^2}+C$.

Задача 3.2. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{1}{\cos^2 x\cos y}dx+\operatorname{ctg}x\sin y\,dy=0\,.$$

Р е ш е н и е. Рассматриваемое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, где $M_1\left(x\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $N_1\left(y\right)=\dfrac{1}{\cos y}$, $M_2\left(x\right)=\operatorname{ctg}x$, $N_2\left(y\right)=\sin y$. Разделим все члены уравнения на $\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\cos y}$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx+\cos y\sin y dy=0 \ \Rightarrow \ \frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}dx=-\cos y\sin y dy\,.$$

Интегрируя последнее равенство, найдем общий интеграл уравнения:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = -\int \cos y \sin y dy \;\Leftrightarrow\; \int \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x = \int \cos y \, d \cos y \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 y + C$$

или $\operatorname{tg}^2 x = \sin^2 y + C$.

При делении уравнения на $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\cos y}$ необходимо потребовать, чтобы $\operatorname{ctg} x \neq 0$, т.е. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, но функция $M_1(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ не определена при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, следовательно, эти значения не являются решениями уравнения.

Ответ. Общий интеграл уравнения $\operatorname{tg}^2 x = \sin^2 y + C$.

Задача 3.3. Найти частное решение уравнения $y = y' \cos^2 x \ln y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 1$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем исходное уравнение:

$$y \, dx = \cos^2 x \ln y \, dy .$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, где

$$M_1(x) = 1,\; N_1(y) = y,\; M_2(x) = -\cos^2 x,\; N_2(y) = \ln y .$$

Разделим обе части преобразованного уравнения на $y \cos^2 x$ и проинтегрируем полученное равенство:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\ln y \, dy}{y} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y \, dy}{y} .$$

Так как $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{\ln y\, dy}{y} = \int \ln y\, d \ln y = \frac{\ln^2 y}{2} + C$, то общий интеграл исходного уравнения:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\ln^2 y}{2} + C .$$

Найдем значение C , при котором общее решение удовлетворяет начальным условиям. Подставив $x = \pi$, $y = 1$ в общий интеграл, получим $0 = 0 + C$, откуда $C = 0$. Следовательно, частное решение: $\operatorname{tg} x = \frac{\ln^2 y}{2}$, или $x = \operatorname{arctg} \frac{\ln^2 y}{2}$.

Ответ. Частное решение: $x = \operatorname{arctg} \frac{\ln^2 y}{2}$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3901 – 3910, 3913 – 3916.*

3.1.2. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Задача 3.4. Найти общее решение уравнения

$$\left(2y - 3\right)dx + \left(2x + 3y^2\right)dy = 0 .$$

Р е ш е н и е . Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как $P(x, y) = 2y - 3$, $Q(x, y) = 2x + 3y^2$ и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2y - 3)'_y = 2 = \left(2x + 3y^2\right)'_x = \frac{\partial Q}{\partial y} .$$

Решением уравнения будет функция $F(x, y)$, полный дифференциал которой $dF = (2y-3)dx + (2x+3y^2)dy = 0$ и частные производные $F'_x = 2y-3$, $F'_y = 2x+3y^2$. Проинтегрируем по x уравнение $F'_x = 2y-3$:

$$F = \int F'_x dx = \int (2y-3)dx = 2xy - 3x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция переменной y.

Найденная функция $F = 2xy - 3x + \varphi(y)$ удовлетворяет равенству $F'_y = 2x + 3y^2$, т.е.

$$F'_y = \left(2xy - 3x + \varphi(y)\right)'_y = 2x + \varphi'(y) = 2x + 3y^2,$$

откуда $\varphi'(y) = 3y^2$ или $\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C$ и $F = 2xy - 3x + y^3 + C$. Общий интеграл исходного уравнения находим из равенства $dF = 0$ или $F = C$:

$$2xy - 3x + y^3 = C.$$

Ответ. Общий интеграл уравнения: $2xy - 3x + y^3 = C$.

Задача 3.5. Найти общее решение уравнения

$$\left(x + \ln y\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Обозначим $P(x, y) = x + \ln y$, $Q(x, y) = 1 + \frac{x}{y} + \sin y$. Рассматриваемое уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(x + \ln y\right)'_y = \frac{1}{y} = \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)'_x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Решением исходного уравнения будет функция $F(x, y)$, полный дифференциал которой $dF = (x + \ln y)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0$ и частные производные $F'_x = x + \ln y = P(x, y)$, $F'_y = 1 + \frac{x}{y} + \sin y = Q(x, y)$. Проинтегрируем по x уравнение $F'_x = x + \ln y$:

$$F = \int F'_x dx = \int (x + \ln y)dx = \frac{x^2}{2} + x \ln y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция переменной y.

Функция $F = \frac{x^2}{2} + x \ln y + \varphi(y)$ удовлетворяет равенству

$$F'_y = Y(x, y) = 1 + \frac{x}{y} + \sin y,$$

т.е. $F'_y = \left(\frac{x^2}{2} + x \ln y + \varphi(y)\right)'_y = \frac{x}{y} + \varphi'(y) = 1 + \frac{x}{y} + \sin y$,

откуда $\varphi'(y) = 1 + \sin y$ или $\varphi(y) = y - \cos y + C$ и $F = \frac{x^2}{2} + x \ln y + y - \cos y + C$.

Общий интеграл исходного уравнения находим из равенства $dF = 0$ или $F = C$:

$$\frac{x^2}{2} + x \ln y + y - \cos y = C.$$

Ответ. Общий интеграл: $\frac{x^2}{2} + x \ln y + y - \cos y = C$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 4050 – 4057.*

3.1.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $M(x, y)$ называется однородной степени m, если для всех $t > 0$ выполняется $M(tx, ty) = t^m M(x, y)$. Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется *однородным дифференциальным уравнением*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одной и той же степени. Однородное дифференциальное уравнение можно переписать следующим образом: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Задача 3.6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения является функцией отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, уравнение однородное. Делаем подстановку $\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = xu(x)$, где $u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y' = xu' + u$ и исходное уравнение примет вид $xu' + u = u^2 - 2$, или в дифференциалах, учитывая, что $u' = \frac{du}{dx}$:

$$x\frac{du}{dx} = u^2 - 2 - u. \qquad (3.1)$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными, разделив обе его части на произведение $x\left(u^2 - u - 2\right)$:

$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x}, \qquad (3.2)$$

при этом $x = 0$ и $u = 2$, $u = -1$, удовлетворяющие уравнению $u^2 - u - 2 = 0$, являются решениями уравнения (3.1). Следовательно, $y(x)$, удовлетворяющие равенствам $\frac{y}{x} = 2$ и $\frac{y}{x} = -1$, т.е. $y_1 = 2x$ и

$y_2 = -x$ являются решениями исходного уравнения. Дробь в левой части уравнения (3.2) раскладываем на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{u^2-u-2} = \frac{1}{(u+1)(u-2)} = \frac{1}{3}\frac{(u+1)-(u-2)}{(u+1)(u-2)} = \frac{-1}{3(u+1)} + \frac{1}{3(u-2)}.$$

Уравнение (3.2) примет вид

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-2}\right)du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим решение уравнения (3.1):

$$\frac{1}{3}\left(-\ln|u+1| + \ln|u-2|\right) = \ln|x| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = 3C\ln|x| \Rightarrow \frac{u-2}{u+1} = Cx^3.$$

Произведя обратную подстановку $u = \dfrac{y}{x}$ в последнее равенство, получим общее решение исходного уравнения:

$$\frac{y}{x} - 2 = \left(\frac{y}{x} + 1\right)x^3C \Rightarrow y = \frac{x(x^3C+2)}{1-x^3C}.$$

При $C = 0$ $y = 2x$, при $C = -1$ $y = -x$, следовательно, $y_1 = 2x$ и $y_2 = -x$ – частные решения.

Ответ. Общее решение: $\dfrac{y}{x} - 2 = \left(\dfrac{y}{x} + 1\right)x^3C$.

Задача 3.7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xdy - ydx = ydy$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на ydy, получим уравнение, разрешенное относительно производной x':

$$\frac{x}{y} - x' = 1 \text{ или } x' = \frac{x}{y} - 1.$$

Правая часть полученного уравнения является функцией только отношения $\frac{x}{y}$, поэтому данное уравнение – однородное, решим его с помощью подстановки $\frac{x}{y}=u(y)$, или $x=u(y)y$, тогда $x'=yu'+u$ и уравнение примет вид

$$yu'+u=u-1 \;\Rightarrow\; yu'=-1 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dy}=-\frac{1}{y}. \qquad (3.3)$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$du=-\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; u=-\ln|y|+C.$$

Заменив в последнем равенстве u на $\frac{x}{y}$, получим общий интеграл исходного уравнения $\frac{x}{y}=-\ln|y|+C$ или $\frac{x}{y}+\ln|y|=C$. При делении на y в (3.3) обеих частей уравнения потери решения не произошло, так как $y=0$ не входит в область определения полученного общего интеграла.

Ответ. Общий интеграл уравнения: $\frac{x}{y}+\ln|y|=C$.

Задача 3.8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

Р е ш е н и е. Разделим числитель и знаменатель правой части уравнения на x:

$$y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Правая часть полученного уравнения является функцией отношения переменных $\frac{y}{x}$, следовательно, исходное уравнение – однородное, ре-

шим его с помощью подстановки $\frac{y}{x}=u(x)$ или $y=u(x)x$, тогда $y'=xu'+u$ и уравнение принимает вид

$$xu'+u=\frac{1+u}{1-u} \Rightarrow xu'=\frac{1+u}{1-u}-u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2}-\frac{udu}{1+u^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2}-\frac{du^2}{2\left(1+u^2\right)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем последнее равенство:

$$\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+C_1.$$

Заменив u на $\frac{y}{x}$, C_1 на $\ln C, C>0$, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\ln|x|+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|Cx|+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left|C\sqrt{x^2+y^2}\right|$ – общий интеграл исходного уравнения.

Ответ. Общий интеграл уравнения: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left|C\sqrt{x^2+y^2}\right|$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3934 – 3944, 3945 – 3948.*

3.1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется *линейным*.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ при $n \in \mathbf{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ называется *уравнением Бернулли*.

Рассмотрим на примерах различные способы решения линейных уравнений.

Задача 3.9. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение, разделив обе его части на x:

$$y' + \left(\frac{1}{x} + x\right)y = 3xe^{-x}.$$

Полученное уравнение является линейным. Для его решения применим метод Бернулли. Найдем решение в виде $y = UV$, где U и V – произвольные функции, тождественно не равные нулю, тогда $y' = U'V + V'U$. Подставим y и y' в преобразованное уравнение, получим:

$$U'V + UV' + UV\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 3xe^{-x}.$$

Приведем подобные слагаемые и вынесем U за скобки:

$$U'V + U\left(V' + V\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = 3xe^{-x}.$$

В качестве функции V выберем какой-нибудь частный интеграл уравнения $V' + V\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$, тогда для отыскания U получим уравнение $U'V = 3xe^{-x}$. Первое уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1). Представим $V' = \frac{dV}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{dV}{V} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx .$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\ln|V| = -x - \ln|x| + C .$$

Так как V – произвольная функция, то можем полагать, что постоянная $C = 0$, тогда

$$V = e^{-x-\ln|x|} = \frac{1}{xe^x} .$$

Подставляя V во второе уравнение и решая его, найдем U как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{dU}{dx}\frac{1}{xe^x} = 3xe^{-x} \Rightarrow dU = 3x^2dx \Rightarrow U = x^3 + C .$$

Зная U и V, определяем общее решение исходного уравнения:

$$y = UV \Rightarrow y = \left(x^3 + C\right)\frac{1}{xe^x} \text{ или } y = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x} .$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right)e^{-x}$.

Задача 3.10. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Р е ш е н и е . Преобразуем уравнение, учитывая, что $y'_x = \frac{1}{x'_y}$:

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{3x - y^2} \text{ или } x' = 3\frac{x}{y} - y \text{ или } x' - \frac{3}{y}x = -y .$$

Полученное уравнение имеет вид $x' + P(y)x = Q(y)$, следовательно, является линейным по переменной x. Решим его методом Лагранжа вариации постоянных. Запишем однородное уравнение, соответствующее полученному линейному:

$$x' - \frac{3}{y}x = 0\,.$$

Представим $x' = \dfrac{dx}{dy}$ и разделим переменные:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y}\,.$$

Интегрируя полученное равенство, найдем решение однородного уравнения $x_{\text{о}}$:

$$\ln|x| = 3\ln|y| + C \quad \Leftrightarrow \quad x_{\text{о}} = Cy^3\,.$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $x_{\text{н}} = C(y)y^3$, где $C(y)$ – неизвестная функция, которую найдем, подставив $x_{\text{н}}$ и $x'_{\text{н}} = C'(y)y^3 + C(y)3y^2$ в исходное уравнение:

$$C'(y)y^3 + C(y)3y^2 - \frac{3}{y}C(y)y^3 = -y \;\Rightarrow\; C'(y)y^2 = -1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C(y) = -\int\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} + \tilde{C}\,.$$

Таким образом, $x_{\text{н}} = \left(\dfrac{1}{y} + \tilde{C}\right)y^3 = y^2 + \tilde{C}y^3$ – искомое решение.

Ответ. Общее решение уравнения: $x = y^2 + \tilde{C}\,y^3$.

Задача 3.11. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}\,x\,.$$

Р е ш е н и е. Для решения дифференциального уравнения необходимо определить его вид. Перепишем уравнение: $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^4\cos x$. Это уравнение Бернулли (в данном случае $n = 4$), которое приводится к линейному уравнению заменой $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$. Разделим обе части урав-

нения на y^4: $\frac{y'}{y^4}-\frac{y}{y^4}\operatorname{tg}x=\cos x$ или $\frac{y'}{y^4}-\frac{1}{y^3}\operatorname{tg}x=\cos x$. Далее заменим $z=\frac{1}{y^3}$, тогда $z'=-3\frac{y'}{y^4}$, откуда $\frac{y'}{y^4}=\frac{z'}{-3}$, и исходное уравнение преобразуется к линейному уравнению

$$\frac{z'}{-3}-z\operatorname{tg}x=\cos x \quad \text{или} \quad z'+3z\operatorname{tg}x=-3\cos x.$$

Найдем решение в виде $z=UV$, где U и V – произвольные функции, тождественно не равные нулю, тогда $z'=U'V+V'U$. Подставим z и z' в преобразованное уравнение, получим:

$$U'V+UV'+3UV\operatorname{tg}x=-3\cos x.$$

Приведем подобные слагаемые и вынесем U за скобки:

$$U'V+U\left(V'+3V\operatorname{tg}x\right)=-3\cos x.$$

В качестве функции V выберем какой-нибудь частный интеграл уравнения $V'+3V\operatorname{tg}x=0$, тогда для отыскания U получим уравнение $U'V=-3\cos x$.

Первое уравнение есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1). Представим $V'=\frac{dV}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{dV}{dx}+3V\operatorname{tg}x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V}=-3\operatorname{tg}x dx.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\ln|V|=-3\int\operatorname{tg}x dx=-3\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=3\int\frac{d\cos x}{\cos x}=3\ln|\cos x|+C.$$

Так как V – произвольная функция, то можем полагать, что постоянная $C=0$, тогда $V=\cos^3 x$. Подставляя V в уравнение $U'V=-3\cos x$ и решая его, найдем U как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{dU}{dx}\cos^3 x = -3\cos x \;\Rightarrow\; dU = \frac{-3}{\cos^2 x}dx \;\Rightarrow\; U = -3\operatorname{tg} x + C\,.$$

Зная U и V, определяем общее решение уравнения:

$$z = UV \Rightarrow\; z = \left(-3\operatorname{tg} x + C\right)\cos^3 x\,,$$

где $z = \dfrac{1}{y^3}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{\cos x\sqrt[3]{C - 3\operatorname{tg} x}}\,.$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y = \dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{C - 3\operatorname{tg} x}}$.

Задача 3.12. Решить дифференциальное уравнение

$$xydy = \left(y^2 + x\right)dx\,.$$

Р е ш е н и е. Для решения дифференциального уравнения необходимо определить его вид. Преобразуем уравнение:

$$xy\frac{dy}{dx} = y^2 + x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xyy' = \left(y^2 + x\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{y}\,.$$

Это уравнение Бернулли, решим его, не делая замены $z = \dfrac{1}{y}$. Найдем решение в виде $y = UV$, где U и V – произвольные функции, тождественно не равные нулю, тогда $y' = U'V + V'U$, и уравнение принимает вид:

$$U'V + UV' - UV\frac{1}{x} = \frac{1}{UV}\,.$$

Приведем подобные слагаемые и вынесем U за скобки:

$$U'V + U\left(V' - \frac{1}{x}V\right) = \frac{1}{UV}.$$

В качестве функции V выберем какой-нибудь частный интеграл уравнения $V' - \frac{1}{x}V = 0$, тогда для отыскания U получим уравнение $U'V = \frac{1}{UV}$. $V' - \frac{1}{x}V = 0$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Представим $V' = \frac{dV}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|V| = \ln|x| + \mathrm{C}.$$

Так как V – произвольная функция, то можем полагать, что постоянная $C = 0$, тогда $V = x$. Подставляя V в уравнение $U'V = \frac{1}{UV}$ и решая его, найдем U как общий интеграл этого уравнения:

$$\frac{dU}{dx}x = \frac{1}{Ux} \Rightarrow UdU = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \frac{U^2}{2} = -\frac{1}{x} + \tilde{C} \Rightarrow U = \pm\sqrt{-\frac{2}{x} + 2\tilde{C}}.$$

Обозначим $C = 2\tilde{C}$, тогда $U = \pm\sqrt{-\frac{2}{x} + C}$. Зная U и V, определим общее решение исходного уравнения: $y = UV \Rightarrow y = \pm x\sqrt{-\frac{2}{x} + C}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения: $y^2 = x^2\left(-\frac{2}{x} + C\right) = -2x + Cx^2$.

Ответ. Общее решение уравнения: $y^2 = Cx^2 - 2x$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 3954 – 3964, 3965 – 3969.*

3.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

3.2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Задача 3.13. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение является дифференциальным уравнением третьего порядка, $y''' = f(x)$ и решается последовательным интегрированием:

$$y''' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy''}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dy'' = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dy'' = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y'' = \ln|x| + \tilde{C}_1 .$$

Полученное уравнение второго порядка решаем аналогично:

$$y'' = \ln|x| + \tilde{C}_1 \Leftrightarrow \frac{dy'}{dx} = \ln|x| + \tilde{C}_1 \Leftrightarrow dy' = \left(\ln|x| + \tilde{C}_1\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dy' = \int \left(\ln|x| + \tilde{C}_1\right)dx \Rightarrow y' = \int \ln|x|\,dx + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 .$$

Интегрируя по частям $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int x\,d\ln|x| = x\ln|x| - \int \frac{x}{x}dx =$ $= x\ln|x| - x + \tilde{C}_3$, получим $y' = x\ln|x| - x + \tilde{C}_3 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$, или $y' =$ $= x\ln|x| + C_1 x + C_2$, где $\tilde{C}_1 - 1 = C_1$, $\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 = C_2$.

Решаем полученное уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{dx} = x\ln|x| + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow dy = \left(x\ln|x| + C_1 x + C_2\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int \left(x\ln|x| + C_1 x + C_2\right)dx .$$

Интегрируя по частям:

$$\int x\ln|x|dx = \int \ln|x| d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \frac{x^2}{2} d\ln|x| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_3,$$

получим: $y = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$. Обозначим $\frac{C_1}{2} - \frac{1}{4} = C_1$, общим решением уравнения является функция $y = \frac{x^2}{2}\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Ответ. Общее решение уравнения: $y = \frac{x^2}{2}\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

Задача 3.14. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{(IV)} = \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Рассматриваемое уравнение является дифференциальным уравнением четвертого порядка, $y^{(IV)} = f(x)$ и решается последовательным интегрированием:

$$y^{(IV)} = \frac{dy'''}{dx} \Rightarrow \frac{dy'''}{dx} = \sin 2x.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$dy''' = \sin 2x\, dx \Rightarrow y''' = \int \sin 2x dx \Rightarrow y''' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1.$$

Получили уравнение третьего порядка (порядок понижен). Используя начальное условие $y'''(0) = 1$, найдем значение C_1:

$$y'''(0) = -\frac{1}{2}\cos 0 + C_1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''' = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}.$$

Понижаем порядок полученного уравнения:

$$a_i \Rightarrow \frac{dy''}{dx} = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow dy'' = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\right)dx \Rightarrow y'' = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x + C_2.$$

Получили уравнение второго порядка (порядок понижен). Используя начальное условие $y''(0) = 2$, найдем значение C_2:

$$y''(0) = -\frac{1}{4}\sin 0 + \frac{3}{2}\cdot 0 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x + 2.$$

Понижаем порядок полученного уравнения:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy' = \left(-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x + 2\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \int\left(-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x + 2\right)dx \Rightarrow y' = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{3}{4}x^2 + 2x + C_3.$$

Получили уравнение первого порядка (порядок понижен). Используя начальное условие $y'(0) = 1$, найдем значение C_3:

$$y'(0)=\frac{1}{8}\cos 0+\frac{3}{4}0+2\cdot 0+C_3=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{8}+C_3=1 \;\Rightarrow\; C_3=\frac{7}{8} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'=\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{7}{8}.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1):

$$y'=\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; dy=\left(\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{7}{8}\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=\int\left(\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{7}{8}\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x^3+x^2+\frac{7}{8}x+C_4.$$

Используя начальное условие $y(0)=0$, найдем значение C_4:

$$y(0)=\frac{1}{16}\sin 0+\frac{1}{4}0+0+\frac{7}{8}0+C_4=0 \;\Rightarrow\; C_4=0.$$

Таким образом, частным решением исходного уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, является функция $y=\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x^3+x^2+\frac{7}{8}x$.

Ответ. Частное решение уравнения: $y=\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x^3+x^2+\frac{7}{8}x$.

Задача 3.15. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy''-y'=\sqrt{x^2+(y')^2}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1)=-\frac{1}{3}$, $y'(1)=0$.

Р е ш е н и е. Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит явно переменную y, следовательно, допускает понижение порядка с помощью подстановки $y'=p(x)$, $y''=p'=\frac{dp}{dx}$. При-

менив эти подстановки к данному уравнению, получим однородное уравнение первого порядка (см. п. 3.1.3):

$$xp' - p = \sqrt{x^2 + p^2} \;\Rightarrow\; p' - \frac{p}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + p^2}{x^2}} \;\Rightarrow\; p' - \frac{p}{x} = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{x}\right)^2},$$

которое решим с помощью замены $\frac{p}{x} = u(x) \;\Rightarrow\; p = xu(x) \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; p' = u'x + u$. Получим уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1):

$$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}x = \sqrt{1 + u^2}\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем последнее равенство:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln|x| + C\,.$$

Обозначив $C = \ln C_1$, получим

$$\ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln|x| + \ln C_1 \;\Rightarrow\; \left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = C_1|x| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left|\frac{p}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{p}{x}\right)^2}\right| = C_1|x|\,.$$

Учитывая начальные условия $y'(1) = 0$ и $y' = p(x)$, найдем значение C_1:

$$p(1) = y'(1) = 0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{0}{1} + \sqrt{1 + \left(\frac{0}{1}\right)^2}\right| = C_1|1| \;\Rightarrow\; C_1 = 1,$$

тогда уравнение примет вид $\frac{p}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{p}{x}\right)^2}=x$ (модули опускаем со знаком плюс, так как $|1|=1$). Разрешим последнее равенство относительно p:

$$p+\sqrt{x^2+p^2}=x^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+p^2}=x^2-p \;\Rightarrow\; x^2+p^2=\left(x^2-p\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2+p^2=x^4-2px^2+p^2 \;\Rightarrow\; 1=x^2-2p \;\Rightarrow\; p=\frac{x^2-1}{2}.$$

Так как $p=y'$, то

$$y'=\frac{x^2-1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{2} \;\Rightarrow\; dy=\frac{x^2-1}{2}dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=\int\frac{x^2-1}{2}dx \;\Rightarrow y=\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}+C_2.$$

Учитывая начальные условия $y(1)=-\frac{1}{3}$, вычислим C_2:

$$y(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+C_2=-\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; C_2=0$$

и найдем частное решение уравнения: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}$.

Ответ. Частное решение уравнения: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}$.

Задача 3.16. Найти общее решение уравнения $xy''+x\left(y'\right)^2=y'$.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение не содержит явно переменную y, следовательно, допускает понижение порядка с помощью подстановки

$$y'=p(x),\; y''=p'=\frac{dp}{dx}.$$

После применения этих подстановок получим уравнение Бернулли (см. п. 3.1.4):

$$xp' + xp^2 = p \;\Rightarrow\; p' - \frac{p}{x} = -p^2,$$

решение которого будем искать в виде $y = UV$, где U и V – произвольные функции, тождественно не равные нулю, тогда $y' = U'V + V'U$. Подставим y и y' в уравнение, получим:

$$U'V + UV' - \frac{UV}{x} = -U^2V^2 \;\Rightarrow\; U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = -U^2V^2.$$

В качестве функции V выберем какой-нибудь частный интеграл уравнения $V' - \frac{V}{x} = 0$, тогда для отыскания U получим уравнение $U'V = -U^2V^2$. Первое уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1):

$$\frac{dV}{dx} - \frac{V}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|V| = \ln|x| + C.$$

Так как функция V – произвольная, то примем $C = 0$, тогда $V = x$. Подставим $V = x$ во второе уравнение и проинтегрируем:

$$U'x = -U^2x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dU}{dx}x = -U^2x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dU}{U^2} = -xdx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dU}{U^2} = \int -xdx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{U} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Полагая $C = -\frac{C_1}{2}$, получим $-\frac{1}{U} = -\frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{2} \;\Rightarrow\; U = \frac{2}{x^2 + C_1}$. Теперь найдем $p = UV \;\Rightarrow\; p = \frac{2x}{x^2 + C_1}$, но $p = y'$, следовательно, получим

уравнение $y' = \dfrac{2x}{x^2 + C_1}$, интегрируя которое, найдем общее решение исходного уравнения:

$$y = \int \frac{2x dx}{x^2 + C_1} = \int \frac{dx^2}{x^2 + C_1} = \ln\left|x^2 + C_1\right| + C_2 .$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y = \ln\left|x^2 + C_1\right| + C_2$.

Задача 3.17. Найти общее решение уравнения $y'' = y\left(\dfrac{y'}{y} - 2\sqrt{\dfrac{y'}{y} - 4}\right)$.

Р е ш е н и е. Рассматриваемое уравнение не содержит явно переменную x, следовательно, допускает понижение порядка с помощью подстановки:

$$y' = p(y),$$

где $p(y)$ – неизвестная функция, $y = y(x)$. Тогда по формуле для производной сложной функции

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} p(y) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'\, y' = p'\, p .$$

После применения этих подстановок исходное уравнение принимает вид

$$p\, p' = p\left(\frac{p}{y} - 2\sqrt{\frac{p}{y} - 4}\right) \Rightarrow \; p = 0 \text{ или } p' = \frac{p}{y} - 2\sqrt{\frac{p}{y} - 4} .$$

Из уравнения $p = 0$ следует, что $y = C$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = C$ является решением.

Полученное уравнение приведем к уравнению с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1) с помощью замены $\dfrac{p}{y} = u(y) \Rightarrow p = u(y)\, y \Rightarrow$ $\Rightarrow p' = u'y + u$:

$$p' = \frac{p}{y} - 2\sqrt{\frac{p}{y} - 4} \;\Rightarrow\; u'y + u = u - 2\sqrt{u-4} \;\Rightarrow\; u'y = -2\sqrt{u-4} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{du}{dy}y = -2\sqrt{u-4}\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части уравнения:

$$\frac{du}{\sqrt{u-4}} = \frac{-2dy}{y} \;\Rightarrow\; \int\frac{du}{\sqrt{u-4}} = -2\int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{u-4} = -2\ln|y| + C\,.$$

Взяв $C = -2\ln C_1$, преобразуем последнее выражение:

$$2\sqrt{u-4} = -2\ln|y| - 2\ln C_1 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{u-4} = -2\ln|C_1 y| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{u-4} = -\ln|C_1 y|$$

и разрешим его относительно переменной u:

$$u - 4 = \ln^2|C_1 y| \;\Rightarrow\; u = \ln^2|C_1 y| + 4\,. \qquad (3.4)$$

Так как $u = \frac{p}{y}$, где $p = \frac{dy}{dx}$, то из (3.4) следует: $\frac{dy}{dx} = y\left(\ln^2|C_1 y| + 4\right)$.
Разделим переменные и проинтегрируем последнее равенство:

$$\frac{dy}{y\left(\ln^2|C_1 y| + 4\right)} = dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y\left(\ln^2|C_1 y| + 4\right)} = \int dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int\frac{d\ln|C_1 y|}{\left(\ln^2|C_1 y| + 2^2\right)} = x + \tilde{C}_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\ln|C_1 y|}{2} = x + \tilde{C}_2 \;\Rightarrow\; \ln|C_1 y| = 2\operatorname{tg}\left(2\left(x + \tilde{C}_2\right)\right).$$

Обозначим $2\tilde{C}_2 = C_2$, получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\ln|C_1 y| = 2\operatorname{tg}\left(2x + C_2\right) \text{ или } y = \frac{1}{C_1}e^{2\operatorname{tg}(2x + C_2)}\,.$$

Частное решение $y = C$ не может быть получено из общего решения уравнения ни при каких значениях C_1 и C_2, следовательно, является особым решением данного дифференциального уравнения.

Ответ. Общее решение уравнения: $\ln|C_1 y| = 2\,\mathrm{tg}(2x + C_2)$.

Задача 3.18. Найти частное решение дифференциального уравнения $y\,y'' + (y')^3 = (y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 1,\ y'(1) = -1$.

Р е ш е н и е. Уравнение не содержит явно переменную x, следовательно, допускает понижение порядка с помощью подстановки:

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'\,p\,.$$

Исходное уравнение принимает вид

$$y\,p\,p' + p^3 = p^2 \ \Rightarrow\ p = 0 \ \text{ или } \ y\,p' + p^2 = p\,.$$

Из уравнения $p = 0$ следует, что $y = C$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = C$ является решением. Второе уравнение системы $y\,p' + p^2 = p$ или $y\dfrac{dp}{dy} + p^2 = p$ – уравнение с разделяющимися переменными (см. п. 3.1.1). Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$\frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y} \ \Rightarrow\ \int\frac{dp}{p - p^2} = \int\frac{dy}{y}\,.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\frac{dp}{p(1-p)} = \int\frac{p + (1-p)}{p(1-p)}dp = \int\frac{dp}{1-p} + \int\frac{dp}{p} = -\ln|1-p| + \ln|p| + \tilde{C}_1;$$

$$\int\frac{dy}{y} = \ln|y| + \tilde{C}_2\,.$$

Следовательно, $-\ln|1-p| + \ln|p| + \tilde{C}_1 = \ln|y| + \tilde{C}_2$. Обозначив $\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 = \ln C_1$, получим

$$\ln\left|\frac{p}{1-p}\right| = \ln|C_1 y| \;\Rightarrow\; \frac{p}{1-p} = C_1 y\,.$$

Разрешим последнее равенство относительно переменной p:

$$p = C_1 y(1-p) \;\Rightarrow\; p = C_1 y - C_1 p y \;\Rightarrow\; p(1+C_1 y) = C_1 y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p = \frac{C_1 y}{1+C_1 y}\,.$$

Так как $p = y'$, следовательно, $y' = \dfrac{C_1 y}{1+C_1 y}$. Используя начальные условия $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, найдем значение C_1:

$$-1 = \frac{C_1}{1+C_1} \Rightarrow\; -1 - C_1 = C_1 \;\Rightarrow\; 2C_1 = -1 \;\Rightarrow\; C_1 = -\frac{1}{2}$$

и подставим в $y' = \dfrac{C_1 y}{1+C_1 y}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}y}{1-\frac{1}{2}y} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-y}{2-y} \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{y-2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2}\,.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$\frac{(y-2)dy}{y} = dx \;\Rightarrow\; \int\frac{(y-2)dy}{y} = \int dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int dy - \int\frac{2}{y}dy = \int dx \;\Rightarrow\; y - 2\ln|y| = x + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y - \ln y^2 = x + C_2 \;-\text{общее решение уравнения.}$$

Используя начальное условие $y(1)=1$, найдем значение C_2:

$$1-\ln 1^2 = 1+C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0\,.$$

Подставив $C_2 = 0$ в общее решение, получим искомое частное решение: $y - \ln y^2 = x$.

Ответ. Частное решение уравнения $x = y - \ln y^2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 4155 – 4182, 4183 – 4188, 4189 – 4199.*

3.2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

В этом разделе рассмотрим решение линейных однородных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,.$$

Задача 3.19. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ с начальными условиями: $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Сначала найдем общее решение уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$, корни которого $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Так как корни действительные и разные, то общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\,.$$

Определим постоянные C_1 и C_2 так, чтобы найденное решение удовлетворяло начальным условиям. Для этого найдем производную $y'(x) = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$ и подставим начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 2C_2 = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \; C_1 = 1, \; C_2 = -1.$$

Подставив значения постоянных C_1 и C_2 в общее решение уравнения $y(x)$, получим частное решение дифференциального уравнения вида $y(x) = e^{-x} - e^{2x}$.

Ответ. Частное решение уравнения: $y(x) = e^{-x} - e^{2x}$.

Задача 3.20. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ с начальными условиями: $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ или $(k-1)^2 = 0$ имеет корень $k = 1$ действительный, кратности 2. Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Определим постоянные C_1 и C_2, подставив начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$. Так как $y'(x) = e^x (C_1 + C_2 x + C_2)$, то

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \; C_1 = 1, C_2 = -4.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в общее решение для $y(x)$, получим частное решение: $y(x) = e^x (1 + 4x)$.

Ответ. Частное решение уравнения: $y(x) = e^x (1 + 4x)$.

Задача 3.21. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Р е ш е н и е. Корни характеристического уравнения $k^2 + 2k + 10 = 0$ – комплексные: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Определим постоянные C_1 и C_2, подставив начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$. Так как $y'(x) = e^{-x}\left(-C_1 \cos 3x - C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + \right.$ $\left. + 3C_2 \cos 3x\right)$, то

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -C_1 + 3C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в общее решение уравнения $y(x)$, получим частное решение уравнения: $y(x) = e^{-x} \sin 3x$.

Ответ. Частное решение уравнения: $y(x) = e^{-x} \sin 3x$.

Задача 3.22. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 8y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^3 - 8 = 0$ имеет один действительный корень $k_1 = 2$ и пару комплексно сопряженных корней $k_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right).$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y(x) = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + \right.$ $\left. + C_3 \sin \sqrt{3}x\right)$.

Задача 3.23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет два действительных различных корня $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ и пару комплексно сопряженных корней $k_{3,4} = \pm i$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Задача 3.24. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^4 + 5k^3 + 9k^2 + 7k + 2 = 0$ или $(k+2)(k+1)^3 = 0$ имеет действительные корни: $k_1 = -2$ кратности 1 и $k_2 = -1$ кратности 3. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + e^{-x}\left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2\right).$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y(x) = C_1 e^{-2x} + e^{-x}\left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2\right)$.

Задача 3.25. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{V} - y^{IV} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^5 - k^4 + 2k^3 - 2k^2 + k - 1 = 0$ или $(k-1)(k^2+1)^2 = 0$ имеет простой действительный корень $k_1 = 1$ и пару комплексно сопряженных корней $k_{2,3} = \pm i$ кратности 2. Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = C_1 e^{x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x .$$

Ответ. Общее решение уравнения: $y(x) = C_1 e^{x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 4251 – 4261, 4262 – 4264.*

3.2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

В этом разделе рассмотрим решение линейных неоднородных уравнений *n*-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_i, $i = 1,\ldots,n$ – действительные числа. Его общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и какого-либо его частного решения $y_{\text{чн}}$, т.е. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$. Если известно общее решение $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y_{\text{чн}}$ можно определить методом вариации произвольных постоянных. Рассмотрим этот метод на примерах.

Задача 3.26. Найти общее решение уравнения $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью $f(x) = -\operatorname{ctg}^2 x$. Найдем решение линейного однородного дифференциального уравнения (см. п. 3.2.2), соответствующего исходному неоднородному уравнению $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Здесь $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения, образующие его фундаментальную систему решений.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{он}} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – некоторые функции, которые найдем с помощью системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = -\operatorname{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Решим систему относительно производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ методом Крамера. Определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$

Определитель матрицы системы, первый столбец которой заменен на столбец свободных членов:

$$\Delta_{c_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ -\operatorname{ctg}^2 x & \cos x \end{vmatrix} = \sin x \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} .$$

Определитель матрицы системы, второй столбец которой заменен на столбец свободных членов:

$$\Delta_{c_2'} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & -\operatorname{ctg}^2 x \end{vmatrix} = -\cos x \operatorname{ctg}^2 x = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} .$$

Следовательно, $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_{c_1'}}{\Delta} = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$, $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_{c_2'}}{\Delta} = -\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$. Интегрируя полученные равенства, находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + \tilde{C}_1 ,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} d\sin x = -\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} d\sin x =$$

$$= -\int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} + \int d\sin x = \frac{1}{\sin x} + \sin x + \tilde{C}_2 .$$

Подставив $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в решение $y_{\text{он}}$, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + \tilde{C}_1 \right)\cos x + \left(\frac{1}{\sin x} + \sin x + \tilde{C}_2 \right)\sin x$$

или $y_{\text{он}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$, где произвольные константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ заменили для удобства на C_1 и C_2.

Ответ. Общее решение уравнения: $y_{\text{он}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$.

Задача 3.27. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

Р е ш е н и е. Рассматриваемое уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$. Найдем решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному неоднородному уравнению $y'' - 2y' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$, следовательно, общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Здесь $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = xe^x$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения, образующие его фундаментальную систему решений.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{он}} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – некоторые функции, которые найдем с помощью системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)\left(e^x + xe^x\right) = \dfrac{e^x}{x^2+1}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Решим систему относительно производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Из первого уравнения имеем $C_1'(x) = -C_2'(x)x$. Вычтем из второго уравнения первое, получим $C_2'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, следовательно, $C_1'(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$. Интегрируя полученные равенства, находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = -\ln\sqrt{x^2+1} + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + \tilde{C}_2.$$

Подставив $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для $y_{\text{он}}$, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x =$$

$$= \left(-\ln\sqrt{x^2+1} + \tilde{C}_1\right)e^x + \left(\operatorname{arctg} x + \tilde{C}_2\right)xe^x$$

или $y_{\text{он}} = C_1e^x + C_2xe^x - e^x\ln\sqrt{x^2+1} + xe^x\operatorname{arctg} x$. Произвольные константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ заменили для удобства на C_1 и C_2.

Ответ. Общее решение уравнения: $y_{\text{он}} = C_1e^x + C_2xe^x - e^x\ln\sqrt{x^2+1} + xe^x\operatorname{arctg} x$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 4268 – 4282.*

3.2.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим решение линейных неоднородных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\sin\beta x + Q_k(x)\cos\beta x\right)$ – правая часть специального вида, $P_m(x)$, $Q_k(x)$ – многочлены степеней m и k соответственно; a_i, $i = 1,\ldots,n$ – действительные числа. Его общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и какого-либо его частного решения $y_{\text{чн}}$, т.е. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$. Частное решение $y_{\text{чн}}$ ищем в виде функции, подобной $f(x)$: $y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(T_l(x)\sin\beta x + S_l(x)\cos\beta x\right)x^r$, где $T_l(x)$, $S_l(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами порядка $l = \max(m,k)$ и r – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического уравнения, если среди корней этого уравнения есть такой корень.

Задача 3.28. Найти общее решение уравнения

$$y^{(IV)} + 2y'' = \cos^2 x.$$

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение является линейным неоднородным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, приводящейся к правой части специального вида. Соответствующим однородным уравнением для исходного будет уравнение $y^{(IV)} + 2y'' = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. Так как число 0 явля-

ется двукратным действительным корнем, а $\pm i\sqrt{2}$ – комплексными простыми корнями, то общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}\cdot x + C_4 \sin\sqrt{2}\cdot x .$$

Правая часть данного уравнения не является функцией специального вида, однако, преобразовав $f(x) = \cos^2 x$ с помощью формулы $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, представим $f(x)$ в виде суммы двух функций специального вида $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. В этом случае частное решение $y_{\text{чн}}$ есть сумма частных решений $y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}$, где $y_{1\text{чн}}$, $y_{2\text{чн}}$ – решения уравнений $y^{(IV)} + 2y'' = \frac{1}{2}$ и $y^{(IV)} + 2y'' = \frac{1}{2}\cos 2x$, соответственно.

Найдем частное решение $y_{1\text{чн}}$. Так как $f_1(x) = \frac{1}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $P_m(x) = 0$ – многочлен нулевой степени, то и $y_{1\text{чн}}$ разыскиваем в виде многочлена нулевой степени: $y_{1\text{чн}} = A$. Поскольку число $\alpha + i\beta = 0$ является двукратным корнем характеристического уравнения, искомое частное решение следует умножить на x^2, т.е. $r = 2$. Итак, частное решение имеет вид $y_{1\text{чн}} = Ax^2$, где A – постоянная, подлежащая определению. Так как $y_{\text{чн}}$ – некоторое частное решение исходного дифференциального уравнения, то при подстановке $y_{\text{чн}}$ в это уравнение оно должно обращаться в тождество. Вычислим производные от $y_{1\text{чн}}$ и подставим $y''_{1\text{чн}}$, $y^{(IV)}_{1\text{чн}}$ в уравнение $y^{(IV)} + 2y'' = \frac{1}{2}$: $y'_{1\text{ч}} = 2Ax$, $y''_{1\text{ч}} = 2A$, $y'''_{1\text{ч}} = y^{(IV)}_{1\text{ч}} = 0$. Получим уравнение $4A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{8}$, следовательно, $y_{1\text{ч}} = \frac{1}{8}x^2$.

Найдем частное решение $y_{2\text{чн}}$. Так как $f_2(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$, $\alpha=0$, $\beta=2$, то $y_{\text{чн}}$ ищем в виде $y_{2\text{чн}}=B\cos 2x+C\sin 2x$, где B, C – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Так как число $\alpha+i\beta=2i$ не является корнем характеристического уравнения, т.е. $r=0$, множитель x^r в $y_{2\text{чн}}$ не содержится. Вычислим производные от $y_{2\text{чн}}$ и подставим в уравнение $y^{(IV)}+2y''=\frac{1}{2}\cos 2x$:

$$y'_{2\text{чн}}=-2B\sin 2x+2C\cos 2x,\ y''_{2\text{чн}}=-4B\cos 2x-4C\sin 2x,$$

$$y'''_{2\text{чн}}=8B\sin 2x-8C\cos 2x,\quad y^{(IV)}_{2\text{чн}}=16B\cos 2x+16C\sin 2x.$$

Получим следующее уравнение:

$$16B\cos 2x+16C\sin 2x+2\left(-4B\cos 2x-4C\sin 2x\right)=\frac{1}{2}\cos 2x$$

или $8B\cos 2x+8C\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 2x$. Это равенство будет тождеством только при совпадении коэффициентов у подобных членов ($\sin 2x$ и $\cos 2x$) в обеих его частях. Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, найдем коэффициенты B, C:

$$\begin{array}{ll}\text{при } \cos x & 8B=\frac{1}{2}\\ \text{при } \sin x & 8C=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{16},\ C=0.$$

Следовательно, $y_{2\text{чн}}=\frac{1}{16}\cos 2x$ и $y_{\text{чн}}=y_{1\text{чн}}+y_{2\text{чн}}=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}\cos 2x$. Прибавив к общему решению однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ полученное частное решение $y_{\text{чн}}$, окончательно получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}\cos 2x .$$

Ответ. $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}\cos 2x$.

Задача 3.29. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y'' = xe^{2x}$.

Р е ш е н и е. Однородное уравнение, соответствующее исходному: $y''' + y'' = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$. Так как число 0 является двукратным действительным корнем, а число -1 – действительным простым корнем, то общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} .$$

Поскольку $f(x) = xe^{2x}$, где $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $R_m(x) = x$, и число $\alpha + i\beta = 2$ не встречается среди корней характеристического уравнения, т.е. множитель x^r не содержится в $y_{\text{чн}}$, частное решение будет $y_{\text{чн}} = (Ax + B)e^{2x}$, где A и B – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Вычислим производные от $y_{\text{чн}}$ и подставим их в исходное уравнение:

$$y''_{\text{чн}} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x},\ y'''_{\text{чн}} = (8Ax + 12A + 8B)e^{2x} .$$

Получим следующее уравнение: $(8Ax + 12A + 8B)e^{2x} + (4Ax + +4A + 4B)e^{2x} = xe^{2x}$, или $12Ax + 16A + 12B = x$. Это равенство будет тождеством, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в обеих его частях:

$$\begin{array}{ll} \text{при } x^1 & 12A = 1 \\ \text{при } x^0 & 16A + 12B = 0 \end{array} \Rightarrow\ A = \frac{1}{12},\ B = -\frac{1}{9}.$$

Следовательно, частное решение: $y_{\text{чн}} = \left(\frac{1}{12}x - \frac{1}{9}\right)e^{2x}$, а общее решение неоднородного уравнения: $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \left(\frac{1}{12}x - \frac{1}{9}\right)e^{2x}$.

Ответ. Общее решение уравнения: $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \left(\frac{1}{12}x - \frac{1}{9}\right)e^{2x}$.

Задача 3.30. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \cos x + 2e^{-x}$.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, представляющей собой сумму двух функций специального вида. Соответствующим однородным уравнением для исходного будет уравнение $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Числа $\lambda_{1,2} = \pm i$ являются комплексными простыми корнями характеристического уравнения, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Правая часть данного уравнения является суммой двух функцией специального вида $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = 2e^{-x}$. В этом случае частное решение $y_{\text{чн}}$ есть сумма соответствующих частных решений $y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}$, где $y_{1\text{чн}}$, $y_{2\text{чн}}$ – решения уравнений $y'' + y = \cos x$ и $y'' + y = 2e^{-x}$ соответственно.

Найдем $y_{1\text{чн}}$. Так как $f_1(x) = \cos x$, т.е. $\alpha = 0, \beta = 1$, то $y_{1\text{чн}}$ разыскиваем в виде $A\sin x + B\cos x$. Поскольку число $\alpha + i\beta = i$ является простым корнем характеристического уравнения, искомое частное решение следует умножить на x.

Итак, частное решение имеет вид $y_{1\text{чн}} = x(A\sin x + B\cos x)$. Подставляя в уравнение $y'' + y = \cos x$ полученные производные

$$y'_{1\text{чн}} = x\left(A\cos x - B\sin x\right) + A\sin x + B\cos x\,,$$

$$y''_{1\text{чн}} = x\left(-A\sin x - B\cos x\right) + 2\left(A\cos x - B\sin x\right),$$

найдем коэффициенты A и B из уравнения

$$x\left(-A\sin x - B\cos x\right) + 2\left(A\cos x - B\sin x\right) +$$

$$+x\left(A\sin x + B\cos x\right) = \cos x\,,$$

или $2A\cos x - 2B\sin x = \cos x$. Это равенство будет тождеством только при совпадении коэффициентов у подобных членов $\sin x$ и $\cos x$ в обеих его частях:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \cos x & 2A = 1 \\ \text{при } \sin x & -2B = 0 \end{array} \Rightarrow\ A = \frac{1}{2},\ B = 0\,.$$

Следовательно, $y_{1\text{ч}} = \frac{x}{2}\sin x$.

Найдем $y_{2\text{чн}}$. Так как $f_2(x) = 2e^{-x}$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, то $y_{\text{чн}}$ разыскиваем в виде $y_{2\text{чн}} = Ce^{-x}$, где C – постоянная, подлежащая определению. Поскольку число $\alpha + i\beta = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то множитель x^r в $y_{2\text{чн}}$ не содержится. Вычислим производные от $y_{2\text{чн}}$ и подставим их в уравнение $y'' + y = 2e^{-x}$. Получим уравнение $2Ce^{-x} = 2e^{-x}$, откуда $C = 1$. Следовательно, $y_{2\text{чн}} = e^{-x}$ и $y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}} = \frac{x}{2}\sin x + e^{-x}$. Прибавив к общему решению однородного уравнения полученное частное решение, окончательно будем иметь общее решение неоднородного уравнения: $y_{\text{он}} = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{x}{2}\sin x + e^{-x}$.

Ответ. $y_{\text{он}} = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{x}{2}\sin x + e^{-x}$.

Задача 3.31. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x .$$

Р е ш е н и е . Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее исходному дифференциальному уравнению: $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Корни являются комплексными простыми, поэтому общее решение однородного уравнения $y_{оо} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Так как $f(x) = 2\sin x + 4x\cos x$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $l = \max(1,0) = 1$, то $y_{чн}$ разыскиваем в виде $(Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$. Поскольку число $\alpha + i\beta = i$ является простым корнем характеристического уравнения, искомое частное решение следует умножить на x. Итак, частное решение:

$$y_{чн} = x\big((Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x\big),$$

где A, B, C, D − постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Вычислим производные и подставим их в исходное уравнение:

$$y'_{чн} = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x +$$

$$+x\big(A\sin x + (Ax + B)\cos x + C\cos x - (Cx + D)\sin x\big),$$

$$y''_{чн} = 2\big(A\sin x + (Ax + B)\cos x + C\cos x - (Cx + D)\sin x\big) +$$

$$+x\big(2A\cos x - (Ax + B)\sin x - 2C\sin x - (Cx + D)\cos x\big)$$

и после упрощений получим

$$2\big(A\sin x + (Ax + B)\cos x + C\cos x - (Cx + D)\sin x\big) +$$

$$+x\big(2A\cos x - 2C\sin x\big) = 2\sin x + 4x\cos x .$$

Это равенство будет тождеством только при совпадении коэффициентов у подобных членов $\sin x, x\sin x, \cos x, x\cos x$ в обеих его частях:

$$\begin{array}{ll} \text{при} \quad \sin x & 2A-2D=2 \\ \text{при} \quad x\sin x & -4C=0 \\ \text{при} \quad \cos x & 4A=4 \\ \text{при} \quad x\cos x & 2B+2C=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=0.$$

Следовательно, частное решение: $y_{\text{чн}}=x^2\sin x$, а общее решение неоднородного уравнения: $y_{\text{он}}=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2\sin x$.

Ответ. Общее решение уравнения $y_{\text{он}}=C_1\sin x+C_2\cos x+$ $+x^2\sin x$.

Задача 3.32. Найти общее решение уравнения $y'''-y''=-3x+1$.

Р е ш е н и е. Соответствующим однородным уравнением для исходного будет уравнение $y'''-y''=0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3-\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=1$. Так как число 0 является двукратным действительным корнем характеристического уравнения, а число 1 − действительным простым корнем, то общее решение однородного уравнения: $y_{\text{оо}}=C_1+C_2x+C_3e^x$. Так как $f(x)=-3x+1$, $\alpha=0$, $\beta=0$, то $y_{\text{чн}}$ разыскиваем в виде $Ax+B$. Поскольку число $\alpha+i\beta=0$ является двукратным корнем характеристического уравнения, искомое частное решение следует умножить на x^2. Итак, частное решение: $y_{\text{чн}}=(Ax+B)x^2=Ax^3+Bx^2$, где A, B − постоянные коэффициенты. Поскольку

$$y'_{\text{чн}}=3Ax^2+2Bx,\ y''_{\text{чн}}=6Ax+2B,\ y'''_{\text{чн}}=6A,$$

получим уравнение $6A-6Ax-2B=-3x+1$. Это равенство будет тождеством, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в обеих его частях. Приравнивая коэффициенты при x^1 и x^0, получим систему уравнений для нахождения A, B:

$$\begin{array}{ll} \text{при } x^1 & -6A=-3 \\ \text{при } x^0 & 6A-2B=1 \end{array} \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2},\ B=1.$$

Следовательно, частное решение уравнения: $y_{\text{чн}}=\frac{1}{2}x^3+x^2$, а общее решение неоднородного уравнения: $y_{\text{он}}=C_1+C_2x+C_3e^x+$ $+\frac{x^3}{2}+x^2$.

Ответ. Общее решение уравнения: $y_{\text{он}}=C_1+C_2x+C_3e^x+\frac{x^3}{2}+x^2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 4251 – 4261, 4262 – 4264, 4283 – 4287.*

3.2.5. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Задача 3.33. Найти общее решение системы $\begin{cases} x_t'=2x+y, \\ y_t'=3x+4y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим два способа решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

I способ. Систему двух уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций сведем к одному уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции.

Продифференцируем первое уравнение системы $x''=2x'+y'$ и подставим в него $y'=3x+4y$ из второго уравнения системы $x''=2x'+3x+4y$. Далее разрешим первое уравнение системы относительно y: $y=x'-2x$ и подставим y в выражение для x'':

$$x''=2x'+3x+4\left(x'-2x\right) \text{ или } x''-6x+5x=0.$$

Полученное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (см. п. 3.2.2). Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$. Следовательно, общее решение имеет вид $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$. Подставим $x(t)$ в $y = x' - 2x$:

$$y(t) = x'(t) - 2x(t) = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t} =$$

$$= -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Таким образом, общее решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

II способ. Решим систему с помощью матричного метода. Введем обозначения:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

где A – матрица из коэффициентов при неизвестных, и запишем исходную систему в виде матричного дифференциального уравнения $z' = Az$. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$, т.е. матрица A имеет простой спектр. В случае простого спектра матрицы A решение системы выписывается в виде

$$z = C_1 e^{\lambda_1 t}\,\overline{a} + C_2 e^{\lambda_2 t}\,\overline{b},$$

где λ_1 и λ_2 – собственные числа (спектр); $\overline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $\overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – соответствующие λ_1 и λ_2 собственные векторы матрицы A.

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 3 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a_1+a_2=0$ или $a_1=-a_2$, следовательно, приняв $a_1=1$, получим $\overline{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 3 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $-3b_1+b_2=0$ или $3b_1=b_2$, следовательно, приняв $b_1=1$, получим $\overline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Таким образом, решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1 e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{cases} x(t)=C_1e^t+C_2e^{5t}, \\ y(t)=-C_1e^t+3C_2e^{5t}. \end{cases}$

Задача 3.34. Найти общее решение системы $\begin{cases} x_t' = 2y - 5x + e^t, \\ y_t' = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Систему двух уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций сведем к одному уравнению второго порядка относительно одной неизвестной функции. Продифференцируем первое уравнение системы:

$$x'' = 2y' - 5x' + e^t .$$

Подставим в полученное равенство y' из второго уравнения системы $y' = x - 6y + e^{-2t}$:

$$x'' = 2\left(x - 6y + e^{-2t}\right) - 5x + e^t \text{ или } x'' = 2x - 12y + 2e^{-2t} - 5x' + e^t .$$

Из первого уравнения системы выразим y: $y = \frac{1}{2}\left(x' + 5x - e^t\right)$ и подставим в выражение для x'':

$$x'' = 2x - 12\frac{1}{2}\left(x' + 5x - e^t\right) - 5x' + 2e^{-2t} + e^t$$

или

$$x'' + 11x' + 28x = 2e^{-2t} + 7e^t .$$

Получили уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Его общее решение есть сумма общего решения $x_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо его частного решения $x_{\text{чн}}$, т.е. $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$. Соответствующим однородным уравнением будет уравнение $x'' + 11x' + 28x = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = -7$. Корни являются действительными простыми, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{оо}}(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$.

Так как $f(x)=2e^{-2t}+7e^{t}$, $\alpha_1=-2$, $\beta_1=0$ $\alpha_2=1$, $\beta_2=0$ и числа $\alpha+i\beta=-2$ и $\alpha+i\beta=1$ не встречаются среди корней характеристического уравнения, то $x_{\text{чн}}$ разыскиваем в виде (см. п. 3.2.4)

$$x_{\text{чн}}(t)=Ae^{-2t}+Be^{t},$$

где A, B – постоянные коэффициенты, которые найдем, подставляя производные в уравнение $x''+11x'+28x=2e^{-2t}+7e^{t}$. Так как

$$x'_{\text{чн}}=-2Ae^{-2t}+Be^{t},\ x''_{\text{чн}}=4Ae^{-2t}+Be^{t},$$

то

$$4Ae^{-2t}+Be^{t}+11\left(-2Ae^{-2t}+Be^{t}\right)+28\left(Ae^{-2t}+Be^{t}\right)=2e^{-2t}+7e^{t}.$$

Приравняем коэффициенты при подобных слагаемых:

$$\begin{array}{ll}\text{при } e^{-2t} & 4A-22A+28A=2\\ \text{при } e^{t} & B+11B+28B=7\end{array}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{5},\ B=\frac{7}{40}.$$

Таким образом, частное решение уравнения: $x_{\text{чн}}(t)=\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{7}{40}e^{t}$, и его общее решение: $x_{\text{он}}(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{7}{40}e^{t}$.

Из уравнения $y=\frac{1}{2}\left(x'+5x-e^{t}\right)$ найдем общее решение $y_{\text{он}}$:

$$y_{\text{он}}(t)=\frac{1}{2}\Bigg(-4C_1e^{-4t}-7C_2e^{-7t}-\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{7}{40}e^{t}+$$

$$+5C_1e^{-4t}+5C_2e^{-7t}+e^{-2t}+\frac{7}{8}e^{t}-e^{t}\Bigg)$$

или

$$y_{\text{он}}(t)=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^{t}+\frac{3}{10}e^{-2t}.$$

Ответ. Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_{\text{он}}(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{7}{40}e^{t}, \\ y_{\text{он}}(t)=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^{t}+\frac{3}{10}e^{-2t}. \end{cases}$$

• *Рекомендуем решить задачи: № 4324 – 4339.*

ГЛАВА 4
РЯДЫ

4.1. Числовые ряды

Числовым рядом называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где a_n – действительные числа; a_n – *n-й член ряда*.

Число

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

называется *N-й частичной суммой* числового ряда.

Если существует предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S,$$

то число S называется *суммой числового ряда*, а сам ряд является *сходящимся*. В противном случае говорят, что ряд *расходится*.

Необходимый признак сходимости. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.1.1. Знакоположительные ряды

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны, т.е. $a_n \geq 0$, называется *знакоположительным числовым рядом*.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ называется *обобщенным гармоническим рядом*, он сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Для исследования знакоположительных числовых рядов на сходимость существует ряд признаков, применение которых рассмотрим на примерах.

Признак Даламбера. *Если для знакоположительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *то ряд сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$. *Если* $q = 1$, *то о сходимости* (*или расходимости*) *ряда ничего сказать нельзя.*

Задача 4.1. Указать ряды, которые можно исследовать на сходимость по признаку Даламбера:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n + 2n^3}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{n}\right)$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{\left(n^2 + 1\right)4^n}$.

Р е ш е н и е. Применим признак Даламбера к предложенным рядам: выпишем a_n и a_{n+1} и найдем предел их отношения $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n + 2n^3}$.

Общий член ряда $a_n = \dfrac{n^2}{1+n+2n^3}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{1+(n+1)+2(n+1)^3}$,

предел их отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\left(1+n+2n^3\right)}{\left(1+(n+1)+2(n+1)^3\right)n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\,2n^3}{2(n+1)^3\,n^2} = 1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает заключения о сходимости ряда.

Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n}\right)$.

Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n!}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n}\right)$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n+1}\right)$,

предел их отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n+1}\right)\cdot n!}{(n+1)!\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5}{n+1}n!}{(n+1)!\,\dfrac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится. При вычислении предела $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{n+1}\right)$ заменили эквивалентными при $n\to\infty$ функциями $\dfrac{5}{n}$ и $\dfrac{5}{n+1}$ соответственно.

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{\left(n^2+1\right)4^n}$.

Общий член ряда $a_n = \frac{n \cdot 5^n}{\left(n^2+1\right)4^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)5^{n+1}}{\left((n+1)^2+1\right)4^{n+1}}$, предел их отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}\left(n^2+1\right)4^n}{\left((n+1)^2+1\right)4^{n+1} n \cdot 5^n} = \frac{5}{4} > 1.$$

Ряд расходится.

Ответ. Ряд Б сходится, ряд В расходится по признаку Даламбера.

Радикальный признак Коши. *Если для знакоположительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *то ряд сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$. *Если* $q = 1$, *то о сходимости* (*или расходимости*) *ряда ничего сказать нельзя.*

Задача 4.2. Указать ряды, которые можно исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2+n^4}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Применим признак к предложенным рядам: выпишем a_n и найдем предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2+n^4}$.

Общий член ряда $a_n = \dfrac{n^3}{2+n^4}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2+n^4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Для вычисления последнего предела рассмотрим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\frac{1}{x}}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$, а предел в показателе вычислим, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1$ и признак не дает заключения о сходимости ряда.

Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Общий член ряда $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{4^n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{4} = \frac{e}{4} < 1.$$

Ряд сходится.

В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\ln^n(n+1)}$.

Общий член ряда $a_n = \dfrac{n}{\ln^n(n+1)}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

Ответ. Ряды Б и В сходятся по радикальному признаку Коши.

Признак сравнения (в форме неравенств). *Пусть для знакоположительных числовых рядов* 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* 2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *общие члены рядов удовлетворяют неравенству* $a_n \le b_n$, *начиная с некоторого номера* $n \in \mathbf{N}$. *Тогда из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1) *и из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).

Признак сравнения (в предельной форме). *Пусть для знакоположительных числовых рядов* 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* 2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *общие члены рядов удовлетворяют равенству* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \text{const} \ne 0$, *тогда ряды* 1) *и* 2) *сходятся или расходятся одновременно.*

Интегральный признак Коши. *Знакоположительный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно при условии* $f(n) = a_n$ *и* $f(x)$ *– монотонно убывающая при* $x \to \infty$ *функция.*

Задача 4.3. Указать ряды, сходимость которых можно установить по признаку сравнения в форме неравенств:

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\pi n}{4}}{n^2+5}$; Б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+5)}{n^3}$; Г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$.

Р е ш е н и е. Применим признак к исследованию предложенных рядов.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)}{n^2+5}$.

Так как $0 < \operatorname{arctg}\dfrac{\pi n}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, то для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)}{n^2+5} < \frac{\pi/2}{n^2+5} < \frac{\pi}{2n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ($2 > 1$), и, следовательно, исходный ряд сходится.

Б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Оценим общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ сверху дробью $\dfrac{1}{n^s}$, т.е. определим, при каких $s \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{n \ln n} < \dfrac{1}{n^s}$ для всех $n > 2$. Для этого найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n \ln n}}{\dfrac{1}{n^s}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{s-1}}{\ln n}$, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(s-1)x^{s-2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} (s-1)x^{s-1} = 0 \text{ при } s < 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\ln n}}{\dfrac{1}{n^s}}=0$ и $\dfrac{1}{n\ln n}<\dfrac{1}{n^s}$ при $s<1$. При $s<1$ обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ расходится, и сделать вывод о сходимости или расходимости исследуемого ряда из полученной оценки нельзя.

Аналогично получим оценку общего члена ряда снизу: $\dfrac{1}{n\ln n}>\dfrac{1}{n^s}$ для всех $n\geq 2$, вычислив $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\ln n}}{\dfrac{1}{n^s}}=\infty$ при $s>1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ сходится при $s>1$, следовательно, вывод о сходимости или расходимости ряда из полученной оценки сделать нельзя.

Подобрать эффективную, позволяющую применить признак сравнения, оценку в данном случае затруднительно.

Исследуем ряд с помощью интегрального признака Коши. Так как $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}<\dfrac{1}{n\ln n}$ для всех $n\geq 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln n}=0$, то исследуемый ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_{2}^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to\infty}\int_{2}^{A}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{A\to\infty}\ln\left|\ln x\right|\Big|_{2}^{A}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\ln\left|\ln A\right|-\ln\left|\ln 2\right|\right)=\infty,$$

т.е. интеграл расходится, следовательно, и исследуемый ряд расходится.

В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+5)}{n^3}$.

Для общего члена ряда верна оценка $\dfrac{\ln(n+5)}{n^3} \le \dfrac{n+5}{n^3}$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Так как общие члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^3}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ эквивалентны при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический (степень n в знаменателе $2 > 1$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n^3}$ также сходится по признаку сравнения в предельной форме. Следовательно, в силу имеющейся оценки исследуемый ряд сходится.

Г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n-1}{n^2+3}$.

Для общего члена ряда верна оценка $\dfrac{4n-1}{n^2+3} \le \dfrac{4}{n}$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – гармонический, т.е. расходящийся, следовательно, из полученной оценки с помощью признака сравнения в форме неравенств сделать заключение о сходимости исследуемого ряда нельзя.

Ответ. Ряды А и В сходятся по признаку сравнения в форме неравенств.

Задача 4.4. Указать ряды, сходимость которых можно установить по признаку сравнения в предельной форме:

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{(n+2)^3}}{n^4+3n^2+1}$; Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}^n n}{n^{10}+100n}$; В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{3n^5}\right)$;

Г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n^2+4}\right)^2$; Д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\arcsin\dfrac{1}{n}}$.

Р е ш е н и е. Применим признак сравнения в предельной форме к исследованию предложенных рядов.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{(n+2)^3}}{n^4+3n^2+1}$.

Сравним общий член ряда с общим членом обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, где степень $p>0$ подберем так, чтобы n-й член исходного ряда и $\dfrac{1}{n^p}$ были эквивалентны, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{(n+2)^3}}{n^4+3n^2+1}:\dfrac{1}{n^p}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p\cdot n^{3/2}}{n^4}=1$. Полученное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $p+\dfrac{3}{2}-4=0 \Leftrightarrow p=\dfrac{5}{2}$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/2}}$ сходится, так как степень n в знаменателе $\dfrac{5}{2}>1$, следовательно, исследуемый ряд сходится.

Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}^n n}{n^{10}+100n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n=\dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\operatorname{arctg}^n n}{n^{10}+100n}\sim\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n}{n^{10}}$ при $n\to\infty$, и исследуемый ряд будет сходиться или расходиться одновременно с ря-

дом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n^{10}}$. Применяя десять раз правило Лопиталя для вычисления предела $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n^{10}}$, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^x}{x^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^x \ln^{10}\frac{\pi}{2}}{10!} = \infty,$$

значит, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n^{10}}$ не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, он является расходящимся рядом, а значит, и исследуемый ряд расходится.

В) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3n^5}\right)$.

Так как $\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3n^5}\right) \sim \frac{\pi}{3n^5}$ при $n \to \infty$, то $n^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3n^5}\right) \sim$ $\sim n^3 \frac{\pi}{3n^5} = \frac{\pi}{3n^2}$, т.е. общие члены исследуемого ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n^2}$ эквивалентны. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3n^2} = \frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ($2 > 1$), следовательно, и исходный ряд сходится по признаку сравнения в предельной форме.

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+4}\right)^2$.

Так как $n+2 \sim n$, $n^2+4 \sim n^2$, то $\left(\dfrac{n+2}{n^2+4}\right)^2 \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, т.е. общие члены исходного ряда и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ эквивалентны.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический (степень n в знаменателе равна $2 > 1$), следовательно, и исходный ряд сходится по признаку сравнения в предельной форме.

Д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\arcsin \dfrac{1}{n}}$.

Общие члены исходного ряда и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ эквивалентны, так как $\arcsin \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sqrt{\arcsin \dfrac{1}{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как обобщенный гармонический $\left(\text{степень } n \text{ в знаменателе } \dfrac{1}{2}<1\right)$, следовательно, и исходный ряд расходится по признаку сравнения в предельной форме.

Ответ. Ряды А, В и Г сходятся по признаку сравнения в предельной форме.

Задача 4.5. Указать ряды, сходимость которых можно установить по интегральному признаку Коши:

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(n^2+1\right)\operatorname{arctg}^3 n}$; Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n}}$;

В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$; Г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^{10}+1}}{\sqrt[3]{n^8+n+1}}$.

Р е ш е н и е. Применим интегральный признак Коши к исследованию предложенных рядов.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n^2+1\right)\operatorname{arctg}^3 n}$.

Функция $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}^3 x}$ – монотонно убывающая при $x\to\infty$, так как функции x^2+1 и $\operatorname{arctg}^3 x$ монотонно возрастающие, поскольку их производные $\left(x^2+1\right)'=2x>0$, $\left(\operatorname{arctg}^3 x\right)'=$ $=3\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}>0$ для всех $x\ge 1$. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}^3 x}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d\operatorname{arctg}x}{\operatorname{arctg}^3 x}=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 x}\Bigg|_1^{A}\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 A}+\frac{1}{2\operatorname{arctg}^2 1}\right)=\frac{8}{\pi^2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исходный ряд сходится.

Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n}}$.

Так как $\ln\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)\sim\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ при $n\to\infty$, то общий член исходного ряда эквивалентен общему члену расходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}\sqrt[3]{n}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/6}}$ $\left(\text{степень } n \text{ в знаменателе } \dfrac{5}{6}<1\right)$,

следовательно, исходный ряд расходится по признаку сравнения в предельной форме.

В) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Функция $e^{1/\sqrt{x}}$ является монотонно убывающей при $x \to \infty$, так как ее производная $\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} < 0$ для всех $x \geq 1$. Исследуем на сходимость интеграл этой функции, заменяя переменную $\sqrt{x} = t$, $1 \leq t < \infty$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ и $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} 2te^{-t} dt$.

Далее интегрируем по частям:

$$\int_1^{\infty} 2te^{-t} dt = 2 \lim_{A\to\infty}\left(-\int_1^{A} tde^{-t}\right) = 2 \lim_{A\to\infty}\left(-te^{-t}\Big|_1^{A} + \int_1^{A} e^{-t} dt\right) =$$

$$= 2 \lim_{A\to\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t}\Big|_1^{A}\right) = 2 \lim_{A\to\infty}\left(-Ae^{-A} - e^{-A} + e^{-1} + e^{-1}\right) = \frac{4}{e}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исходный ряд сходится.

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^{10}+1}}{\sqrt[3]{n^8+n+1}}$.

Общий член исследуемого ряда $\frac{\sqrt[4]{n^{10}+1}}{\sqrt[3]{n^8+n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$ $\left(\text{так как степень } n \text{ в числителе } \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ меньше степени } n \text{ в знаменателе } \frac{8}{3} = \frac{16}{6} > \frac{15}{6} = \frac{5}{2}\right)$. Рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^{10}+1}}{\sqrt[3]{x^8+n+1}} dx$.

Так как $\dfrac{\sqrt[4]{x^{10}+1}}{\sqrt[3]{x^8+n+1}} \sim \dfrac{x^{5/2}}{x^{8/3}} = \dfrac{1}{x^{1/6}}$ при $x \to \infty$, а интеграл $\int\limits_1^A \dfrac{dx}{x^{1/6}}$ расходится $\left(\text{степень } x \text{ в знаменателе интегрируемой дроби равна } \dfrac{1}{6}<1\right)$, то расходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^{10}+1}}{\sqrt[3]{x^8+n+1}}dx$, следовательно, расходится исследуемый ряд.

Ответ. Ряды А и В сходятся по интегральному признаку Коши.

• *Рекомендуем решить задачи: № 2737 – 2770.*

4.1.2. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n ,$$

где $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Признак Лейбница. *Знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *сходится, если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– монотонно убывающая, т.е.* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$, *и общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно*, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Задача 4.6. Среди указанных рядов выбрать условно сходящиеся:

$$\text{А)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+10)}{n^4+n^2+1};\quad \text{Б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3+4};$$

$$\text{В)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\sin\frac{1}{n^2}.$$

Р е ш е н и е. Исследуем предложенные ряды на условную сходимость.

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+10)}{n^4+n^2+1}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+10)}{n^4+n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+10)}{n^4+n^2+1}$ сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, так как $\frac{(n+10)}{n^4+n^2+1} \sim \frac{1}{n^3}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как обобщенный гармонический, у которого степень n в числителе $3 < 1$, следовательно, по признаку сравнения в предельной форме ряд из абсолютных величин сходится и исследуемый ряд сходится абсолютно.

Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3+4}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3+4}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$ расходится по признаку сравнения в предельной форме, поскольку $\frac{n^2}{n^3+4} \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

В исходном знакочередующемся ряде $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3+4}=0$ и $u_n=\dfrac{n^2}{n^3+4}<\dfrac{(n+1)^2}{n^3+4}<\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^3+4}=u_{n+1}$, следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница. Значит, исследуемый ряд сходится условно.

В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,n\sin\dfrac{1}{n^2}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\,n\sin\dfrac{1}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n^2}$ расходится по признаку сравнения в предельной форме, поскольку $\sin\dfrac{1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический, расходится. В исходном знакочередующемся ряде $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ и $u_n=n\sin\dfrac{1}{n^2}<(n+1)\sin\dfrac{1}{(n+1)^2}=u_{n+1}$, следовательно, ряд сходится по признаку Лейбница, значит, исследуемый ряд сходится условно.

Ответ. Ряды Б и В сходятся условно.

Задача 4.7. Среди указанных рядов выбрать абсолютно сходящиеся ряды:

$$\text{А)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+5}{n+6}\right)^{n^2};\quad \text{Б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n-3};$$

$$\text{В)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\sqrt{n^3}};\quad \text{Г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{50n^2+1}.$$

Р е ш е н и е. Исследуем предложенные ряды на абсолютную сходимость.

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n+5}{n+6}\right)^{n^2}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\dfrac{n+5}{n+6}\right)^{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+6}\right)^{n^2}$ сходится по радикальному признаку Коши, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{n+6}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+6}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+6}\right)^{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+6}\right)} = e^{-1} < 1.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5n-3}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5n-3} = 0$ и $u_n = \dfrac{1}{5n-3} < \dfrac{1}{5(n+1)-3} = u_{n+1}$, исследуемый ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{5n-3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n-3}$ расходится по признаку сравнения в предельной форме, так как $\dfrac{1}{5n-3} \sim \dfrac{1}{5n}$ при $n\to\infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n} = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся. Следовательно, исследуемый ряд сходится условно.

В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,\mathrm{arctg}^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\sqrt{n^3}}$.

Так как $\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$ и $1+\sqrt{n^3} \sim n^{3/2}$, то $\frac{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\sqrt{n^3}} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^{3/2}} = n^{13/6}$, при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$ сходится как обобщенный гармонический $\left(\text{степень } n \text{ в знаменателе равна } \frac{13}{6} > 1\right)$, следовательно, ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1+\sqrt{n^3}}$ сходится по признаку сравнения в предельной форме, значит, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{50n^2+1}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{50n^2+1} = 0$ и $u_n = \frac{n}{50n^2+1} < \frac{n+1}{50n^2+1} < \frac{n+1}{50(n+1)^2+1} = u_{n+1}$, рассматриваемый ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{50n^2+1}$ расходится по признаку сравнения в предельной форме, так как $\frac{n}{50n^2+1} \sim \frac{n}{50n^2} = \frac{1}{50n}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{50n} = \frac{1}{50}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся. Следовательно, исследуемый ряд сходится условно.

Ответ. Ряды А и В сходятся абсолютно.

• *Рекомендуем решить задачи: № 2790 – 2799.*

4.2. Функциональные ряды

4.2.1. Функциональные и степенные ряды

Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (4.1)$$

членами которого являются функции от x, определенные на множестве D, называется *функциональным рядом*. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, где $x_0 \in D$, то x_0 называется *точкой сходимости* ряда (4.1). Множество всех точек сходимости ряда (4.1) называется *областью сходимости* ряда (4.1). Если существует $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, где $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$, $x \in X$, то говорят, что ряд (4.1) сходится на множестве X к $S(x)$. $S(x)$ называется *суммой ряда* (4.1).

Для нахождения области сходимости ряда (4.1) можно использовать достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Задача 4.8. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

Р е ш е н и е. Все члены $u_n = \frac{1}{n^2 + x^2}$ данного ряда положительны. Сравним этот ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, так как степень n в знаменателе $2 > 1$:

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}.$$

Это неравенство выполняется при любых x, следовательно, областью сходимости исходного ряда является вся числовая ось или $x \in (-\infty, +\infty)$.

О т в е т. Ряд сходится при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Задача 4.9. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n!$

Р е ш е н и е . Члены ряда в зависимости от x могут быть как положительными, так и отрицательными. Поскольку для нахождения области сходимости функционального ряда часто используют признаки сходимости знакоположительных рядов, прежде всего нужно составить ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n n!$$

Применим к этому знакоположительному ряду признак Даламбера, т.е. найдем предел отношения $(n+1)$-го члена ряда к n-му при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{|x|^n n!} = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \text{ при } x \neq 0 .$$

Полученный предел больше 1, следовательно, при $x \neq 0$ ряд из абсолютных величин расходится.

Вопрос о сходимости ряда при $x = 0$ решим непосредственной подстановкой нуля в исходный ряд вместо x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n n! = \sum_{n=1}^{\infty} 0^n \cdot n! = 0 \cdot 1! + 0 \cdot 2! + \ldots + 0 \cdot n! + \ldots =$$

$$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

Сумма этого ряда равна 0, следовательно, исходный ряд сходится при $x = 0$.

Для нахождения области сходимости исходного ряда можно было бы найти предел его общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} x^n n! = \begin{cases} \infty, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

и по необходимому признаку сделать вывод о расходимости ряда при $x \neq 0$. Рассуждения о сходимости ряда при $x = 0$ см. выше.

Ответ. Ряд сходится при $x = 0$.

Задача 4.10. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1 + \sin x}$.

Р е ш е н и е. Имеет место очевидное равенство $-1 \le \sin x \le 1$, следовательно, $n \le n + 1 + \sin x \le n + 2$, откуда на основании свойства неравенства, члены которого положительны $\left(0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}\right)$:

$$\frac{1}{n + 1 + \sin x} \ge \frac{1}{n + 2}. \tag{4.2}$$

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1 + \sin x}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2}$ по признаку сравнения в форме неравенств. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ является остатком гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, который расходится, но тогда расходится и его остаток $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2}$. На основании (4.2), если ряд с меньшими членами расходится, то ряд с большими членами также расходится, т.е. исходный ряд является расходящимся при всех x.

Ответ. Ряд расходится при любых значениях x.

Задача 4.11. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(n+1)^2 2^n}$.

Р е ш е н и е. Для нахождения области сходимости степенных рядов чаще всего используется признак сходимости Даламбера для знакопо-

ложительных рядов. Данный ряд является знакоположительным. Найдем предел отношения его $(n+1)$-го члена к n-му при $n \to \infty$:

$$u_n(x) = \frac{n^2 x^{2n}}{(n+1)^2 2^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^2 x^{2(n+1)}}{(n+2)^2 2^{n+1}}$$

($u_{n+1}(x)$ получен из $u_n(x)$ заменой n на $n+1$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x^{2(n+1)} (n+1)^2 2^n}{(n+2)^2 2^{n+1} n^2 x^{2n}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n+1)^2}{(n+2)^2 n^2} = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 n^2}{n^2 n^2} = \frac{x^2}{2},$$

так как $(n+1)^2 \sim n^2$, $(n+2)^2 \sim n^2$ при $n \to \infty$.

По признаку Даламбера ряд сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ меньше 1, и расходится, если этот предел больше 1. Следовательно, для сходимости исследуемого ряда достаточно выполнить неравенство $\frac{x^2}{2} < 1$, решением которого будет множество x, удовлетворяющих неравенству: $|x| < \sqrt{2}$ или $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Таким образом, ряд сходится при $|x| < \sqrt{2}$ и расходится при $|x| > \sqrt{2}$.

Исследуем вопрос о сходимости данного ряда в точках $x = \pm\sqrt{2}$ непосредственной подстановкой этих значений в исходный функциональный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \left(\pm\sqrt{2}\right)^{2n}}{(n+1)^2 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{(n+1)^2 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Предел общего члена ряда полученного числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1\neq 0$, следовательно, по необходимому признаку сходимости ряд расходится и областью сходимости исходного ряда будет интервал $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Ответ. Ряд сходится при $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Задача 4.12. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-2)^n}{n4^n}$.

Р е ш е н и е. Составим ряд из абсолютных членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-2|^n}{n\cdot 4^n}$ и исследуем его по признаку Даламбера, найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Так как

$$u_n(x)=\frac{|x-2|^n}{n4^n},\ \ u_{n+1}(x)=\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}\,n\cdot 4^n}{(n+1)4^{n+1}|x-2|^n}=$$

$$=\frac{|x-2|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-2|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\frac{|x-2|}{4}.$$

При x, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{|x-2|}{4}<1$, ряд сходится, а при $\dfrac{|x-2|}{4}>1$ ряд расходится. Решая эти неравенства, получим, что ряд из абсолютных членов сходится при $-2<x<6$ и по признаку абсолютной сходимости исходный ряд также сходится на этом интервале; при $x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$ ряд расходится.

Исследуем вопрос о сходимости данного ряда в точках $x = -2$ и $x = 6$ непосредственной подстановкой этих значений в исследуемый ряд.

При $x = -2$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-4)^n}{n \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n 4^n}{n \cdot 4^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический), следовательно, исходный ряд также расходится (умножение всех членов ряда на одно и то же число не влияет на сходимость ряда).

При $x = 6$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n}{n \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (ряд Лейбница) – сходится, так как $\frac{1}{n+1} = u_{n+1} < u_n = \frac{1}{n}$ – члены ряда образуют монотонно убывающую последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Таким образом, исследуемый ряд сходится при $x \in (-2, 6]$.

Ответ. Ряд сходится при $x \in (-2, 6]$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 2802 – 2816, 2878 – 2889.*

4.2.2. Ряды Тейлора и Маклорена

Задача 4.13. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Представим $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ и воспользуемся стандартным разложением в ряд Маклорена функции $y = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty .$$

Подставим $2x$ вместо x:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$(|2x| < \infty, \text{ то и } |x| < \infty).$$

Подставив полученное разложение для $\cos 2x$ в выражение для $\sin^2 x$, получим искомый ряд Маклорена:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \ |x| < \infty .$$

Ответ. $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty .$

Задача 4.14. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right)$.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданную функцию следующим образом:

$$\ln\left(1 + x + x^2 + x^3\right) = \ln\left((1 + x) + x^2(1 + x)\right) =$$

$$= \ln\left((1 + x)\left(1 + x^2\right)\right) = \ln(1 + x) + \ln\left(1 + x^2\right).$$

Используем стандартное разложение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1.$$

Подставим в полученное разложение x^2 вместо x, получим:

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{\left(x^2\right)^2}{2} + \frac{\left(x^2\right)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\left(x^2\right)^n}{n} + \ldots =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots, \quad |x| \le 1,$$

отсюда

$$\ln\left(1+x+x^2+x^3\right) = \ln(1+x) + \ln\left(1+x^2\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4}\ldots\right) =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^4 + \ldots, \quad -1 < x \le 1.$$

Полученный ряд можно записать с помощью общей формулы n-го члена:

$$\ln\left(1+x+x^2+x^3\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + \left(1+(-1)^n\right)(-1)^{n/2+1}}{n} x^n,$$

$$-1 < x \le 1.$$

Ответ. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^4 + \ldots, \quad -1 < x \le 1.$

Задача 4.15. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \arcsin x$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, где $|x| < 1$.

Рассмотрим биномиальный ряд:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

в который подставим $(-x^2)$ вместо x и $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-1/2} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-x^2\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n + \ldots, \quad \left|-x^2\right| < 1.$$

Упростим полученное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}x^6 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}x^{2n} + \ldots, \ |x| < 1.$$

Таким образом, получили разложение функции в степенной ряд, который можно почленно интегрировать на любом промежутке $(0, x)$, $|x| < 1$, принадлежащем интервалу сходимости этого ряда. Проинтегрируем функцию $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^1 \frac{1\cdot 3}{2!\,2^2}x^4 dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^1 \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}x^{2n}dx + \ldots, \quad |x| < 1,$$

откуда

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2!\,2^2\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\,2^3\cdot 7}x^7 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\,2^n(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!\,2^n(2n+1)}x^{2n+1}$, $|x| < 1$.

Задача 4.16. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = -2$ функцию $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 7}$.

Р е ш е н и е. Разложить функцию в окрестности точки $x = -2$ – значит разложить ее в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$.

Представим $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 7}$ в виде

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 7} = \frac{1}{(x+2)^2 + 3} = \frac{1}{3}\cdot \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{(x+2)^2}{3}\right)}$$

и воспользуемся следующим стандартным разложением функции $\dfrac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \; |x| < 1,$$

в которое подставим $-\dfrac{(x+2)^2}{3}$ вместо x:

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{(x+2)^2}{3}\right)} = 1 + \left(-\frac{(x+2)^2}{3}\right) + \left(-\frac{(x+2)^2}{3}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(-\frac{(x+2)^2}{3}\right)^n + \ldots,$$

при $\left|-\dfrac{(x+2)^2}{3}\right| < 1$.

Упростим полученное разложение:

$$\frac{1}{1+\dfrac{(x+2)^2}{3}} = 1 - \frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(x+2)^4}{3^2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$$

и найдем множество x, при которых полученный ряд сходится к $y = \dfrac{1}{x^2+4x+7}$:

$$\left|-\frac{(x+2)^2}{3}\right| < 1 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{3} < 1 \Rightarrow (x+2)^2 < 3 \Rightarrow$$

$$|x+2| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < x+2 < \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} - 2 < x < \sqrt{3} - 2.$$

Окончательно: $\dfrac{1}{x^2+4x+7}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, при $-\sqrt{3}-2<x<\sqrt{3}-2$.

Ответ. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, при $-\sqrt{3}-2<x<\sqrt{3}-2$.

• *Рекомендуем решить задачи: № 2841 – 2868.*

4.2.3. Некоторые приложения рядов

Задача 4.17. С помощью рядов вычислить приближенно $\sqrt[5]{35}$ с точностью до $0,0001$.

Р е ш е н и е. Представим $\sqrt[5]{35}=2\sqrt[5]{\dfrac{35}{32}}=2\left(1+\dfrac{3}{32}\right)^{1/5}$. Для вычисления $\sqrt[5]{35}$ используем биномиальный ряд:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$|x|<1$, в который подставим $x=\dfrac{3}{32}$:

$$\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5}=1+\frac{1}{5}\frac{3}{32}+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\left(\frac{3}{32}\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{3!}\left(\frac{3}{32}\right)^3+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{4!}\left(\frac{3}{32}\right)^4+\ldots$$

Упростим:

$$\sqrt[5]{35} = 2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{1/5} = 2+\frac{3\cdot 2}{5\cdot 32}-\frac{1\cdot 4\cdot 3^2\cdot 2}{2!\,5^2\cdot 32^2}+$$

$$+\frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 3^3}{3!\,5^3\cdot 32^3}-\frac{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9\cdot 14\cdot 3^4}{4!\,5^4\cdot 32^4}+\ldots$$

Получили справа знакочередующийся ряд. Если сумму этого ряда заменить суммой конечного числа его первых членов, то ошибка не будет превосходить по модулю модуля первого из отброшенных членов (по свойству знакочередующихся рядов). Оценим четвертый член ряда:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 9\cdot 3^3}{3!\cdot 5^3\cdot 32^3}\le\frac{1}{12\,500}<0{,}0001.$$

Следовательно, при вычислении $\sqrt[5]{35}$ все члены ряда, начиная с четвертого, можно отбросить.

$$\sqrt[5]{35}\approx 2\left(1+\frac{3\cdot 1}{5\cdot 32}-\frac{1\cdot 4\cdot 3^2}{2!\cdot 5^2\cdot 32^2}\right)=2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}\approx 2{,}0361.$$

Так как точность вычисления равна 0,0001, то в ответе должно быть четыре знака после запятой.

Ответ. $\sqrt[5]{35}\approx 2{,}0361$.

Задача 4.18. Вычислить приближенно $\int\limits_0^{0,1}\frac{dx}{1+x^2}$ с точностью до 0,00 001.

Р е ш е н и е. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, используя стандартное разложение:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\quad |x|<1,$$

в которое подставим x^2 вместо x:

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Полученный степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке, принадлежащем области сходимости этого ряда.

В данном случае будем интегрировать на отрезке $[0,\ 0{,}1] \subset (-1,\ 1)$:

$$\int_0^{0,1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{0,1} 1\,dx - \int_0^{0,1} x^2 dx + \int_0^{0,1} x^4 dx -$$

$$- \int_0^{0,1} x^6 dx + \ldots \int_0^{0,1} (-1)^n x^{2n} dx + \ldots,$$

$$\int_0^{0,1} \frac{dx}{1+x^2} = x\Big|_0^{0,1} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,1} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^{0,1} - \frac{x^7}{7}\Big|_0^{0,1} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \ldots$$

Полученный ряд – знакочередующийся, следовательно, при замене суммы ряда его частной суммой ошибка по модулю не будет превосходить модуля первого отброшенного члена

$$\frac{1}{5 \cdot 10^5} = \frac{1}{500\,000} < 0{,}00\,001,$$

поэтому можно отбросить все члены, начиная с третьего, и тогда

$$\int_0^{0,1} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0{,}1 - \frac{1}{3000} \approx 0{,}09\,967\,.$$

Так как точность вычисления равна 0,00 001, то результат нужно округлить до пятого знака после запятой.

Ответ. $\int_0^{0,1} \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}09\,967\,.$

Задача 4.19. Найти решение дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^3$ при начальных условиях $y(0) = \frac{1}{2}$ с помощью степенного ряда.

Р е ш е н и е. Решение уравнения будем искать в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + y'(0)x +$$

$$+ \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!} x^n + \ldots$$

По условию задачи имеем $y(0) = \frac{1}{2}$. Из уравнения найдем $y'(0)$:

$$y'(0) = \left(y(0)\right)^2 + 0^3 = \frac{1}{4}.$$

Последовательно дифференцируя уравнение $y' = y^2 + x^3$ и вычисляя $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{(IV)}(0)$, $y^{(V)}(0)$, получим:

$$y'' = 2yy' + 3x^2,\ y''(0) = \frac{1}{4};$$

$$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x,\ y'''(0) = \frac{3}{8};$$

$$y^{(IV)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 6,\ y^{(IV)}(0) = \frac{27}{4};$$

$$y^{(V)} = 6(y'')^2 + y'y''' + 2y'y''' + 2yy^{IV},\ y^{(V)}(0) = \frac{63}{8}.$$

Подставим полученные значения в ряд Маклорена:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ldots.$$

Ответ. $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ldots$

• *Рекомендуем решить задачи: № 2897 – 2914, 4246 – 4250.*

4.3. Ряды Фурье

Теорема Дирихле. *Если* $f(x)$ *– периодическая функция с периодом* $T = 2l$, *кусочно-гладкая на* $(-l, l)$ (*на этом интервале* $f(x)$ *и* $f'(x)$ *имеют не более конечного числа точек разрыва, притом лишь первого рода*), *то ряд*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{4.3}$$

с коэффициентами $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *сходится к* $f(x)$, *если* x *– точка непрерывности* $f(x)$, *и сходится к* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *если* x *– точка разрыва* $f(x)$, *где* $f(x-0)$ *и* $f(x+0)$ *– соответственно левый и правый пределы* $f(x)$ *в точке* x; *т.е.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \begin{cases} f(x), \text{ если } x - \text{точка непрерывности } f(x), \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \text{ если } x - \text{точка разрыва } f(x). \end{cases}$$

Выражение (4.3) – *тригонометрический ряд Фурье* для $f(x)$; a_0, a_k, b_k *– коэффициенты Фурье.*

Задача 4.20. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = h\operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$.

Р е ш е н и е. Исследуемая функция имеет следующее аналитическое представление:

$$f(x)=\begin{cases}-h, & x\in[-\pi,0),\\ h, & x\in[0,\pi),\\ 0, & x\notin[-\pi,\pi).\end{cases}$$

Продолжим функцию $f(x)$ периодично с периодом 2π на всю действительную ось. График полученной функции имеет вид (рис. 4.1).

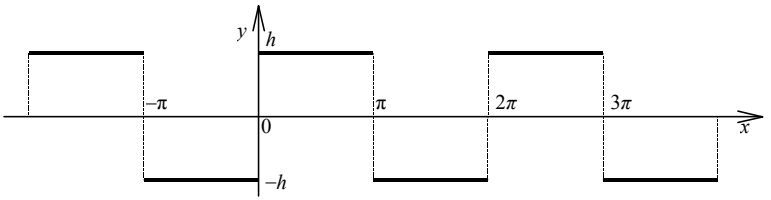


Рис. 4.1

Функция $f(x)$ является нечетной, так как $f(-x)=h\operatorname{sign}(-x)=$ $=-h\operatorname{sign}x=-f(x)$, следовательно, коэффициенты $a_k=0, k=0,1,\ldots$ и ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид:

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

где коэффициенты b_k вычисляются по формулам $b_k=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$.

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h\operatorname{sign}x\sin kx\,dx=\frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx=$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left(-\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2h}{k\pi}(1-\cos k\pi)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4h}{\pi(2m-1)}, & \text{при } k=2m-1,\\ 0, & \text{при } k=2m,\ m\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

Следовательно, по теореме Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{4h}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} = h\operatorname{sign} x, & \text{при } -\pi < x < \pi, \\ \dfrac{4h}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} = \dfrac{h+(-h)}{2}, & \text{при } x = \pi n, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{4h}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$ – ряд Фурье для функции $f(x) = h\operatorname{sign} x$.

Задача 4.21. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(-l, l)$.

Р е ш е н и е. Продолжим функцию $f(x)$ периодично с периодом $2l$ на всю действительную ось (рис. 4.2).

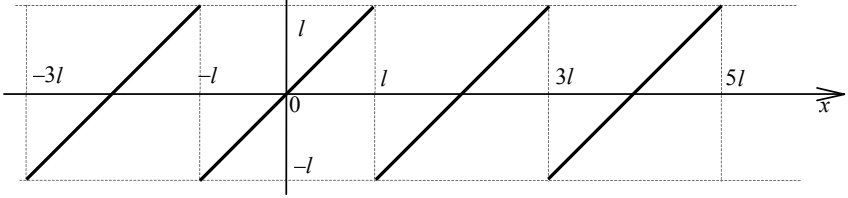


Рис. 4.2

Полученная функция является кусочно-монотонной и удовлетворяет теореме Дирихле. Так как $f(-x) = -x = -f(x)$, то функция f является нечетной, следовательно, коэффициенты $a_k = 0, k = 0, 1, \ldots$ и ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

где коэффициенты b_k вычисляются по формуле

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx\,.$$

Интегрируя по частям, получим

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{xl}{k\pi}\cos\frac{\pi k x}{l}\,\Big|_0^l + \frac{l}{k\pi}\int_0^l \cos\frac{\pi k x}{l}\,dx\right] = \frac{2l}{k\pi}(-1)^{k+1}\,.$$

Таким образом, в точках непрерывности $f(x) = x$ полученный ряд совпадает со значениями функции:

$$f(x) = x = \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \text{при } -l < x < l\,.$$

В точках разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому правого и левого пределов функции в этих точках:

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{l+(-l)}{2}\,,\ \text{при } x = (2k+1)l, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Ответ. $\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ – ряд Фурье для функции $f(x) = x$.

Задача 4.22. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

Р е ш е н и е. Исследуемая функция имеет следующее аналитическое представление:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x, x \in [-\pi, 0), \\ \sin x, x \in [0, \pi), \\ 0, x \notin [-\pi, \pi). \end{cases}$$

Продолжим функцию $f(x)$ периодично с периодом 2π на всю действительную ось. Полученная функция является кусочно-монотонной и удовлетворяет теореме Дирихле (рис. 4.3).

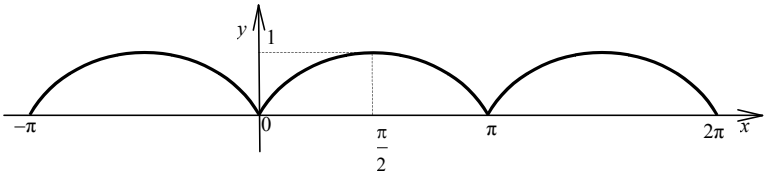


Рис. 4.3

Функция $f(x)$ является четной, так как $f(-x) = |\sin(-x)| = \sin x = f(x)$, следовательно, коэффициенты $b_k = 0, k = 1, 2, \ldots$ и ряд Фурье для данной функции:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx .$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(k+1)x - \sin(k-1)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ при нечетных } k \neq 0, \\ -\dfrac{4}{(k^2-1)\pi}, \text{ при четных } k \neq 0. \end{cases}$$

При этом $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} = 0$. Искомое разложение будет $f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{4m^2 - 1}$ ($k = 2m$ – четно) на всей числовой прямой.

Ответ. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{4m^2 - 1}$ – ряд Фурье для функции $f(x) = |\sin x|$.

Задача 4.23. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, $x \in [-l, l]$.

Р е ш е н и е. Продолжим функцию $f(x)$ периодично с периодом $2l$ на всю действительную ось. Полученная функция является кусочно-монотонной и удовлетворяет теореме Дирихле (рис. 4.4)

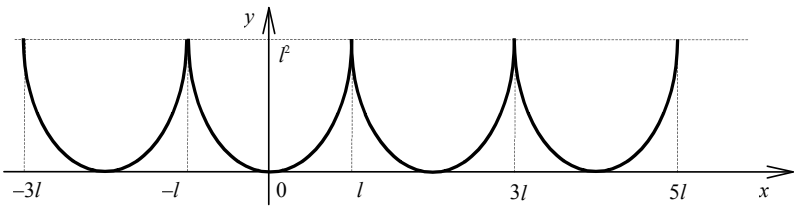


Рис. 4.4

Функция $f(x)$ является четной, так как $f(-x) = |\sin(-x)| = |\sin x| = f(x)$, следовательно, коэффициенты $b_k = 0, k = 1, 2, \ldots$ и ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\, dx = \frac{2}{l}\int_0^{l} x^2 dx = \frac{2}{3}l^2.$$

Интегрируя по частям, найдем a_k, $k = 1, 2, \ldots$:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{2x}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\cos\frac{k\pi x}{l} + \frac{\left(\frac{k\pi x}{l}\right)^2 - 2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^l = \frac{4l^2}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Таким образом, $f(x) = x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}$ на всей числовой прямой.

Ответ. $\frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}$ – ряд Фурье для функции $f(x) = x^2$.

Задача 4.24. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in (-l, 0), \\ c_2, & x \in (0, l). \end{cases}$

Р е ш е н и е. Продолжим функцию $f(x)$ периодично с периодом $2l$ на всю действительную ось. Полученная функция является кусочно-монотонной и удовлетворяет теореме Дирихле (рис. 4.5).

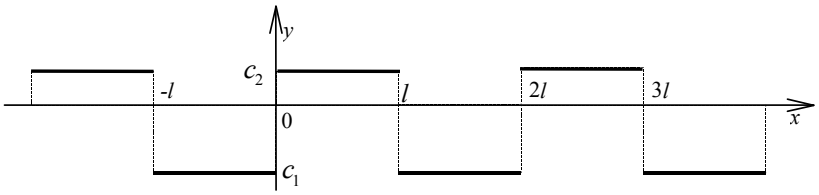


Рис. 4.5

Функция $f(x)$ является функцией общего вида, поэтому ряд Фурье для нее имеет вид

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

с коэффициентами $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$,

$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$, $k = 1, 2, \ldots$

Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1 dx + \frac{1}{l}\int_0^l c_2 dx = c_1 + c_2;$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1 \cos\frac{k\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_0^l c_2 \cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{c_1}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{0} + \frac{c_2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} c_1 \sin\frac{k\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_0^l c_2 \sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{c_1}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{0} - \frac{c_2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l =$$

$$= -\frac{c_1}{k\pi}(1 - \cos k\pi) - \frac{c_2}{k\pi}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } k \text{ четном}, \\ \dfrac{2(c_2 - c_1)}{k\pi}, & \text{при } k = 2m - 1 \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Таким образом, в точках непрерывности функции $f(x)$ полученный ряд совпадает со значениями функции:

$$f(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2}{\pi}(c_2 - c_1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{l}.$$

В точках разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому правого и левого пределов функции в этих точках:

$$\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2}{\pi}(c_2 - c_1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{l} = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

$$\text{при } x = kl, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2}{\pi}(c_2 - c_1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{l}$ – ряд Фурье для функции $f(x)$.

Задача 4.25. Найти разложение функции $f(x) = e^{\lambda x}$, определенной на интервале $(-l, l)$, в ряд Фурье в комплексной форме.

Р е ш е н и е. Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi k x}{l}}$, где $c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{\pi k x}{l}}dx$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вычислим коэффициенты c_k:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} e^{\lambda x}e^{-i\frac{\pi k x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} e^{\left(\lambda - i\frac{\pi k}{l}\right)x}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2l}\right)\frac{1}{\lambda - i\frac{\pi k}{l}}e^{\left(\lambda - i\frac{\pi k}{l}\right)x}\Bigg|_{-l}^{l} = \frac{1}{2(\lambda l - i\pi k)}\left(e^{\lambda l - i\pi k} - e^{-\lambda l + i\pi k}\right).$$

Так как $\dfrac{1}{\lambda l - i\pi k} = \dfrac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}$, $e^{\pm i\pi k} = \cos\pi k \pm i\sin\pi k = (-1)^k$, $e^{\lambda l} - e^{-\lambda l} = 2\,\mathrm{sh}\,\lambda l$, то $c_k = \mathrm{sh}\,\lambda l \dfrac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k$. Следовательно,

$$f(x) = e^{\lambda x} = \mathrm{sh}\,\lambda l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k e^{i\frac{\pi k x}{l}}, \quad x \in (-l, l).$$

Ответ. $f(x) = e^{\lambda x} = \mathrm{sh}\,\lambda l \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k e^{i\frac{\pi k x}{l}}$.

Задача 4.26. Используя разложение функции в ряд Фурье в комплексной форме $f(x) = e^{\lambda x} = \mathrm{sh}\,\lambda l \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k e^{i\frac{\pi k x}{l}}$, $x \in (-l, l)$, получить разложение данной функции в ряд Фурье в вещественной форме.

Р е ш е н и е. В исходном разложении заменим $e^{i\frac{k\pi x}{l}}$ представлением по формуле Эйлера:

$$e^{i\frac{k\pi x}{l}} = \cos\frac{k\pi x}{l} + i\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Затем выделим вещественную и мнимую части:

$$e^{\lambda x} = \mathrm{sh}\,\lambda l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k e^{i\frac{\pi k x}{l}} =$$

$$= \mathrm{sh}\,\lambda l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda l + k\pi i}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}(-1)^k \left(\cos\frac{k\pi x}{l} + i\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= \operatorname{sh} xl \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda l \left(-1^k\right)}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{k\pi \left(-1\right)^{k+1}}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \right) +$$

$$+ i \operatorname{sh} \lambda l \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda l \left(-1\right)^k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{k\pi \left(-1\right)^k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Последняя сумма равна нулю, так как слагаемые при $k = -1, -2, \ldots$ и при $k = 1, 2, \ldots$ соответственно сокращаются (выражение в скобке нечетно относительно переменной k). В первой сумме выражение в скобке четно относительно переменной k, а это означает, что суммирование можно производить для $k = 1, 2, \ldots$, но сумму удвоить. Следовательно,

$$e^{\lambda x} = \frac{\operatorname{sh} \lambda l}{\lambda l} + 2 \operatorname{sh} \lambda l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda l \left(-1\right)^k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{k\pi \left(-1\right)^{k+1}}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Таким образом, коэффициенты ряда Фурье для функции $f\left(x\right) = e^{\lambda x}$ на интервале $\left(-l, l\right)$ в вещественной форме равны

$$a_0 = 2c_0 = 2 \frac{\operatorname{sh} \lambda l}{\lambda l},\ a_k = 2\lambda l \operatorname{sh} \lambda l \frac{\left(-1\right)^k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2},$$

$$b_k = 2\pi \operatorname{sh} \lambda l \frac{\left(-1\right)^{k+1} k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2}.$$

Ответ. $e^{\lambda x} = \frac{\operatorname{sh} \lambda l}{\lambda l} + 2 \operatorname{sh} \lambda l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda l \left(-1\right)^k}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{l} + \right.$

$$\left. + \frac{k\pi \left(-1\right)^{k+1}}{\lambda^2 l^2 + \pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Задача 4.27. Функцию $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ представить интегралом Фурье в комплексной форме.

Р е ш е н и е. Известно, что интеграл Фурье – это предельная форма ряда Фурье при предельном переходе $l \to \infty$, что дает

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt .$$

Данная функция $f(x)$ – абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$, поэтому она может быть представлена интегралом Фурье следующим образом:

$$f(x) = e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{iut} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \left(\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{iut} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{iut} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a+iu)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-a+iu)t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \left(\frac{1}{a+iu} e^{(a+iu)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a+iu} e^{-(a-iu)t} \Big|_{0}^{\infty} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du \left(\frac{1}{a+iu} + \frac{1}{a-iu} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + u^2} e^{-iux} du .$$

Ответ. $f(x) = e^{-a|x|} = \dfrac{a}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + u^2} e^{-iux} du .$

Задача 4.28. Зная разложение в ряд Фурье в комплексной форме $f(x) = e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+u^2} e^{-iux} du$ $(a > 0)$, представить функцию $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ интегралом Фурье в вещественной форме.

Р е ш е н и е. В исходном разложении заменим e^{-iux} представлением по формуле Эйлера:

$$e^{-iux} = \cos ux - i \sin ux .$$

Затем выделим вещественную и мнимую части:

$$f(x) = e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+u^2}(\cos ux - i \sin ux) du =$$

$$= \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2} du - \frac{a}{\pi} i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{a^2+u^2} du .$$

Так как $\cos ux$ функция четная, то $\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2} du = \frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2} du$, а $\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{a^2+u^2} du = 0$ в силу нечетности $\sin ux$. Таким образом, вещественная форма интеграла Фурье для данной функции имеет вид $f(x) = e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2} du$.

Ответ. $f(x) = e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2} du$.

Задача 4.29. Функцию $y = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ представить интегралом Фурье в вещественной форме.

Р е ш е н и е. Функция $y = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ – четная, поэтому интеграл Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux\,du \int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt\,.$$

Вычисления дают:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux\,du \left(\int_0^{1} 1\cos ut\,dt \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux\,du \left(\frac{1}{u}\sin ut \Big|_0^{1} \right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos ux \sin ux}{u}\,du\,.$$

Ответ. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos ux \sin u}{u}\,du\,.$

• *Рекомендуем решить задачи: № 4377 – 4390.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М*. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1988.

3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. : учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1999.

4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.

5. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1964.

6. *Зорич В.А*. Математический анализ. В 2 ч. : учебник. – М.: Наука, 1984.

7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1982.

8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высш. шк., 1981.

9. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Наука, 1983.

10. *Математический* анализ в примерах и задачах. В 3 ч. / под ред. В.Н. Максименко : учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

11. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. – М.: Наука, 1966.

12. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.