

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский

# Введение в ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Утверждено редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

Новосибирск  
2011

УДК 519.21

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент *К. А. Джафаров*,  
д-р физ.-мат. наук, профессор *А. Г. Пинус*

Работа подготовлена на кафедре высшей математики  
для студентов факультета бизнеса

Н. С. Аркашов

Введение в экономико-математические методы: учеб. пособие/  
Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский. — Новосибирск: Изд-во НГТУ,  
2011. — 142 с.

ISBN

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов факультета бизнеса, изучающих экономико-математические методы.

Пособие содержит теоретический материал, задачи для самостоятельного решения, индивидуальные задания.

Все замечания по содержанию пособия просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

УДК

ISBN

- © Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский, 2011
- © Новосибирский государственный  
технический университет, 2011

# Оглавление

|                                                                                           |               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>Глава 1. Линейное программирование</b>                                                 | <b>5</b>      |
| 1.1 Основная задача линейного программирования . . . . .                                  | 5             |
| 1.2 Построение математических моделей экономических задач                                 | 6             |
| 1.3 Графический метод решения задачи линейного програм-<br>мирования . . . . .            | 8             |
| 1.4 Симплекс-метод решения задачи линейного програм-<br>мирования . . . . .               | 10            |
| 1.5 Транспортная задача . . . . .                                                         | 12            |
| 1.6 Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                         | 16            |
| <br><b>Глава 2. Элементы теории игр</b>                                                   | <br><b>22</b> |
| 2.1 Матричные игры . . . . .                                                              | 22            |
| 2.2 Байесовские стратегии в теории матричных игр . . . . .                                | 42            |
| 2.3 Статистические игры . . . . .                                                         | 43            |
| 2.4 Биматричные игры . . . . .                                                            | 46            |
| 2.5 Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                         | 47            |
| <br><b>Глава 3. Элементы теории массового обслуживания</b>                                | <br><b>57</b> |
| 3.1 Цепи Маркова. Эргодическая теорема . . . . .                                          | 57            |
| 3.2 Марковские процессы с непрерывным временем и конеч-<br>ным числом состояний . . . . . | 59            |
| 3.3 Процессы размножения и гибели . . . . .                                               | 60            |
| 3.4 Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                         | 61            |

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава 4. Регрессионный анализ</b>                                                | <b>66</b>  |
| 4.1 Линейная регрессия . . . . .                                                    | 66         |
| 4.2 Критерий Дарбина—Ватсона . . . . .                                              | 67         |
| 4.3 Критерий Голдфелда—Квандта . . . . .                                            | 68         |
| 4.4 Обобщенный метод наименьших квадратов . . . . .                                 | 69         |
| 4.5 Модель авторегрессии первого порядка, AR(1) . . . . .                           | 70         |
| 4.6 Модель скользящего среднего первого порядка, MA(1) . . . . .                    | 70         |
| 4.7 Оценивание линейных регрессионных моделей с зависи-<br>мыми остатками . . . . . | 71         |
| 4.8 Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                   | 72         |
| <b>Глава 5. Индивидуальные задания</b>                                              | <b>76</b>  |
| 5.1 Задания по теории игр . . . . .                                                 | 76         |
| 5.2 Задания по теории массового обслуживания . . . . .                              | 121        |
| 5.3 Расчетно-практическое задание по теории массового об-<br>служивания . . . . .   | 138        |
| 5.4 Расчетное задание по теории регрессии . . . . .                                 | 139        |
| <b>Список литературы</b>                                                            | <b>140</b> |

# Глава 1

## Линейное программирование

### 1.1. Основная задача линейного программирования

Основная задача линейного программирования ставится следующим образом. Имеется ряд переменных

$$x_1, \dots, x_n.$$

Требуется найти такие неотрицательные значения этих переменных, которые бы удовлетворяли системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

и, кроме того, обращали в минимум функцию, называемую в дальнейшем целевой функцией

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (1.2)$$

Очевидно, случай, когда линейную функцию нужно обратить не в минимум, а в максимум, легко сводится к предыдущему, если изменить знак функции и рассмотреть вместо нее функцию

$$L_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

Допустимыми решениями задачи линейного программирования будем называть любую совокупность переменных

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$$

удовлетворяющую системе (1.1).

Оптимальным решением будем называть то из допустимых решений, на котором функция (1.2) достигает своего минимума.

## 1.2. Построение математических моделей экономических задач

Для составления модели экономической задачи линейного программирования, заданной в текстовой форме, следует:

- 1) ввести обозначения для неизвестных величин задачи;
- 2) исследовать и зафиксировать ограничения для них, скажем, неотрицательность;
- 3) составить систему ограничений задачи;
- 4) составить целевую функцию и выявить вид экстремума.

Здесь следует обратить внимание на то, что некоторые ограничения могут иметь противоположные направления или быть равенствами.

Далее мы составим модели для двух задач с экономическим содержанием.

**Пример.** Для трех видов продукции  $P_1, P_2, P_3$  используется три вида сырья  $C_1, C_2, C_3$ . Предприятие может израсходовать 32 т сырья

вида  $C_1$ , не менее 40 т сырья вида  $C_2$  и не более 50 т сырья  $C_3$ . Нормы расхода сырья на единицу продукции того или иного вида приведены в табл. 1. В этой же таблице приведены трудовые и энергетические затраты на производство единицы продукции  $P_1, P_2, P_3$ . Определить количество продукции видов  $P_1, P_2, P_3$ , которые следует производить при минимальных затратах энергетических и трудовых ресурсов.

Таблица 1.

| Сырье          | Запасы (т) | Нормы расхода на единицу продукции (т) |       |       |
|----------------|------------|----------------------------------------|-------|-------|
|                |            | $P_1$                                  | $P_2$ | $P_3$ |
| $C_1$          | 32         | 2                                      | 3     | 0     |
| $C_2$          | 40         | 4                                      | 1     | 2     |
| $C_3$          | 50         | 3                                      | 1     | 3     |
| Расходы (руб.) |            | 4                                      | 5     | 6     |

Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  количества продукции видов  $P_1, P_2, P_3$  соответственно, которые предполагается производить. Тогда целевую функцию и ограничения задачи можно записать в виде

$$L = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 32, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

**Пример** (задача о рационе питания). Для сохранения здоровья человек должен употреблять в пищу в течение суток определенное количество белков, жиров, углеводов, витаминов, микроэлементов и др.

Пусть имеется  $n$  различных продуктов  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и перечень из  $m$  необходимых питательных веществ  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . Обозначим через  $a_{ij}$  количество питательного вещества  $S_i$ , содержащегося в единице продукта  $P_j$ . Требуется так организовать питание, чтобы удовлетворялась суточная потребность в питательных веществах и чтобы стоимость использованных продуктов была минимальной.

Для наглядности данные задачи поместим в табл. 2.

Таблица 2.

| Питательные вещества       | Виды продукции |          |     |          | Суточная потребность одного человека |
|----------------------------|----------------|----------|-----|----------|--------------------------------------|
|                            | $P_1$          | $P_2$    | ... | $P_n$    |                                      |
| $S_1$                      | $a_{11}$       | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$                                |
| $S_2$                      | $a_{21}$       | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$                                |
| ...                        | ...            | ...      | ... | ...      | ...                                  |
| $S_m$                      | $a_{m1}$       | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$                                |
| Стоимость единицы продукта | $c_1$          | $c_2$    | ... | $c_n$    |                                      |

Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_n$  количества единиц продукта вида  $P_1, P_2, \dots, P_n$  соответственно, которые предполагается найти. В таком случае целевая функция и ограничения задачи запишутся в виде

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

### 1.3. Графический метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования с двумя переменными

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{extr}$$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq)b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq)b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq)b_m; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Такая задача может быть решена графически, поскольку легко строить ОДР (область допустимых решений). Она представляет собой многоугольник (ограниченный или нет, либо вовсе пустое множество), стороны которого лежат на прямых, получаемых из системы ограничений задачи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования состоит в выполнении следующих действий.

- 1) Построить ОДР.
- 2) Построить вектор нормали  $n = (c_1, c_2)$  целевой функции (он указывает направление возрастания целевой функции).
- 3) Построить нижнюю и верхнюю опорные прямые  $p$  и  $q$ , т. е. крайние линии уровня целевой функции, имеющие общие точки с ОДР.
- 4) Определить координаты экстремальных точек ( $P = p \cap \text{ОДР}$ ,  $Q = q \cap \text{ОДР}$ ) и вычислить значение целевой функции на них.

*Примечания.*

- 1) Если ОДР — пустое множество, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.
- 2) Если ОДР не ограничена в направлении вектора  $n = (c_1, c_2)$ , то сама целевая функция не ограничена сверху в этой области, и принимаем  $L_{\max}(X) = +\infty$ . Если целевая функция не ограничена в направлении, противоположном  $n$ , то принимаем  $L_{\min}(X) = -\infty$ .

## 1.4. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Пусть в задаче линейного программирования имеется  $n$  переменных и  $m$  независимых линейных ограничений, заданных в форме уравнений. Известно, что оптимальное решение (если оно существует) достигается в одной из опорных точек, где, по крайней мере,  $k = n - m$  переменных равны 0. Выберем какие-то  $k$  переменных в качестве свободных и выразим через них остальные  $m$  базисных переменных. Пусть, например, в качестве свободных переменных выбраны  $x_1, \dots, x_k$ , а остальные  $m$  выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,k}x_k + b_{k+1}; \\ x_{k+2} = a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,k}x_k + b_{k+2}; \\ \dots \\ x_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,k}x_k + b_n. \end{cases} \quad (1.3)$$

Предположим, что все свободные переменные  $x_1, \dots, x_k$  равны 0. При этом мы получим

$$\begin{cases} x_{k+1} = b_{k+1}; \\ x_{k+2} = b_{k+2}; \\ \dots \\ x_n = b_n. \end{cases}$$

Это решение может быть допустимым или недопустимым. Оно допустимо, если все свободные члены неотрицательны. Предположим, это условие выполнено. Тогда мы получим опорное решение. Но является ли оно оптимальным? Чтобы проверить это, выразим целевую функцию  $L$  через свободные переменные  $x_1, \dots, x_k$ :

$$L = g_0 + g_1x_1 + g_2x_2 + \dots + g_kx_k. \quad (1.4)$$

Очевидно, что при  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ ,  $L = g_0$ . Проверим, может ли быть улучшено решение, т. е. получено уменьшение функции  $L$  с увеличением каких-нибудь из переменных  $x_1, \dots, x_k$  (уменьшить их мы не

можем, так как все они равны 0, а отрицательные значения переменных недопустимы). Если все коэффициенты  $g_1, \dots, g_k$  в (1.4) положительны, то увеличение каких-либо из переменных  $x_1, \dots, x_k$  не может уменьшить  $L$ , следовательно, найденное опорное решение является оптимальным. Если же среди коэффициентов  $g_1, \dots, g_k$  есть отрицательные, то, увеличивая некоторые из переменных  $x_1, \dots, x_k$  (те, коэффициенты при которых отрицательны), мы можем улучшить решение. Пусть, например, коэффициент  $g_1$  в (1.4) отрицателен. Значит, есть смысл увеличить  $x_1$ , т. е. перейти от данного опорного решения к другому, где переменная  $x_1$  не равна 0, а вместо нее равна нулю какая-то другая. Однако увеличивать  $x_1$  следует с осторожностью, так чтобы не стали отрицательными другие переменные  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ , выраженные через свободные переменные, в частности через  $x_1$ , формулами (1.3).

Например, если коэффициент при  $x_1$  в соответствующем  $x_j$  уравнении (1.3) отрицателен, то увеличение  $x_1$  может сделать  $x_j$  отрицательным. Наоборот, если среди уравнений (1.3) нет уравнения с отрицательным коэффициентом при  $x_1$ , то величину  $x_1$  можно увеличивать беспредельно, а, значит, функция  $L$  не ограничена снизу (в этом случае полагают, что минимальное значение  $L$  равно  $-\infty$ ) и оптимального решения задачи линейного программирования не существует.

Допустим, что это не так и среди уравнений (1.3) есть такие, в которых коэффициент при  $x_1$  отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение  $x_1$  опасно — оно может сделать их неотрицательными.

Возьмем одну из таких переменных  $x_l$  и посмотрим, до какой степени можно увеличить  $x_1$ , пока переменная  $x_l$  не станет отрицательной. Выпишем  $l$ -е уравнение из системы (1.3)

$$x_l = a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \dots + a_{l,k}x_k + b_l.$$

Здесь свободный член  $b_l \geq 0$ , а коэффициент  $a_{l,1}$  — отрицателен, отсюда видно, что если мы оставим  $x_2 = x_3 = \dots = x_k = 0$ , то  $x_1$  можно увеличивать только до значения, равного  $-\frac{b_l}{a_{l,1}}$ , а при дальнейшем увеличении  $x_1$  переменная  $x_l$  станет отрицательной.

Выберем ту из переменных  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , которая раньше всех обратится в 0 при увеличении  $x_1$ , т.е. ту, для которой величина  $-\frac{b_l}{a_{l,1}}$  наименьшая. Пусть это будет  $x_r$ , тогда имеет смысл разрешить систему уравнений (1.3) относительно других базисных переменных, исключая из числа свободных  $x_1$  и переводя вместо нее в группу свободных переменных  $x_r$ . Действительно, мы хотим перейти от опорного решения, задаваемого равенствами  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ , к опорному решению, в котором уже  $x_1 \neq 0$ , а  $x_2 = \dots = x_k = x_r = 0$ . Первое опорное решение мы получили, положив равными нулю все прежние свободные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , второе мы получим, если обратим в нуль все новые свободные переменные  $x_2, x_3, \dots, x_k, x_r$ . Базисными переменными при этом будут  $x_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Предположим, что уравнения типа (1.3) для нового набора базисных и свободных переменных составлены. Тогда можно выразить через новые свободные переменные и функцию  $L$ . Если все коэффициенты при переменных в этой формуле неотрицательны, то мы нашли оптимальное решение, оно получится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если среди коэффициентов при переменных есть отрицательные, то процедура улучшения решения продолжается: система вновь разрешается относительно других базисных переменных, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение, дающее минимальное значение для функции  $L$ .

## 1.5. Транспортная задача

Имеются  $m$  пунктов отправления однородного груза  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , и  $n$  пунктов назначения того же груза  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Предполагается, что из любого пункта  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , груз может быть доставлен в любой пункт  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Обозначения:

$a_i > 0$  — объем (запас) груза в пункте  $A_i$ ;

$b_j$  — объем груза, необходимого в пункте  $B_j$ ;

$c_{ij}$  — стоимость (тариф) перевозки единицы груза из  $A_i$  в  $B_j$ .

Требуется определить план перевозок груза из пунктов  $A_i$  в пунк-

ты  $B_j$  так, чтобы:

- 1) вывезти весь груз от отправителей  $A_i$ ;
- 2) удовлетворить потребность в грузе (спрос) каждого потребителя  $B_j$ ;
- 3) транспортные расходы были минимальными.

Под планом задачи подразумевается матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $x_{ij}$  — количество единиц груза, который необходимо перевезти из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ .

Сформулированная задача называется транспортной. Итак, требуется найти неотрицательную матрицу  $X$ , удовлетворяющую условиям

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

и доставляющую минимум целевой функции

$$L(X) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij},$$

где  $c_{ij}x_{ij}$  — расходы по перевозке  $x_{ij}$  единиц груза из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ .

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (1.5)$$

Неотрицательная матрица  $X$ , удовлетворяющая условиям задачи, называется допустимым планом задачи. Допустимый план называется оптимальным, если он доставляет минимум целевой функции.

Допустимый план, имеющий не более  $m + n - 1$  отличных от нуля компонент  $x_{ij}$ , называется базисным, или опорным. Опорный план, имеющий ровно  $m + n - 1$  отличных от нуля компонент, называется невырожденным, а если число отличных компонент меньше, чем  $m + n - 1$ , то план называется вырожденным.

Прежде чем приступить к решению транспортной задачи, необходимо проверить выполнение условия баланса (1.5). Если задача с неправильным балансом (открытая), то:

- 1) при  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  (спрос меньше предложения) необходимо ввести фиктивного потребителя груза:  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ ;
- 2) при  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$  (спрос больше предложения) необходимо ввести фиктивного поставщика груза:  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ .

Стоимости перевозок от фиктивного поставщика до всех потребителей и от любого поставщика до фиктивного потребителя принимаются равными нулю.

Решение задачи начинается с определения начального опорного плана. Начальный план можно составлять с помощью метода минимальных тарифов, который заключается в следующем. Прежде всего выбирается наименьший тариф, скажем,  $c_{ij}$ . В клетке  $(i, j)$  этого тарифа записывается максимально возможная поставка с учетом ограничения этой строки и этого столбца:  $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ . Этой поставкой либо обеспечивается потребность одного потребителя, и тогда этот потребитель (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения, либо от одного поставщика забирается весь груз, и тогда этот поставщик (строка) исключается из дальнейшего рассмотрения. Исключаемый столбец (или строка) нумеруется, и этот номер записывается на краю этого столбца (или строки). Исключаемые одновременно строка и столбец отмечаются одним номером.

Если имеются два или более одинаковых наименьших тарифа, то заполняемая клетка берется произвольно среди них.

Описанная операция повторяется до тех пор, пока не будут зачеркнуты все столбцы и строки. На последнем шаге одновременно освобождаются строка и столбец, а следовательно, в благоприятном случае должно быть  $m + n - 1$  заполненных клеток. Полученный таким образом план называется невырожденным.

При одновременном зачеркивании строки и столбца (кроме последнего шага) число заполненных клеток меньше, чем  $m + n - 1$ , и такой план является вырожденным. Его надо дополнить до невырожденного нулями: нули надо записать в клетки, расположенные в строке или столбце, которые одновременно вычеркиваются, т. е. имеют один номер. При этом клетки, заполненные нулями, не должны образовывать цикл с прочими заполненными клетками (понятие цикла мы определим позже).

После получения первого плана следует определить стоимость его реализации  $L(X) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij}x_{ij}$ . Затем план проверяется на оптимальность методом потенциалов, который заключается в следующем. Потенциалами данного плана называется набор из  $m + n$  чисел  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  и  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих условиям  $u_i + v_j = c_{ij}$ , где  $c_{ij}$  — тариф занятой клетки, при этом  $u_1$  обычно полагают равным нулю. Далее составляются разности  $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  для всех клеток таблицы. Поскольку для занятых клеток  $\Delta_{ij} = 0$ , остается найти  $\Delta_{ij}$  для незанятых клеток. Эти величины называются оценками клеток распределительной таблицы, или плана.

**Теорема 1.1** (теорема оптимальности). *Опорный план  $X$  оптимален в том и только в том случае, если среди оценок  $\Delta_{ij}$  этого плана нет отрицательных.*

Если среди оценок  $\Delta_{ij}$  есть отрицательные, то план неоптимален, и его улучшают методом перераспределения поставок по циклу. Отметим клетку с наименьшей отрицательной оценкой и построим цикл с начальной вершиной в этой клетке.

Циклом с начальной вершиной в данной клетке называется замкнутая ломаная, обладающая свойствами:

- 1) все вершины, кроме начальной, расположены в занятых клетках;
- 2) звенья цикла расположены в строках и столбцах таблицы;
- 3) в каждой вершине звенья соединяются под прямым углом;
- 4) на звеньях цикла могут быть занятые клетки, но они не являются вершинами цикла;
- 5) два звена могут пересекаться в какой-либо клетке, но эта клетка не должна быть занятой (иначе она является вершиной).

Итак, пусть теперь построен цикл с вершиной в отмеченной клетке с наименьшей отрицательной оценкой. Если таких клеток несколько, то следует брать одну из них произвольно, или клетку с меньшим тарифом. В любом порядке перенумеруем вершины цикла. Тем самым вершины разбиваются на две группы: с нечетными номерами (отмеченная клетка считается первой) и четными. Найдем наименьшую из величин поставок четных вершин. Эту величину прибавим ко всем вершинам с нечетными номерами и отнимем от вершин с четными номерами. Новое распределение поставок присоединяется к остальным занятым клеткам, таким образом, составляется новый опорный план  $X_2$  с  $L(X_2) < L(X_1)$ . Этот план заносится в новую таблицу и проверяется на оптимальность методом потенциалов.

Улучшение новых планов проводят до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. Для него все оценки клеток должны быть неотрицательными.

## 1.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти максимальное значение линейной функции  $L(X) = 2x_1 + 2x_2 + 11$  при ограничениях



$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Найти минимальное значение линейной функции  $L(X) = 3x_1 + x_2 + 10$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 1/2, \quad 4 \geq x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Найти минимальное значение линейной функции  $L(X) = 3x_1 + 7x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \leq 0, \\ 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ 6x_1 + 14x_2 \geq 21, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. Найти минимальное значение линейной функции  $L(X) = 5x_1 - 2x_3$  при ограничениях

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 \leq 5, \\ -3x_1 + 5x_4 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

5. Найти минимальное значение линейной функции  $L(X) = 2x_1 + 3x_2 + 1$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ 6x_1 + 14x_2 \geq 21, \\ 4 \geq x_1 \geq 0, \quad 4 \geq x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. Найти минимальное значение линейной функции  $L(X) = 3x_1 - 15x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7.  $L(X) = 2x_1 - 11x_2 \rightarrow \text{extr}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 9, \\ -7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_2 \geq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8.  $L(X) = 15x_1 + 21x_2 - 20 \rightarrow \text{extr}$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ x_1 + 11x_2 \leq 13, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9.  $L(X) = 31/3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

10.  $L(X) = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 128 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 87, \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

$$11. L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + 11x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$12. L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 11x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$13. L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$14. L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$15. L(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$16. L(X) = 15 - x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17.  $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18.  $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19.  $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20.  $L(X) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

21. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (20, 60)$ , вектор потребителей  $B = (30, 30)$ .  
Найти оптимальный план.

22. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (90, 100, 90)$ , вектор потребителей  $B = (70, 60, 80, 70)$ . Найти оптимальный план.

23. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (60, 80, 100)$ , вектор потребителей  $B = (40, 60, 80, 60)$ . Найти оптимальный план.

24. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (100, 250, 300)$ , вектор потребителей  $B = (140, 80, 120, 240)$ . Найти оптимальный план.

25. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (18, 24, 30)$ , вектор потребителей  $B = (12, 18, 24, 18)$ . Найти оптимальный план.

26. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (10, 60)$ , вектор потребителей  $B = (30, 30)$ . Найти оптимальный план.

27. Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вектор отправителей  $A = (200, 150, 130, 170)$ , вектор потребителей  $B = (150, 140, 190)$ . Найти оптимальный план.

## Глава 2

# Элементы теории игр

### 2.1. Матричные игры

По характеру выигрышей игры подразделяются на два типа: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с нулевой суммой — это игра, в которой сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой. В дальнейшем мы будем рассматривать так называемые антагонистические игры, т. е. игры двух игроков с нулевой суммой. В таких играх цели игроков прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит за счет проигрыша другого.

По виду функций выигрышей мы выделим матричные игры. Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются проигрыши первого игрока в виде матрицы, строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец — номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится проигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям. Отметим, что проигрыш первого игрока равен выигрышу второго игрока, т. е. для второго иг-

рока это матрица выигрышей. Если какой-либо элемент матрицы отрицателен, то в соответствующей ситуации (при использовании этой пары стратегий) выигрывает первый игрок, а второй проигрывает. Если элемент матрицы равен нулю, то в этой ситуации ни один из игроков ничего не выигрывает и не теряет.

Итак, матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет  $m$  стратегий  $i = 1, 2, \dots, m$ , второй имеет  $n$  стратегий  $j = 1, 2, \dots, n$ . Каждой паре стратегий (ситуации игры)  $(i, j)$  поставлено в соответствие число  $a_{ij}$ , показывающее проигрыш первого игрока, если первый игрок применит  $i$ -ю стратегию, а второй — свою  $j$ -ю стратегию.

Каждая стратегия игрока  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  называется чистой стратегией. Для задания матричной игры достаточно задать матрицу  $A = (a_{ij})$  порядка  $m \times n$  проигрышей первого игрока.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей  $A$  сводится к выбору первым игроком  $i$ -й строки, а вторым игроком  $j$ -го столбца и получению вторым игроком за счет первого выигрыша  $a_{ij}$ . Матрицу  $A$  в дальнейшем мы будем называть *платежной матрицей* или *матрицей проигрышей* первого игрока. Следующим этапом является определение оптимальных стратегий и выигрышей игроков.

Число  $a^*$ , определяемое по формуле

$$a^* = \min_i \max_j a_{ij},$$

называется чистой верхней ценой игры и показывает верхнюю границу проигрыша, которую может гарантировать себе первый игрок за счет

применения своих чистых стратегий при всевозможных действиях второго игрока.

Число  $a_*$ , определяемое по формуле

$$a_* = \max_j \min_i a_{ij},$$

называется чистой нижней ценой игры и показывает нижнюю границу выигрыша, которую может гарантировать себе второй игрок за счет применения своих чистых стратегий при всевозможных действиях первого игрока.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии, второй игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше чем  $a_*$ , а первый игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допускать выигрыш второго игрока больше, чем  $a^*$ . Легко доказывается, что выполняется следующее неравенство:

$$a_* \leq a^*.$$

Если в игре с матрицей  $A$  нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е.  $a_* = a^*$ , то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$a = a_* = a^*.$$

Седловая точка — это пара чистых стратегий  $(i_0, j_0)$  соответственно первого и второго игрока, при которых достигается равенство  $a_* = a^*$ . В понятие седловой точки вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой не может поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать в виде следующих неравенств:

$$a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i j_0}.$$

Пару чистых стратегий  $(i_0, j_0)$  первого и второго игрока, образующих седловую точку и седловой элемент  $a_{i_0 j_0}$ , называют *решением простой матричной игры*. Отметим, что решение простой матричной игры описывает, как должен действовать каждый из игроков, и каков при этом будет проигрыш первого игрока (равный выигрышу второго игрока).



Чистые стратегии  $i_0$  и  $j_0$ , образующие седловую точку, называются *оптимальными чистыми стратегиями* соответственно первого и второго игрока.

Рассмотрим следующий простой пример.

**Пример.** Каждый из двух игроков загадывает целое число от 1 до 3. Первый игрок платит второму количество рублей, равное сумме загаданных чисел.

*Решение.* Заполним матрицу проигрышей первого игрока.

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 2          | 3          | 4          |
| $\delta_2$ | 3          | 4          | 5          |
| $\delta_3$ | 4          | 5          | 6          |

Здесь через  $\delta_i$  обозначены стратегии первого игрока «загадать число  $i$ ». Через  $\theta_j$  обозначены такие же стратегии второго игрока.

Найдем чистую верхнюю цену игры. Для этого в каждой строке найдем наибольшее значение  $a_{i\uparrow}$ , а затем наименьшее из этих найденных значений:

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $a_{i\uparrow}$ |
|------------|------------|------------|------------|-----------------|
| $\delta_1$ | 2          | 3          | 4          | 4               |
| $\delta_2$ | 3          | 4          | 5          | 5               |
| $\delta_3$ | 4          | 5          | 6          | 6               |
|            |            |            |            | $a^* = 4$       |

Найдем чистую нижнюю цену игры. Для этого в каждом столбце найдем наименьшее значение  $a_{\downarrow j}$ , а затем наибольшее из этих найденных значений:

|                    | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $a_{i\uparrow}$ |
|--------------------|------------|------------|------------|-----------------|
| $\delta_1$         | 2          | 3          | 4          | 4               |
| $\delta_2$         | 3          | 4          | 5          | 5               |
| $\delta_3$         | 4          | 5          | 6          | 6               |
| $a_{\downarrow j}$ | 2          | 3          | 4          | $a_* = 4$       |

Итак,  $a = a_* = a^* = 4$ . Следовательно, существует седловая точка. Чтобы ее найти, выберем значения  $a_{i\uparrow}$  и  $a_{\downarrow j}$ , равные  $a$ . Формально ответ записывается как седловая точка  $(1, 3)$  и цена простой игры  $a = 4$ . В терминах условия получаем следующий ответ: первый игрок загадывает 1, второй игрок загадывает 3, в результате первый игрок проигрывает 4 рубля второму игроку.

В некотором смысле все игры с седловой точкой подобны приведенному выше примеру: ответ интуитивно ясен из условий задачи. Однако не каждая матричная игра имеет решение в чистых стратегиях. Исследование матричной игры начинается с нахождения ее седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой точки заканчивается исследование игры.

Если же седловой точки нет, т. е. выполнено неравенство  $a_* < a^*$ , то необходимо перейти к решению игры в так называемых смешанных стратегиях, о которых речь пойдет ниже.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. Таким образом, если первый игрок имеет  $m$  чистых стратегий, то его смешанная стратегия  $\vec{p}$  — это набор чисел  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Аналогично для второго игрока, который имеет  $n$  чистых стратегий, смешанная стратегия  $\vec{q}$  — это набор чисел  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

В понятие смешанных стратегий заложены следующие вероятностные предположения: каждый игрок выбирает случайным образом одну из своих чистых стратегий в соответствии со своим вектором вероятностей и независимо от другого игрока. Предполагается, что игра

происходит многократно, и каждый раз чистые стратегии выбираются независимо от результатов предыдущих игр, и суммарный проигрыш игрока, деленный на число игр, сходится с вероятностью единица к числу, которое называется средним проигрышем.

Средний проигрыш первого игрока (средний выигрыш второго игрока) в матричной игре с матрицей  $A$  выражается в виде математического ожидания его проигрышей

$$\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j.$$

Здесь используется формула математического ожидания функции от двух независимых дискретных случайных величин.

Поясним сказанное на следующем примере.

**Пример** (угадывание стороны монеты). Первый игрок прячет монету либо орлом вверх, либо решкой вверх. Второй игрок пытается угадать сторону монеты, называя орел или решку. Если второй игрок угадал, первый отдает ему монету. Если не угадал, то он отдает первому игроку такую же монету.

Чтобы формализовать эту игру, введем обозначения:  $\delta_1$  — первый игрок загадал орла,  $\delta_2$  — решку;  $\theta_1$  — второй игрок назвал орла,  $\theta_2$  — решку. Построим матрицу проигрышей первого игрока, найдем верхнюю и нижнюю цену простой игры.

|                    | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $a_{i\uparrow}$         |
|--------------------|------------|------------|-------------------------|
| $\delta_1$         | 1          | -1         | 1                       |
| $\delta_2$         | -1         | 1          | 1                       |
| $a_{\downarrow j}$ | -1         | -1         | $a^* = 1$<br>$a_* = -1$ |

Если первый игрок зафиксирует свою чистую стратегию (например, будет каждый раз загадывать решку), то второй игрок после нескольких партий это поймет и будет выигрывать игру за игрой. В этом случае средний проигрыш первого игрока составит  $a^* = 1$ . Поэтому первому игроку надо каждый раз выбирать орла или решку случайным образом, чтобы второй игрок не знал его выбора.

Предположим для примера, что первый игрок загадывает орла с вероятностью 0,1, а второй игрок с вероятностью 0,2. Тогда  $\vec{p} = (0,1; 0,9)$  (сумма вероятностей равна единице),  $\vec{q} = (0,2; 0,8)$ :

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $p_i$ |
|------------|------------|------------|-------|
| $\delta_1$ | 1          | -1         | 0,1   |
| $\delta_2$ | -1         | 1          | 0,9   |
| $q_j$      | 0,2        | 0,8        |       |

Средний проигрыш первого игрока

$$\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} p_i q_j =$$

$$1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,1 \cdot 0,8 - 1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Итак, при таком выборе смешанных стратегий игра оказывается выгодной для второго игрока, поскольку  $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) > 0$ .

Первый игрок за счет применения своих смешанных стратегий  $\vec{p}$  стремится уменьшить свой средний проигрыш  $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q})$ , а второй – за счет своих смешанных стратегий имеет цель сделать  $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q})$  максимальным. По аналогии с играми, имеющими седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игрока называются такие векторы  $\vec{p}^0$ ,  $\vec{q}^0$  соответственно для первого и второго игрока, которые удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}) \leq \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}^0) \leq \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}^0),$$

т. е. образуют седловую точку в смешанных стратегиях. При этом  $\tilde{a} = \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}^0)$  называется ценой расширенной матричной игры, и выполнены равенства

$$\max_{\vec{q}} \min_{\vec{p}} \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{\vec{q}} \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}) = \min_{\vec{p}} \max_{\vec{q}} \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \tilde{a}.$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называют решением матричной игры. Нейманом было доказано, что всякая матричная игра имеет решение (см. [5]).

Сформулируем теорему.

**Теорема 2.1.** Для того чтобы  $\vec{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_i^0, \dots, p_m^0)$  была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с матрицей  $A$  и ценой игры  $\tilde{a}$ , необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 \leq \tilde{a}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично для второго игрока: чтобы  $\vec{q}^0 = (q_1^0, \dots, q_j^0, \dots, q_n^0)$  была оптимальной смешанной стратегией, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0 \geq \tilde{a}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В дальнейшем нам понадобится также следующее интересное свойство матричных игр, которое мы сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 2.2.** Пусть дана матричная игра с матрицей  $A = (a_{ij})$  и ценой игры  $\tilde{a}$ . Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков игры с матрицей  $B = (b_{ij}) = (ba_{ij} + c)$ , где  $b > 0$ , совпадают с оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков в исходной матричной игре  $\Gamma$ , а цена игры с матрицей  $B$  равна

$$\tilde{b} = b\tilde{a} + c.$$

Далее мы рассмотрим сведение матричных игр к задачам линейного программирования. Будем предполагать, что все элементы матрицы строго положительны, это нисколько не нарушает общности, так как согласно теореме 2.2 всегда можно подобрать такое  $c$ , прибавление которого ко всем элементам матрицы проигрышей дает матрицу с положительными элементами. При этом оптимальные смешанные стратегии игроков не изменяются.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей  $A = (a_{ij})$  порядка  $m \times n$ . Согласно теореме 2.1, оптимальные смешанные стратегии  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$  и  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$  соответственно первого и второго игрока и цена игры  $\tilde{a}$  должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1, & p_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \leq \tilde{a}, & & j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.1)$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j = 1, & q_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \geq \tilde{a}, & & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.2)$$

Разделим все уравнения и неравенства в (2.1) и (2.2) на  $\tilde{a}$  (это можно сделать, так как предполагается, что  $\tilde{a} > 0$ ) и введем обозначения:

$$\frac{p_i}{\tilde{a}} = x_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \frac{q_j}{\tilde{a}} = y_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

тогда получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{\tilde{a}}, & p_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \leq 1, & & j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{\tilde{a}}, & q_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \geq 1, & & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения  $p_i$ , а следовательно, и  $x_i$ , чтобы цена игры была минимальной, решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , при которых

$$\sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq 1.$$

В свою очередь второй игрок стремится найти такие значения  $q_j$ , следовательно, и  $y_j$ , чтобы цена игры была максимальной, поэтому решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , при которых

$$\sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq 1.$$

В итоге, мы свели решения матричной игры к двум задачам линейного программирования, которые можно решить, скажем, используя симплекс-метод.

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся упрощения решения матричных игр, для этого сформулируем ряд теорем.

Квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  называется кососимметрической, если  $a_{ij} = -a_{ji}$  для всех  $i, j$ . Матричная игра называется симметричной, если ее матрица кососимметрическая.

**Теорема 2.3.** *Цена симметричной игры равна нулю. Если  $\vec{p}$  — оптимальная смешанная стратегия для первого игрока, то  $\vec{p}$  есть также оптимальная смешанная стратегия второго игрока.*

Часто при решении матричной игры существенно помогает превосходство одной стратегии над другой.

Если для  $i$ -й и  $k$ -й стратегии первого игрока выполняются соотношения

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

причем хотя бы одно из неравенств (2.3) является строгим, то говорят, что стратегия  $i$  превосходит (или доминирует) стратегию  $k$ .

Аналогично для второго игрока: стратегия  $j$  доминирует стратегию  $r$ , если выполняются неравенства

$$a_{ij} \geq a_{ir}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

причем хотя бы одно из неравенств (2.4) является строгим.

**Теорема 2.4.** *Пусть  $\Gamma$  — матричная игра с матрицей  $A$  порядка  $m \times n$  и  $i$ -я стратегия первого игрока доминирует  $k$ -ю стратегию. Пусть  $A^1$  — матрица, полученная из  $A$  исключением ее  $i$ -й строки, и пусть  $\Gamma^1$  — матричная игра с матрицей  $A^1$ . Тогда цена игры  $\Gamma^1$  совпадает с ценой игры  $\Gamma$ . Если  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m)$  есть оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре  $\Gamma^1$ , то его смешанная стратегия  $\vec{p} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m)$  является оптимальной в игре  $\Gamma$ .*

Доминирование стратегий второго игрока также дает возможность сокращения размерности матрицы проигрышей.

**Теорема 2.5.** Пусть  $\Gamma$  — матричная игра с матрицей  $A$  порядка  $m \times n$  и  $j$ -я чистая стратегия второго игрока доминирует  $r$ -ю стратегию. Пусть  $A^1$  — матрица, полученная из  $A$  исключением ее  $r$ -го столбца, и пусть  $\Gamma^1$  — матричная игра с матрицей  $A^1$ . Тогда цена игры  $\Gamma^1$  совпадает с ценой игры  $\Gamma$ . Если  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{r-1}, w_{r+1}, \dots, w_n)$  есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в игре  $\Gamma^1$ , то его смешанная стратегия  $\vec{q} = (w_1, w_2, \dots, w_{r-1}, 0, w_{r+1}, \dots, w_n)$  является оптимальной в игре  $\Gamma$ .

Следующая теорема сводит решение матричной игры порядка  $2 \times 2$  к решению системы линейных уравнений.

**Теорема 2.6.** Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  и  $\vec{q} = (q_1, q_2)$  оптимальные стратегии первого и второго игрока соответственно. Если матричная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии первого и второго игрока удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \tilde{a}, & a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \tilde{a}, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \tilde{a}, & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \tilde{a}, \\ p_1 + p_2 = 1, & q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

где  $\tilde{a}$  — цена игры.

**Пример.** Рассмотрим предыдущий пример (игру в угадывание стороны монеты). Так как в этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях ( $a_* = -1 < a^* = 1$ ), рассмотрим расширенную матричную игру и найдем оптимальную обобщенную стратегию первого игрока  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  и второго игрока  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ :

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $p_i$ |
|------------|------------|------------|-------|
| $\delta_1$ | 1          | -1         | $p_1$ |
| $\delta_2$ | -1         | 1          | $p_2$ |
| $q_j$      | $q_1$      | $q_2$      |       |



Согласно теореме 2.6 запишем системы уравнений

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = \tilde{a}, & q_1 - q_2 = \tilde{a}, \\ -p_1 + p_2 = \tilde{a}, & -q_1 + q_2 = \tilde{a}, \\ p_1 + p_2 = 1, & q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

Приравнивая левые части, получаем  $p_1 = p_2$ ,  $q_1 = q_2$ . Используя равенство суммы вероятностей единице, получаем  $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/2$ . Подставляя найденные значения в любое из первых четырех уравнений, находим цену расширенной игры:  $\tilde{a} = 0$ . Формально ответ записывается так:  $\vec{p} = (1/2, 1/2)$ ,  $\vec{q} = (1/2, 1/2)$ ,  $\tilde{a} = 0$ . Проинтерпретируем его в терминах условия. Первый игрок загадывает орла с вероятностью  $1/2$ , решку с вероятностью  $1/2$ . Второй игрок называет орла с вероятностью  $1/2$ , решку с вероятностью  $1/2$ . Средние потери каждого из игроков равны нулю. В этом случае говорят, что игра является справедливой. В каждой партии каждый из игроков либо выигрывает 1, либо проигрывает 1, но если игра происходит достаточно много раз, то суммарный выигрыш, деленный на число партий, в этой игре стремится к нулю, если игроки придерживаются своих оптимальных смешанных стратегий.

Решение расширенных игр с матрицами  $(m \times 2)$  и  $(2 \times n)$  можно свести к решению игр  $(2 \times 2)$  с помощью графического изображения средних потерь.

В игре  $(m \times 2)$  обозначим через  $\tilde{a}_i(\vec{q})$  средние потери первого игрока в случае, когда первый игрок выбирает свою чистую  $j$ -ю стратегию, а второй игрок — смешанную стратегию  $\vec{q}$ . Так как у второго игрока всего две стратегии, то  $q_2 = 1 - q_1$ , и средние потери  $\tilde{a}_i(\vec{q})$  оказываются линейными функциями от  $q_1$ :

$$\tilde{a}_1(\vec{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1),$$

...

$$\tilde{a}_m(\vec{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}(1 - q_1).$$

Построим эти прямые графически для  $q_1 \in [0, 1]$  (рис. 1). У каждой линии подпишем номер стратегии первого игрока.

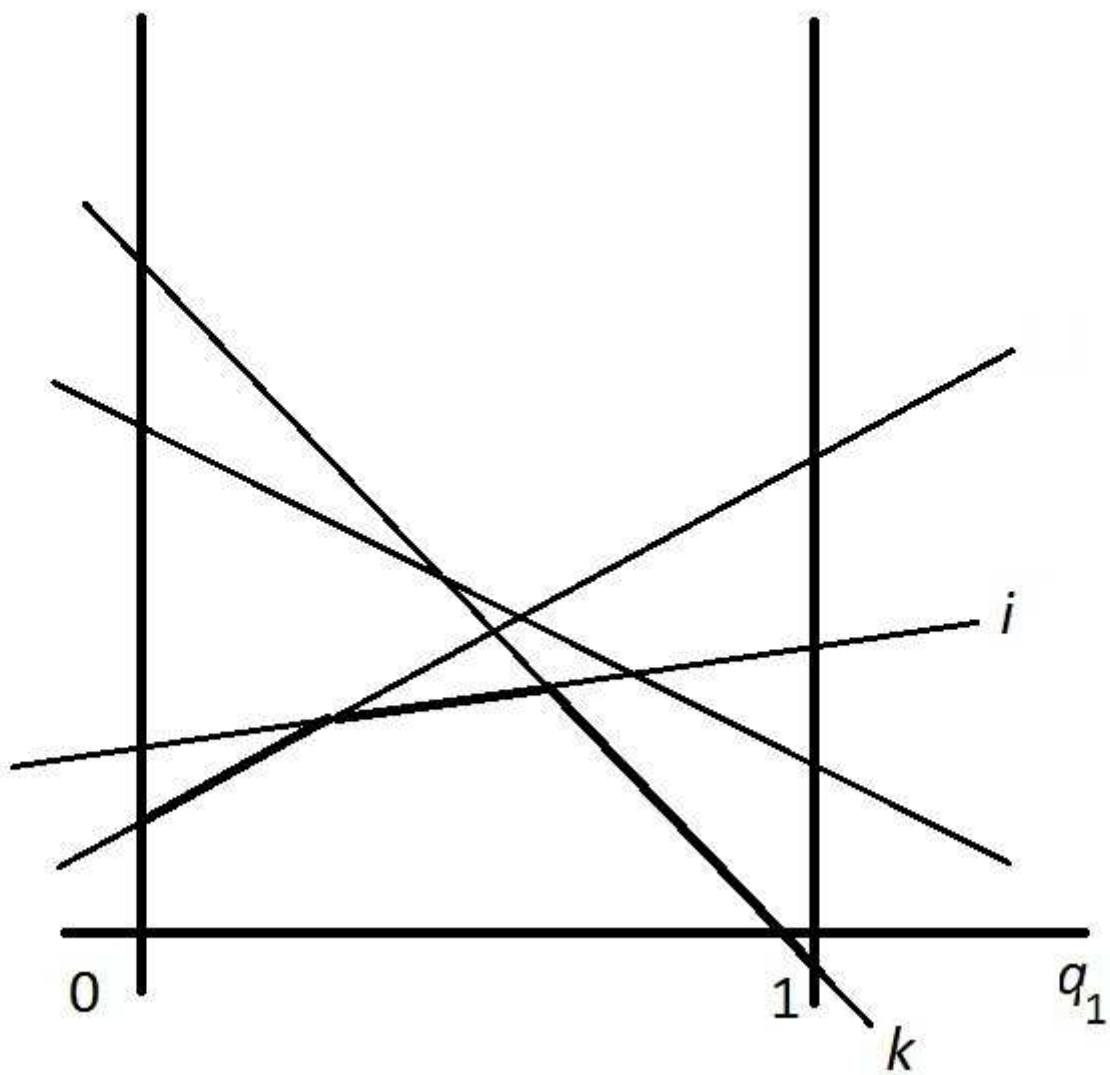


Рис. 1. Функции потерь первого игрока.

Для первого игрока значения каждой из линейных функций — это его средние потери при использовании соответствующей чистой стратегии. Поэтому первый игрок в каждой точке выбирает функцию, принимающую наименьшие значения, т. е. строит нижнюю огибающую множества функций (на рисунке показана жирной линией).

Для второго игрока значения этих функций — его средние выигрыши. Поэтому он в нижней огибающей, выбранной первым игроком, выбирает точку с наибольшим значением, т. е. точку максимума нижней огибающей. Для решения расширенной игры надо найти номера чистых стратегий первого игрока, соответствующих этой точке. На рисунке это номера  $i$  и  $k$ . Все остальные чистые стратегии не будут использоваться первым игроком, так как средние потери оказываются больше. В результате этого графического рассмотрения матричная игра сводится к игре  $(2 \times 2)$  с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{pmatrix}.$$

Расширенная игра  $(2 \times n)$  анализируется аналогично, но здесь строится зависимости средних потерь от вероятности  $p_1$  использования первой стратегии первым игроком. Затем второй игрок выбирает верхнюю огибающую, а первый игрок — минимум верхней огибающей.

В следующем примере поясним не только решение расширенной матричной игры  $(4 \times 2)$ , но и интерпретацию смешанной стратегии как разделения ресурса игрока в соответствии с найденными вероятностями.

**Пример.** Первый игрок — природа. Ее стратегии:  $\delta_1$  — лето сухое, жаркое,  $\delta_2$  — лето сухое, холодное,  $\delta_3$  — лето влажное, жаркое,  $\delta_4$  — лето влажное, холодное.

Второй игрок — фермер. Его стратегии:  $\theta_1$  — выращивать картофель,  $\theta_2$  — выращивать тыквы. По результатам многолетних наблюдений фермер составил матрицу своих выигрышей (в миллионах рублей):

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 4          | -1         |
| $\delta_2$ | 3          | 1          |
| $\delta_3$ | 1          | 5          |
| $\delta_4$ | 0          | 4          |

Проанализируем простую матричную игру — найдем верхнюю и нижнюю цены простой игры:

|                    | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $a_{i\uparrow}$           |
|--------------------|------------|------------|---------------------------|
| $\delta_1$         | 4          | -1         | 4                         |
| $\delta_2$         | 3          | 1          | 3                         |
| $\delta_3$         | 1          | 5          | 5                         |
| $\delta_4$         | 0          | 4          | 4                         |
| $a_{\downarrow j}$ | 0          | -1         | $a_* = \frac{a^*}{3} = 0$ |

Так как в этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях ( $a_* < a^*$ ), рассмотрим расширенную матричную игру и найдем средние потери первого игрока при использовании им его чистых стратегий:

$$a_1(\vec{q}) = 4q_1 - (1 - q_1); \quad a_2(\vec{q}) = 3q_1 + (1 - q_1);$$

$$a_3(\vec{q}) = q_1 + 5(1 - q_1); \quad a_4(\vec{q}) = 4(1 - q_1).$$

Изобразим эти функции на чертеже и построим нижнюю огибающую (рис.2).

Максимум нижней огибающей достигается на пересечении функций средних потерь для первой и четвертой стратегии первого игрока. Использование остальных стратегий оказывается для него невыгодным. Поэтому можно принять  $p_2 = p_3 = 0$ , и игра сводится к следующей игре ( $2 \times 2$ ):

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 4          | -1         |
| $\delta_4$ | 0          | 4          |

Седловой точки по-прежнему нет, поэтому решим расширенную матричную игру:

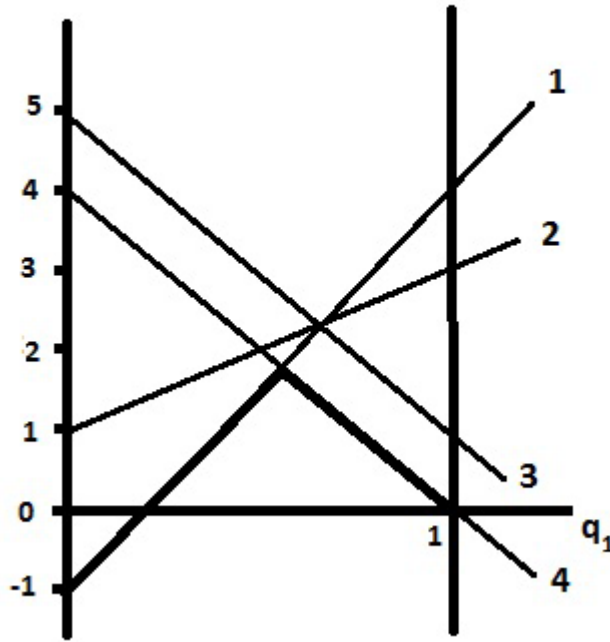


Рис. 2. Графическое решение примера.

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $p_i$ |
|------------|------------|------------|-------|
| $\delta_1$ | 4          | -1         | $p_1$ |
| $\delta_2$ | 0          | 4          | $p_4$ |
| $q_j$      | $q_1$      | $q_2$      |       |

Для этого составим систему уравнений

$$\begin{aligned} 4p_1 = \tilde{a}, \quad -p_1 + 4p_4 = \tilde{a}, \quad p_1 + p_4 = 1, \\ 4q_1 - q_2 = \tilde{a}, \quad 4q_2 = \tilde{a}, \quad q_1 + q_2 = 1. \end{aligned}$$

Там, где правые части равны  $\tilde{a}$ , приравниваем левые части уравнений. Получаем  $5p_1 = 4p_4$ , поэтому  $p_1 = \frac{4}{5}p_4$ ,  $\frac{4}{5}p_4 + p_4 = 1$ . Находим  $p_4 = 5/9$ ,  $p_1 = 4/9$ . Аналогично для второго игрока:  $4q_1 = 5q_2$ ,  $q_1 = 5/9$ ,  $q_2 = 4/9$ .

Цену игры найдем из первого уравнения:  $\tilde{a} = 16/9$ .

Формально ответ записывается так:  $\vec{p} = \left(\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{5}{9}\right)$ ,  $\vec{q} = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$ ,  $\tilde{a} = 16/9$ .

Проинтерпретируем ответ в терминах условия. Для этого заметим, что ресурсы второго игрока являются делимыми: он может поделить свои посевные площади между разными культурами в нужной пропорции. При такой стратегии второго игрока никакая стратегия первого игрока не может привести к уменьшению выигрыша второго игрока по сравнению с найденной ценой расширенной игры.

Итак, второй игрок (фермер) посадит картофель на  $5/9$  своих посевных площадей, тыкву — на оставшихся  $4/9$ . При этом его гарантированный выигрыш равен  $16/9$  от миллиона рублей — примерно 1 778 тысяч рублей. Наименее благоприятная стратегия природы состоит в том, что с вероятностью  $4/9$  лето будет сухим и жарким, а с вероятностью  $5/9$  — влажным и холодным.

Подобные стратегии (рассмотрения вариантов прогнозов и распределения ресурсов для обеспечения гарантированного выигрыша) называют хеджированием рисков и широко применяют в страховом и банковском деле.

Рассмотрим один класс расширенных матричных игр, решение которых оказывается особенно простым. Матричная игра называется *равномерной*, если:

- 1) сумма элементов каждой строки матрицы равна одному и тому же числу;
- 2) сумма элементов каждого столбца равна одному и тому же числу.

**Теорема 2.7.** Пусть матричная игра равномерна.

Тогда  $\vec{p} = \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$ ,  $\vec{q} = \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$ ,  $\tilde{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}$ , где  $j$  — любое от 1 до  $n$ , образуют ее решение. Также  $\tilde{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$ , где  $i$  — любое от 1 до  $m$ .

С использованием теоремы 2.7 решение равномерной расширенной матричной игры сводится к простым арифметическим действиям.

**Пример** (игра в разведку). Каждый из игроков отправляет в разведку либо танк, либо автоматчиков, либо саперов. Танк побеждает

автоматчиков, автоматчики побеждают саперов, а саперы побеждают танк.

*Решение.* Обозначим  $\delta_1 = \theta_1$  — послать в разведку танк,  $\delta_2 = \theta_2$  — автоматчиков,  $\delta_3 = \theta_3$  — саперов. Заполним матрицу потерь первого игрока:

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 0          | -1         | 1          |
| $\delta_2$ | 1          | 0          | -1         |
| $\delta_3$ | -1         | 1          | 0          |

По диагонали матрицы нули, так как в этих ситуациях ни одна из сторон не имеет превосходства.

Сумма элементов каждой строки равна нулю, и сумма элементов каждого столбца равна нулю. Следовательно, игра равномерна, и ее решение  $\vec{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\tilde{a} = 0$ .

В терминах условия стратегия каждого из игроков состоит в следующем: с вероятностями по  $1/3$  отправлять в разведку танк, автоматчиков и саперов. При этом средние потери каждого из игроков равны нулю, т. е. игра является справедливой.

Более широкий класс матричных игр — *игры, допускающие разделение на равномерные*. Это игры, матрицы которых состоят из блоков, являющихся матрицами равномерных игр:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix}.$$

В этом случае найдем цену  $\tilde{a}_{ij}$  каждой равномерной расширенной игры с матрицей  $A_{ij}$  (в соответствии с теоремой 2.7) и составим матрицу  $\tilde{A}$  из цен равномерных игр. Через  $\vec{P} = (P_1, \dots, P_M)$  и  $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_N)$  обозначим оптимальные смешанные стратегии игроков в игре с матрицей  $\tilde{A}$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.8.** Пусть матричная игра с матрицей  $A$  допускает разделение на равномерные. Тогда цены игр с матрицами  $A$  и  $\tilde{A}$  совпадают, и оптимальные стратегии игроков в исходной игре могут

быть найдены делением вероятностей  $P_i(Q_j)$  на число строк (столбцов) матрицы  $A_{ij}$ .

Поясним теорему на следующем примере.

**Пример.** Каждый из двух игроков голосует за одного из пяти кандидатов. За первых трех кандидатов уже подано по одному голосу. Кандидат побеждает, если он набрал относительное большинство голосов. Первый игрок проигрывает второму игроку 1 рубль, если выборы состоялись, т. е. какой-либо из кандидатов победил.

*Решение.* Обозначим стратегии  $\delta_i = \theta_i$  — голосовать за  $i$ -го кандидата,  $i = 1, \dots, 5$ .

Первый игрок проигрывает в ситуациях, когда оба игрока проголосовали за одного и того же кандидата, а также в ситуациях, когда один из игроков голосовал за одного из первых трех кандидатов, а другой — за одного из последних двух. Получаем следующую матрицу потерь первого игрока (выигрышей второго игрока):

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $\theta_4$ | $\theta_5$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 1          | 0          | 0          | 1          | 1          |
| $\delta_2$ | 0          | 1          | 0          | 1          | 1          |
| $\delta_3$ | 0          | 0          | 1          | 1          | 1          |
| $\delta_4$ | 1          | 1          | 1          | 1          | 0          |
| $\delta_5$ | 1          | 1          | 1          | 0          | 1          |

Эта игра не является равномерной, но допускает разделение на равномерные:

|            | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $\theta_4$ | $\theta_5$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\delta_1$ | 1          | 0          | 0          | 1          | 1          |
| $\delta_2$ | 0          | 1          | 0          | 1          | 1          |
| $\delta_3$ | 0          | 0          | 1          | 1          | 1          |
| —          | —          | —          | —          | —          | —          |
| $\delta_4$ | 1          | 1          | 1          | 1          | 0          |
| $\delta_5$ | 1          | 1          | 1          | 0          | 1          |



Матрицы

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются матрицами равномерных игр. Используя теорему 2.7, получаем, что цены этих игр равны  $\tilde{a}_{11} = 1/3$ ,  $\tilde{a}_{12} = 1$ ,  $\tilde{a}_{21} = 1$ ,  $\tilde{a}_{22} = 1/2$ . Получаем матричную игру  $(2 \times 2)$  с матрицей

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Так как верхняя цена простой игры равна 1, а нижняя  $1/2$ , то нет седловой точки в чистых стратегиях. Поэтому рассмотрим расширенную игру

$$\begin{array}{cc|c} 1/3 & 1 & P_1 \\ 1 & 1/2 & P_2 \\ \hline Q_1 & Q_2 & \end{array}$$

Решая систему уравнений

$$\frac{1}{3}P_1 + P_2 = \tilde{a}, \quad P_1 + \frac{1}{2}P_2 = \tilde{a}, \quad P_1 + P_2 = 1,$$

$$\frac{1}{3}Q_1 + Q_2 = \tilde{a}, \quad Q_1 + \frac{1}{2}Q_2 = \tilde{a}, \quad Q_1 + Q_2 = 1,$$

получаем

$$P_1 = Q_1 = \frac{3}{7}, \quad P_2 = Q_2 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{a} = \frac{5}{7}.$$

Вернемся к исходной игре.

$$\begin{array}{c}
\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \mid \theta_4 \ \theta_5 \\
\left. \begin{array}{ccc|cc}
\delta_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\delta_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\delta_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array} \right\} P_1 = \frac{3}{7} \\
- \quad - \quad - \quad - \quad \mid \quad - \quad - \\
\left. \begin{array}{ccc|cc}
\delta_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\delta_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array} \right\} P_2 = \frac{4}{7}
\end{array}$$

Получаем  $p_1 = p_2 = p_3 = P_1/3 = 1/7$ ,  $p_4 = p_5 = P_2/2 = 2/7$ . То же для второго игрока. Формально ответ записывается как

$$\vec{p} = \vec{q} = \left( \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7} \right), \quad \tilde{a} = \frac{5}{7}.$$

Проинтерпретируем ответ в терминах условия. Каждый из игроков выбирает кандидата, за которого он будет голосовать, случайным образом: с вероятностями по  $1/7$  голосует за каждого из первых трех кандидатов, и с вероятностями по  $2/7$  — за каждого из последних двух. Вероятность проигрыша первого игрока равна  $5/7$ , т. е. его средний проигрыш равен  $5/7 \cdot 1 \text{ руб.} \approx 71 \text{ коп.}$

## 2.2. Байесовские стратегии в теории матричных игр

Очень часто противник не старается выбрать самую выгодную для себя и невыгодную для нас стратегию (например, в случае, когда наш противник — природа). Итак, рассмотрим матричную игру с платежной матрицей  $A(n \times m)$ . Предположим, что нам дополнительно известно, с какой вероятностью второй игрок применяет свою  $j$ -ю стратегию, пусть эта вероятность равна  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{j=1}^m q_j = 1$ . Такое распределение на множестве стратегий второго игрока называется

априорным. Постановку задачи, в которой дополнительно присутствуют априорные распределения, называют байесовской.

В байесовской постановке, если первый игрок следует своей  $i$ -й чистой стратегии, можно вычислить его средние проигрыши  $a_i$  по формуле

$$a = Aq^T, \quad a = (a_1, \dots, a_n),$$

где  $q = (q_1, \dots, q_m)$ .

Будем называть  $i_0$ -ю стратегию первого игрока байесовской оптимальной, если для нее средние проигрыши  $a_i$  минимальны:

$$a_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq m} a_i.$$

## 2.3. Статистические игры

Статистические игры мы рассмотрим, используя следующий пример. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой 0 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, независимо друг от друга купивших товар фирмы А. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке.

Обозначим стратегии первого игрока (покупателя):

$\delta_1$  — покупать товар фирмы А;

$\delta_2$  — покупать товар фирмы В.

Обозначим стратегии природы (второго игрока):

$\theta_1$  — брак в продукции фирмы А составляет 0 %, а в продукции фирмы В 10 %;

$\theta_2$  — брак в продукции фирмы А составляет 10 %, а в продукции фирмы В 0 %.

Матрица средних потерь первого игрока:

|            | $\theta_1$             | $\theta_2$             |
|------------|------------------------|------------------------|
| $\delta_1$ | $1000 \cdot 0 = 0$     | $1000 \cdot 0,1 = 100$ |
| $\delta_2$ | $1000 \cdot 0,1 = 100$ | $1000 \cdot 0 = 0$     |

Обозначим  $\tau_k$  — число бракованных товаров среди двух приобретенных знакомыми,  $k = 0; 1; 2$ .

Матрица условных вероятностей имеет вид:

| $\theta$   | $\mathbf{P}\{\tau = \tau_0   \theta = \theta_j\}$ | $\mathbf{P}\{\tau = \tau_1   \theta = \theta_j\}$ | $\mathbf{P}\{\tau = \tau_2   \theta = \theta_j\}$ |
|------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\theta_1$ | 1                                                 | 0                                                 | 0                                                 |
| $\theta_2$ | $0,9^2 = 0,81$                                    | $2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,18$                    | $0,1^2 = 0,01$                                    |

Стратегии первого игрока в статистической игре:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} \delta_i & \text{если } \tau = \tau_0; \\ \delta_j & \text{если } \tau = \tau_1; \\ \delta_k & \text{если } \tau = \tau_2. \end{cases}$$

Здесь  $i, j, k = 1; 2$ .

Статистическая игра сводится к матричной игре с  $2^3 = 8$  стратегиями первого игрока. Приведем примеры подсчета средних потерь:

$$\tilde{a}(\delta_{112}, \theta_1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 100 = 0;$$

$$\tilde{a}(\delta_{112}, \theta_2) = 0,81 \cdot 100 + 0,18 \cdot 100 + 0,01 \cdot 0 = 99.$$

Матрица средних потерь первого игрока в статистической игре имеет вид:

|                | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|----------------|------------|------------|
| $\delta_{111}$ | 0          | 100        |
| $\delta_{112}$ | 0          | 99         |
| $\delta_{121}$ | 0          | 82         |
| $\delta_{122}$ | 0          | 81         |
| $\delta_{211}$ | 100        | 19         |
| $\delta_{212}$ | 100        | 18         |
| $\delta_{221}$ | 100        | 1          |
| $\delta_{222}$ | 100        | 0,         |

т. е. фактически статистическая игра свелась к матричной игре порядка  $8 \times 2$ . Легко проверяется, что приведенная матрица потерь не имеет седловой точки, поэтому будем искать решение матричной игры в смешанных стратегиях. Обратим внимание, что такой подход к поиску оптимальных стратегий в статистических играх называется *минимаксным*.

Используя понятие доминирования стратегий (см. теорему 2.4), мы можем упростить матрицу средних потерь первого игрока:

|                | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|----------------|------------|------------|
| $\delta_{122}$ | 0          | 81         |
| $\delta_{222}$ | 100        | 0.         |

В итоге, имеем матричную игру порядка  $2 \times 2$ . Используя теорему 2.6, получаем, что стратегию  $\delta_{122}$  следует применять с вероятностью  $100/181$ , а стратегию  $\delta_{222}$  с вероятностью  $81/181$ , остальные стратегии применяются с нулевой вероятностью.

Обратимся теперь к байесовской постановке задачи. В этом случае дополнительно известно априорное распределение

$$q_1 = \mathbf{P}(\theta = \theta_1), \quad q_2 = \mathbf{P}(\theta = \theta_2).$$

Иными словами, нам заранее известно, что вероятность события {брак в продукции фирмы А составляет 0 %, а в продукции фирмы В 10 %} равна  $q_1$ , и вероятность события {брак в продукции фирмы А составляет 10 %, а в продукции фирмы В 0 %} равна  $q_2$ . Далее, используя матрицу средних потерь первого игрока, можно определить байесовскую оптимальную стратегию (см. подраздел 2.2). Пусть, например,  $q_1 = 1/100$  и  $q_2 = 99/100$ , в этом случае стратегия  $\delta_{222}$  является оптимальной в байесовском смысле, поскольку именно для этой стратегии соответствующие средние проигрыши минимальны (см. подраздел 2.2). Средний проигрыш первого игрока равен в данном случае  $100 \cdot 1/100 + 0 \cdot 99/100 = 1$ .

## 2.4. Биматричные игры

Нередко бывает так, что выигрыш одного игрока не равен проигрышу другого, т. е. оба игрока могут уменьшить свои проигрыши (увеличить выигрыши), выбрав подходящие стратегии. Такое положение дел формализуется как биматричная игра: у каждого игрока своя матрица потерь. Ситуацией в биматричной игре называется пара чистых стратегий. Ситуация называется *равновесием по Нэшу*, если для каждого игрока отклонение от соответствующей стратегии не приводит к уменьшению проигрыша. Ситуация называется *оптимальной по Парето*, если нет другой ситуации, которая была бы более выгодной для одного игроков и не менее выгодной для другого.

*Равновесием по Штакельбергу с лидерством первого игрока* называется ситуация, определяемая следующим образом. Первый игрок выбирает свою чистую стратегию и объявляет об этом второму игроку, и второй игрок выбирает свою чистую стратегию на основании этой информации так, чтобы минимизировать свой проигрыш. Таким образом, выбор второго игрока известен первому игроку, и первый игрок выбирает свою чистую стратегию так, чтобы минимизировать свой проигрыш. Аналогично определяется равновесие по Штакельбергу с лидерством второго игрока.

**Пример** (дилемма узника). Два бандита арестованы и находятся в тюрьме. Каждый из бандитов может либо сознаться в совершении преступления, либо молчать. Если оба бандита сознаются, то потери каждого равны 8 (годам тюрьмы). Если один сознается, а другой молчит, то тот, кто сознается, выходит на свободу — его потери равны нулю, а потери другого бандита равны 10. Если оба бандита молчат, то потери каждого равны 2.

Равновесием по Нэшу в этой игре является ситуация, когда потери каждого равны 8. Но это единственная ситуация, не оптимальная по Парето — существует ситуация, в которой потери каждого из игроков меньше. Рассмотрение равновесия по Штакельбергу с лидерством любого из игроков приводит также к ситуации, когда оба бандита сознаются, и потери каждого равны 8.

Выйти из этой ситуации они могут за счет применения метаигр.

В первой метаигре стратегии второго игрока являются функциями от стратегий первого игрока. Во второй метаигре стратегии первого игрока являются функциями от стратегий, используемых вторым игроком в первой метаигре. Согласно теореме о метаиграх, во второй метаигре всегда существует ситуация, равновесная по Нэшу и оптимальная по Парето. В рассматриваемом примере одна из таких ситуаций состоит в следующем. Второй игрок сообщает первому игроку, что поступит так же, как он: будет сознаваться, если первый сознается, и молчать, если первый будет молчать. Первый игрок в ответ на это объявляет свою стратегию: он будет молчать, если второй игрок будет следовать объявленной выше стратегии, и сознаваться в случае любой другой стратегии второго игрока. В этой ситуации второй метаигры оба игрока будут молчать, и потери каждого составят 2.

Отметим, что использование метаигр предполагает общение между игроками, и стабильность возникает на основе угроз.

## 2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти верхнюю и нижнюю цену простой матричной игры для игр со следующими матрицами. Если существует решение в чистых стратегиях, найти его.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 8 & 10 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть следующую игру. Есть два игровых поля. Каждый из двух игроков распределяет 4 свои фишки между этими полями. Если на поле у игрока больше фишек, чем у противника, он выигрывает все фишки противника на этом поле. Найти все седловые точки в чистых стратегиях.

3. Решить расширенные матричные игры: а)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$б) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Первый игрок прячет монету либо в правой, либо в левой руке. Второй игрок пытается угадать. Если второй игрок угадывает, что монета в правой руке, то он получает эту монету. Если угадывает, что монета в левой руке, то получает 5 таких же монет. Найти решение расширенной матричной игры и проинтерпретировать его в терминах условия.

$$5. \text{ Решить расширенные матричные игры: а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix},$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad в) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Двое играют в игру, которая заключается в следующем: каждый из них одновременно показывает от одного до двух пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то первый игрок платит количество рублей, равное суммарному числу показанных пальцев, второму игроку. Если сумма нечетная, то второй игрок по тем же правилам платит первому. Составить платежную матрицу: существует ли для данной игры седловая точка? Если седловой точки не существует, найти решение игры в смешанных стратегиях.

7. Решить предыдущую задачу в случае, когда выбрасывается от одного до трех пальцев.

8. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

9. Два игрока играют в игру «камень—ножницы—бумага», которая заключается в следующем: камень выигрывает у ножниц, бумага выигрывает у камня, ножницы выигрывают у бумаги; если выигрыва-



ет первый игрок, то второй платит одну единицу, в противном случае первый платит одну единицу второму. Составить платежную матрицу, выяснить, существует ли седловая точка. Если таковой не существует, найти решение игры в смешанных стратегиях.

10. Состояние погоды в летний период времени можно рассматривать как следующие стратегии природы (второго игрока): лето жаркое сухое, лето жаркое влажное, лето теплое влажное, лето теплое сухое, лето прохладное сухое, лето прохладное влажное. Стратегии фермера: выращивает первую культуру, выращивает вторую культуру. Соответствующая платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & -6 & -4 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Существует ли седловая точка? Если нет, решить задачу в смешанных стратегиях.

11. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

12. Показать, что если к каждому элементу некоторой платежной матрицы добавить одно и то же число, то получится платежная матрица, для которой оптимальные смешанные стратегии совпадают с оптимальными смешанными стратегиями исходной платежной матрицы.

13. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для второго игрока

(использовать симплекс-метод).

14. Решить задачу 7, предполагая, что в теореме 2.1 в соответствующих нестрогих неравенствах выполняются равенства. Будут ли полученные решения оптимальными стратегиями первого и второго игрока?

15. Решить задачу 9, предполагая, что в теореме 2.1 в соответствующих нестрогих неравенствах выполняются равенства. Будут ли полученные решения оптимальными стратегиями первого и второго игрока?

16. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решить соответствующую матричную игру. Чему равно математическое ожидание проигрыша первого игрока, если и первый игрок, и второй игрок используют свои оптимальные стратегии?

17. Платежная матрица в некоторой игре имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть первый игрок придерживается следующей смешанной стратегии:  $(6/13, 3/13, 4/13)$ , а второй  $(6/13, 4/13, 3/13)$ . Вычислить математическое ожидание проигрыша первого игрока.

18. В задаче 12 решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования.

19. Найти решение матричных игр:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

20. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x = (1/6, 1/6, 1/6), \quad y = (1/2, 0, 0, 1/2), \quad \tilde{a} = 0, 4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

21. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что в теореме 2.1 в соответствующих нестрогих неравенствах выполняются равенства, составить и решить систему линейных уравнений. Будут ли полученные решения оптимальными стратегиями первого и второго игрока? В чем причина невозможности в данном случае найти оптимальные стратегии таким образом?

22. В задаче 21 решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования.

23. Рассматривается симметричная матричная игра. Показать, что если первый и второй игрок используют одну и ту же смешанную стратегию, то математическое ожидание выигрыша первого игрока равно нулю.

24. Перейти от следующей задачи линейного программирования:  
 $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 11x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Решить матричную игру любым известным вам способом.

25. Перейти от следующей задачи линейного программирования:

$$L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Можно ли упростить матричную игру, используя понятие доминирования стратегий? Решить матричную игру любым известным вам способом.

26. Решить расширенные матричные игры: а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$  в)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

27. В колоде 4 карты: тройка, семерка, дама, туз. Туз старше дамы, дама старше семерки, а семерка старше тройки. Карты тасуются, затем каждый из игроков получает по одной карте. Первый игрок либо отказывается от игры, выплачивая второму игроку 1 фишку, либо соглашается на игру. Если первый игрок согласился на игру, то второй игрок должен принять решение: либо отказаться от игры, выплатив первому игроку 1 фишку, либо согласиться на игру. Если оба игрока согласились играть, то выигрывает тот, чья карта старше. Выигравший получает от проигравшего 2 фишки. Формализовать условие как матричную игру и найти ее решение.

28. Молодой бизнесмен планирует взять кредит в банке на сумму пять тысяч долларов. Если его дела пойдут успешно, он обещает через три месяца вернуть банку взятые деньги плюс десять процентов; в противном случае не сможет вернуть эти деньги. Как мала должна быть вероятность неудачи бизнесмена, чтобы банку выгодно

было выделить кредит? (*Указание:* в задаче используются байесовские стратегии).

29. Найти байесовскую стратегию в матричной игре из задачи 8, если известно априорное распределение  $(q_1, q_2) = (1/4, 3/4)$  стратегий второго игрока.

30. Пусть некий человек имеет миллион рублей; он может хранить их дома либо поместить в банк под десять процентов годовых. Банк в течение года может работать нормально, а может и разориться. Насколько мала должна быть вероятность разорения банка, чтобы было выгодно хранить деньги именно там? Что будет, если человек выберет минимаксный подход для решения проблемы выбора правильной стратегии хранения денег?

31. Мистер Нельсон, выходя из дома, решает, брать ему зонт или нет. Если он не возьмет зонт, а дождь будет, его потери равны 5 (единиц комфорта). Если не возьмет зонт, а дождя не будет, то потери равны 0. В случае, если он возьмет зонт, его потери равны 1 при дожде и 2 при отсутствии дождя. Перед выходом мистер Нельсон смотрит на барометр, который может показывать либо «ясно», либо «пасмурно». Мистер Нельсон заметил, что в случае, когда барометр показывает «пасмурно», дождь идет с вероятностью 0,6, а в случае, когда «ясно» — с вероятностью 0,2. Формализовать условие как статистическую игру. Найти минимаксную стратегию первого игрока. Найти байесовскую стратегию в предположении, что вероятность дождя 0,3.

32. Первый игрок (покупатель) задумывается о приобретении товара некой китайской фирмы. Известно, что доля брака в продукции этой фирмы составляет либо 5 %, либо 20 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара этой фирмы оценивается в 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, которые независимо друг от друга купили товар этой фирмы. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода. Найти решение статистической игры для байесовского подхода, если известно, что с вероятностью 0,01 доля брака фирмы составляет 5 % и соответственно с вероятностью в 0,99 доля брака составляет 20 %.

33. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой 5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара фирмы А составляет 200 рублей, соответственно качественного товара фирмы В — 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, один из которых купил товар фирмы А, а другой, независимо от первого, товар фирмы В. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

34. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 15 %, а у другой 5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара фирмы А составляет 400 рублей, соответственно качественного товара фирмы В — 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, каждый из которых купил независимо от другого товар фирмы А, кроме того, он опрашивает третьего своего знакомого, который покупал товар позже предыдущих двух покупателей, ориентируясь на их мнение следующим образом: если каждый из них купил качественный товар, то он покупает также товар фирмы А, если каждый из них купил бракованный товар, то он покупает товар фирмы В, если же только один из них купил бракованный товар, то он подбрасывает монетку и, если выпадает герб, он покупает товар фирмы А, если решка — товар фирмы В. В зависимости от их ответов первый игрок принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

35. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой

5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара составляет 200 рублей. Покупатель опрашивает одного своего знакомого, который совершенно не помнит, покупал ли он товар фирмы А или товар фирмы В, но помнит, что для выбора фирмы он решил подбросить монету и в случае выпадения герба выбрать фирму А, в случае выпадения решки – фирму В. В зависимости от его ответа о качестве приобретенного продукта первый игрок принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

36. Первый игрок (коммерческий банк) должен сделать выбор между кредитованием авиапредприятия и агропромпредприятия. По разным сведениям у одного из этих предприятий вероятность банкротства составляет 5 %, а у другого 10 %. Свои потери при банкротстве предприятия банк оценивает в 100 млн руб., прибыль же от кредитования составит 30 млн руб. Руководство банка решило посоветоваться с другим коммерческим банком, один раз уже осуществлявшим кредитование авиапредприятия. В зависимости от ответа другого банка первый игрок принимает решение о кредитовании. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

37. Игра «семейный спор». Муж и жена решают, куда пойти — в театр или на футбол. Если они пойдут в театр, потери мужа равны 1, потери жены равны 0. Если они пойдут на футбол, потери мужа равны 0, потери жены равны 1. Если им не удастся договориться, то потери каждого равны 2. Формализовать условие как биматричную игру. Найти ситуации равновесия по Нэшу, оптимальности по Парето, равновесия по Штакельбергу с лидерством мужа; жены.

38. Игра «перекресток». Два водителя с разных сторон подъезжают к перекрестку. Очередность проезда правилами не оговаривается. Если один водитель пропускает другого, то его потери равны 1, потери другого 0. Если оба выезжают на перекресток или оба пропускают, потери каждого равны 2. Формализовать условие как биматричную игру. Найти, на какую из игр она больше похожа: на игру «дилемма узника» или на игру «семейный спор».

39. Игра «дистрибьютор». Продавец может предложить товар либо по высокой цене, либо по низкой цене. Покупатель может либо соглашаться на высокую цену, либо не соглашаться. Если продавец предложил высокую цену, а покупатель согласился на высокую цену, потери продавца равны 0, а покупателя 2 (млн руб.). Если продавец предложил низкую цену, а покупатель согласился на низкую цену, потери продавца равны 2, а покупателя 0. Если продавец согласен продавать по низкой цене, а покупатель согласен покупать по высокой, то они договариваются о том, что потери каждого равны 1. Если продавец предложил высокую цену, а покупатель низкую, то сделка не состоялась, и потери каждого равны 2. Формализовать условие задачи как биматричную игру. Найти ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальные по Парето. Найти ситуации равновесия по Штакельбергу с лидерством продавца; с лидерством покупателя. Рассмотреть первую метаигру и вторую метаигру. Найти в этих метаиграх ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальные по Парето.



## Глава 3

# Элементы теории массового обслуживания

### 3.1. Цепи Маркова. Эргодическая теорема

Пусть каждая из случайных величин  $X_0, X_1, \dots$  принимает конечное число значений  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , эти значения мы будем называть состояниями. Последовательность  $X_0, X_1, \dots$  называется цепью Маркова, если для любого момента времени  $n$  и любых состояний  $x_{i_0}, \dots, x_{i_n}$  выполняется

$$\mathbf{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = x_{i_0}) = \mathbf{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}).$$

Цепь Маркова  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  называется однородной по времени с матрицей переходных вероятностей  $M = (p_{ij})$ , если для любого  $n$  и любых  $x_i$  и  $x_j$

$$\mathbf{P}(X_n = x_j | X_{n-1} = x_i) = p_{ij}.$$

Обратим внимание, что для любого  $i$

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1.$$

В дальнейшем будут рассматриваться только однородные цепи Маркова! Обозначим

$$p_{ij}(k) = \mathbf{P}(X(k) = x_j | X(0) = x_i)$$

вероятность перехода за  $k$  шагов из состояния  $x_i$  в состояние  $x_j$  и

$$p_j(k) = \mathbf{P}(X(k) = x_j)$$

— вероятность нахождения в состоянии  $x_j$  в момент времени  $k$ . Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая матрица порядка  $m$  и вектор-строка размера  $m$

$$M^{(k)} = (p_{ij}(k))$$

и

$$N^{(k)} = (p_i(k)).$$

Переходные вероятности удовлетворяют уравнениям Колмогорова—Чэпмена

$$p_{ij}(k+l) = \sum_{\alpha} p_{i\alpha}(k) p_{\alpha j}(l)$$

и

$$p_j(k+l) = \sum_{\alpha} p_{\alpha}(k) p_{\alpha j}(l).$$

В матричной форме эти уравнения можно переписать таким образом:

$$M^{(k+l)} = M^{(k)} M^{(l)}$$

и

$$N^{(k+l)} = N^{(k)} M^{(l)}.$$

Следующая теорема описывает широкий класс марковских цепей, обладающих так называемым свойством эргодичности: пределы  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$  не только существуют и не зависят от  $i$ , но и образуют распределение вероятностей ( $\pi_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$ ), но и таковы, что  $\pi_j > 0$  для всех  $j$ .

**Теорема 3.1** (эргодическая теорема). Пусть  $M = (p_{ij})$  — матрица переходных вероятностей марковской цепи с конечным множеством состояний  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Если найдется  $n_0$  такое, что

$$\min_{i,j} p_{ij}(n_0) > 0,$$

то существуют числа  $\pi_1, \dots, \pi_m$  такие, что

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^m \pi_j = 1$$

и для любого  $i$

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n).$$

При этом числа  $(\pi_1, \dots, \pi_m)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} p_{\alpha j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

## 3.2. Марковские процессы с непрерывным временем и конечным числом состояний

Поведение системы с возможными состояниями  $S_0, S_1, \dots, S_m$  может быть описано случайной функцией  $X(t)$ , принимающей значение  $k$ , если в момент  $t$  система находилась в состоянии  $S_k$ . Если переход системы из одного состояния в другое возможен в любой момент времени  $t$ , а вероятности  $p_{ik}(t, \tau)$  перехода системы из состояния  $S_i$  в момент времени  $t$  в состояние  $S_k$  в момент времени  $\tau$ ,  $\tau \geq t$ , не зависят от поведения системы до момента времени  $t$ , то  $X(t)$  является марковским случайным процессом с конечным числом состояний. Процесс называется однородным, если

$$p_{ik}(t, \tau) = p_{ik}(t - \tau, 0).$$

Вероятности  $P_k(t)$  нахождения системы в состоянии  $S_k$  в момент времени  $t$  определяются из системы уравнений

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{j=0}^m \lambda_{jk}(t) P_j(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где  $\lambda_{jk}(t)$  — интенсивность перехода в момент  $t$  из состояния  $S_j$  в  $S_k$ . В случае однородных марковских процессов интенсивности перехода из одного состояния в другое не зависят от времени, т. е. для всех  $t$  выполняется равенство

$$\lambda_{jk}(t) = \lambda_{jk}.$$

Если начальное состояние  $S_i$  задано, то

$$P_k(0) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

При однородном марковском процессе с сообщающимися состояниями существуют независимые от номеров исходного состояния пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ik}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Предельные вероятности  $P_k$  находятся из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m \lambda_{jk} P_j = 0, & k = 0, 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{j=0}^m P_j = 1. \end{cases}$$

### 3.3. Процессы размножения и гибели

Однородный марковский процесс с бесконечным, но счетным числом состояний  $S_0, S_1, \dots$  называется процессом размножения (рождения) и гибели, если только для соседних состояний вероятности перехода положительны, т. е.  $\lambda_{ij} = 0$  во всех случаях, когда  $j$  не равняется ни  $i + 1$ , ни  $i - 1$ . Обозначим  $\lambda_i = \lambda_{ii+1}$ ,  $\mu_j = \lambda_{jj-1}$ . Процессы размножения и гибели могут «убегать на бесконечность» — в этом случае  $X(t)$  сходится с вероятностью единица к бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ .

Такое поведение процесса называется неэргодическим. Напротив, для эргодического процесса выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ik}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ .

Условие эргодичности вместе с формулой для вычисления стационарных вероятностей содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.2.** *Процесс размножения и гибели эргодичен в том и только том случае, когда сумма ряда*

$$\gamma = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \dots$$

*конечна. Стационарные вероятности равны*

$$P_0 = \frac{1}{\gamma}, \quad P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

### 3.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу переходных вероятностей для марковской цепи, описывающей следующий эксперимент. Подбрасывают несимметричную монету, причем вероятность выпадения решки равна  $p$ . Определим  $X_n$  как разность между числом выпадений решки и числом выпадения герба после  $n$  бросаний монеты.

2. Найти матрицу переходных вероятностей для марковской цепи, описывающей следующий эксперимент. Бросают игральную кость. Положим  $X_n$  равным наибольшему из чисел, выпадающих в первых  $n$  бросаниях.

3. Устройство  $S$  состоит из двух узлов, каждый из которых в ходе работы устройства может выйти из строя. Возможны состояния системы:  $S_1$  – оба узла работают;  $S_2$  – первый узел отказал, второй работает;  $S_3$  – второй узел отказал, первый работает;  $S_4$  – оба узла отказали.

Построить граф состояний и переходов системы. Выбрать обозначения для интенсивностей переходов между состояниями системы и записать соответствующую систему дифференциальных уравнений.

4. По двум линиям связи в один пункт поступают два независимых простейших потока телеграмм. Найти вероятность того, что за время  $t$  в пункт приема придет  $n$  телеграмм, если параметры составляющих потоков равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

5. Частицы, вылетающие из радиоактивного вещества в процессе его распада, образуют простейший поток с параметром  $\lambda$ . Каждая частица независимо от другой регистрируется счетчиком с вероятностью  $p$ . Определить вероятность того, что за время  $t$  будет зарегистрировано ровно  $n$  частиц.

6. Пусть матрица переходов для цепи Маркова имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}, & \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}, & \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}, \\ \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Проверить выполнение эргодической теоремы для этой цепи. Если эргодическая теорема выполняется, найти соответствующее стационарное распределение. Нарисовать граф состояний и переходов цепи Маркова.

7. Двое рабочих обслуживают три автоматических станка, которые при нормальной работе не требуют их вмешательства. Каждый станок останавливается вследствие неполадок с интенсивностью один станок в 30 мин. Среднее время, которое тратится рабочим на ремонт одного станка, составляет 15 мин. Найти предельную вероятность того, что два станка не работают.

8. Парикмахерская имеет трех мастеров, каждый из которых в среднем на обслуживание одного клиента тратит 20 мин. Клиенты образуют простейший поток со средним числом поступлений 3 человека в час. Клиенты становятся в очередь, если к моменту их прихода в очереди менее трех человек, в противном случае они покидают мастерскую.

Определить:

- а) среднее число клиентов в очереди;
- б) среднее число клиентов в парикмахерской вообще.

9. Поток поступления неисправной аппаратуры в мастерскую гарантийного ремонта является простейшим с параметром  $\lambda = 10$  ед/час. Продолжительность ремонта — случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром  $\mu = 5$  ед/час. Определить среднее время, проходящее от момента прихода неисправной аппаратуры до начала ремонта, если в мастерской четверо рабочих, каждый из которых ремонтирует только один прибор.

10. На коммутатор, имеющий четыре внешние линии связи, поступает в среднем за час 60 требований на связь. Продолжительность переговоров в среднем составляет 4 мин. Определить:

- а) абсолютную пропускную способность системы;
- б) среднее число занятых линий;
- в) вероятность отказа абоненту.

11. В ремонтную мастерскую, имеющую трех рабочих, поступает простейший поток заказов, в среднем 4 заказа в час. Среднее время выполнения заказа 0,5 часа. Время обслуживания случайное, подчиняющееся экспоненциальному закону. Определить:

- а) среднее время пролеживания заказа в ожидании начала исполнения;
- б) среднее число заказов, ожидающих начала исполнения.

12. Для одноканальной системы массового обслуживания с отказами составить граф состояний и переходов, выписать соответствующую систему дифференциальных уравнений и решить. Найти абсолютную и относительную пропускную способность системы.

13. Покупатели гастрономического отдела образуют простейший поток с интенсивностью 150 чел. в час. Время обслуживания покупателя продавцом случайное. Один продавец в среднем обслуживает 30 покупателей в час. Определить наименьшее число продавцов, при котором среднее число покупателей, ожидающих обслуживания, не превосходит трех, и определить при этом вероятность того, что в очереди будет более трех покупателей.

14. Имеется пятиканальная линия связи, расходы на эксплуатацию которой составляют 20 долларов в час. В среднем за одну минуту поступает два требования на связь, а средняя продолжительность передачи 3 мин. Требования на связь, не получившие немедленного удовлетворения, теряются. Считая поток требований на связь простейшим, найти:

- а) вероятность отказа требованию на связь;
- б) превышение среднечасового кассового сбора над эксплуатационными расходами, если оплата за одну минуту разговора составляет 15 центов.

15. Привести пример однородной цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей четыре состояния (нарисовать граф состояний и переходов). Составить соответствующие дифференциальные уравнения.

16. В систему обслуживания с отказами поступает простейший поток требований с параметром  $\lambda$ . Известна вероятность  $p$  отказа требованию в обслуживании в стационарном режиме работы системы. Определить среднее число требований в единицу времени, покидающих систему после завершения обслуживания.

17. В инструментальной кладовой инструмент выдает один кладовщик, получающий 50 центов в час. За восьмичасовой рабочий день в кладовую обращается в среднем 152 рабочих, образующих простейший поток. Время обслуживания рабочего кладовщиком случайное, подчиняющееся показательному закону. Среднее время выдачи инструмента составляет 3 мин. Простой рабочего в течение часа оценивается в один доллар убытка. Найти число кладовщиков, при котором суммарные



потери предприятия от простоя рабочих и содержания кладовщиков были бы наименьшими.

18. Для разгрузки судов оборудованы пять причалов, на каждом из которых могут разгружаться одновременно только по одному транспорту. В среднем разгрузка транспорта занимает одни сутки, а прибывают в среднем за сутки пять транспортов. В случае, когда все причалы заняты, транспорты образуют очередь. Предполагая поток прибывающих простейшим, найти

- а) вероятность отказа прибывающему транспорту в немедленном начале разгрузки;
- б) как изменится эта вероятность, если разгрузку ускорить в 2,5 раза.

## Глава 4

# Регрессионный анализ

### 4.1. Линейная регрессия

Наблюдается случайная величина  $y$ , значения которой зависят от случайного вектора **факторов регрессии**  $\vec{x} = (1, x_1, \dots, x_k)$ . Введем в рассмотрение вектор неизвестных параметров регрессии  $\vec{\beta} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ . Будем изучать линейную регрессию

$$\mathbf{E}(y|\vec{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

Пусть в  $t$ -м эксперименте факторы регрессии принимают заданные значения

$$\vec{x}^{(t)} = (1, x_{1,t}, \dots, x_{k,t}),$$

где  $t = 1, \dots, N$ . После  $N \geq k + 1$  экспериментов получен набор **откликов**  $(y_1, \dots, y_N)$ :

$$\vec{y} = X^T \vec{\beta} + \vec{u},$$

с матрицей плана  $X$  ( $k + 1$  строка,  $N$  столбцов):

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_{1,1} & \dots & x_{1,N} \\ x_{2,1} & \dots & x_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,1} & \dots & x_{k,N} \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $X^T$  будем называть матрицей линейного преобразования, вектор  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$  — вектором ошибок (случайных остатков).

Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 4.1** (Гаусса—Маркова). Пусть матрица  $X$  имеет ранг  $k + 1$ , и вектор ошибок  $\vec{u}$  состоит из независимых гауссовских случайных величин с распределением  $\Phi_{0,\sigma^2}$  (т. е. с нулевым математическим ожиданием и с одной и той же дисперсией). Тогда оценка  $\hat{\beta}$ , полученная по методу наименьших квадратов, которая минимизирует функцию

$$S(\vec{\beta}) = (\vec{y} - X^T \vec{\beta})^T (\vec{y} - X^T \vec{\beta}),$$

имеет вид

$$\hat{\beta} = (X X^T)^{-1} X \vec{y}.$$

Ковариационная матрица оценки  $\hat{\beta}$  вычисляется по формуле

$$\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta} | X) = \sigma_u^2 (X X^T)^{-1},$$

где  $\sigma_u^2 = \frac{1}{N - k} (\vec{y} - X^T \hat{\beta})^T (\vec{y} - X^T \hat{\beta}) = \frac{1}{N - k} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2$  — несмещенная оценка для дисперсии случайного остатка, через  $\hat{u}_i$  мы обозначили  $i$ -ю компоненту вектора  $\vec{y} - X^T \hat{\beta}$ .

## 4.2. Критерий Дарбина—Ватсона

Рассмотрим статистику Дарбина—Ватсона

$$\text{DW} = \frac{\sum_{i=2}^N (\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2},$$

где через  $\hat{u}_i$  обозначается  $i$ -я компонента вектора  $\vec{y} - X^T \hat{\beta}$  (см. теорему 4.1). На основе этой статистики строится критерий для проверки предпосылки теоремы Гаусса—Маркова о некоррелированности случайных остатков в модели линейной регрессии, а именно, проверяется основная гипотеза

$$H_1 : \text{Cov}(u_i, u_{i-1}) = 0.$$

Этот критерий реализуется в итоге следующих шагов.

Шаг 1. По количеству уравнений наблюдений  $N$ , а также количеству  $k + 1$  неизвестных параметров регрессии и ошибке первого рода критерия  $\alpha$  следует выбрать две величины  $d_L$  и  $d_U$  (для этих величин составлены таблицы, скажем, для  $\alpha = 0,05$  и  $k = 1$ ,  $N = 10$  значения  $d_L$  и  $d_U$  будут равны соответственно 0,88 и 1,32).

Шаг 2. Областью принятия основной гипотезы служит промежуток  $(d_L, 4 - d_U)$ .

При попадании реализации статистики DW в множество  $(0, d_L]$  принимается альтернативная гипотеза  $\text{Cov}(u_i, u_{i-1}) > 0$ .

Если же реализация статистики DW попадает в множество  $[4 - d_U, 4)$ , то принимается альтернативная гипотеза  $\text{Cov}(u_i, u_{i-1}) < 0$ .

### 4.3. Критерий Голдфелда—Квандта

С помощью этого критерия проверяется предпосылка теоремы Гаусса—Маркова о совпадении дисперсий случайных остатков в модели линейной регрессии (в эконометрике говорят: проверяется гомоскедастичность случайных остатков). В дальнейшем уравнения системы  $\vec{y} = X^T \vec{\beta} + \vec{u}$  будем называть уравнениями наблюдений объекта. Итак, упорядочим уравнения наблюдений объекта по возрастанию суммы модулей значений факторов регрессии, т. е. по возрастанию значений

$$Z_i = \sum_{j=1}^k |x_{j,i}|.$$

По первым  $\bar{N} = [N/3 + 0, 5]$  упорядоченным уравнениям (где  $[\cdot]$  — обозначение целой части, при этом должно выполняться условие  $\bar{N} > k + 1$

— число выбранных уравнений больше числа оцениваемых параметров) вычисляем оценку по методу наименьших квадратов  $\hat{\beta}_1$ , затем находим

$$\text{ESS1} = \sum_{i=1}^{\bar{N}} \hat{u}_i^2,$$

где по-прежнему  $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$  (напомним, что здесь  $\hat{y} = X^T \hat{\beta}_1$ ). Аналогично по последним  $\bar{N}$  упорядоченным уравнениям наблюдений вычисляем оценку по методу наименьших квадратов  $\hat{\beta}_2$ , затем также вычисляем ESS2. В итоге получаем статистику

$$\text{CQ} = \max(\text{ESS1}/\text{ESS2}, \text{ESS2}/\text{ESS1}).$$

Реально достигнутый уровень значимости критерия вычисляется по формуле

$$1 - F_{\bar{N}-k-1, \bar{N}-k-1}(\text{CQ}),$$

где  $F_{k_1, k_2}$  — функция распределения Фишера с  $k_1 = k_2 = \bar{N} - k - 1$  степенями свободы.

#### 4.4. Обобщенный метод наименьших квадратов

Пусть вектор случайных ошибок  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  в модели линейной регрессии является гауссовским с линейно независимыми компонентами. Ковариационную матрицу  $\text{Cov}(\vec{u}, \vec{u})$  всегда можно представить в виде  $\text{Cov}(\vec{u}, \vec{u}) = \sigma_0^2 \Omega$ , где  $\Omega$  — симметричная невырожденная матрица, а  $\sigma_0^2$  — произвольно выбранная положительная константа. Оценка неизвестных параметров регрессии  $\hat{\beta}$ , доставляемая процедурой обобщенного метода наименьших квадратов, может быть вычислена в процессе решения следующей системы уравнений:

$$X\Omega^{-1}X^T\hat{\beta} = X\Omega^{-1}\vec{y}.$$

Далее мы рассмотрим две модели стационарных временных рядов, а именно: модель авторегрессии первого порядка (обозначение AR(1)) и модель скользящего среднего первого порядка (обозначение MA(1)).

## 4.5. Модель авторегрессии первого порядка, AR(1)

Определим последовательность  $\{u_t\}_{t=1,2,\dots}$  случайных величин следующим образом:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \xi_t,$$

где  $\{\xi_t\}_{t=1,2,\dots}$  — последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и дисперсией, равной  $\sigma_\xi^2$ ,  $\rho$  — некоторая константа такая, что  $|\rho| < 1$ , при этом  $\mathbf{E}u_1 = 0$ ,  $\mathbf{D}u_1 = \sigma_u^2$ ,  $\text{Cov}(u_{t-1}, \xi_t) = 0$  и  $(1 - \rho^2)\sigma_u^2 = \sigma_\xi^2$ .

Мы будем говорить, что определенный таким образом временной ряд  $\{u_t\}_{t=1,2,\dots}$  соответствует модели авторегрессии первого порядка, и обозначать  $u_t \in \text{AR}(1)$ .

Рассмотрим уровни временного ряда  $\{u_t\}_{t=1,2,\dots}$  в два произвольных, но фиксированных момента времени  $t = i$  и  $t = j$ . Уровни  $u_i$  и  $u_j$  являются случайными величинами, определим для них коэффициент корреляции

$$\rho_{uu}(i, j) = \text{Cor}(u_i, u_j).$$

Функция  $\rho_{uu}(i, j)$  называется автокорреляционной функцией, заметим, что для стационарного временного ряда она зависит только от разности  $i - j$ , т. е.  $\rho_{uu}(i, j) = f(|i - j|)$ , где  $f$  — некоторая функция. В частности, для  $u_t \in \text{AR}(1)$  автокорреляционная функция равна  $\rho_{uu}(i, j) = \rho^{|i-j|}$ .

## 4.6. Модель скользящего среднего первого порядка, MA(1)

Определим последовательность  $\{u_t\}_{t=1,2,\dots}$  случайных величин

$$u_t = \gamma \xi_{t-1} + \xi_t,$$

где  $\{\xi_t\}_{t=0,1,\dots}$  — последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и дисперсией, равной  $\sigma_\xi^2$ ,  $\gamma$  — некоторая

константа. Будем говорить, что определенный таким образом временной ряд  $\{u_t\}_{t=1,2,\dots}$  соответствует модели скользящего первого порядка и обозначать  $u_t \in \text{MA}(1)$ . Автокорреляционная функция  $\rho_{uu}(i, j)$  в этом случае равна

$$\rho_{uu}(i, j) = \begin{cases} \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \right)^{|i-j|}, & |i - j| \leq 1; \\ 0, & |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

## 4.7. Оценивание линейных регрессионных моделей с зависимыми остатками

Рассмотрим регрессионную модель

$$\begin{cases} y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + \dots + a_k x_{k,t} + u_t; \\ u_t \in \text{AR}(1), \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Обратим внимание, что  $y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  — это набор откликов в регрессионной модели,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — неизвестные параметры регрессии,  $u_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  — набор случайных остатков. Поскольку  $u_t \in \text{AR}(1)$ , мы для всех  $t = 2, 3, \dots, N$  можем выписать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_t - \rho y_{t-1} &= a_0(1 - \rho) + a_1(x_{1,t} - \rho x_{1,t-1}) + \dots + \\ &+ a_k(x_{k,t} - \rho x_{k,t-1}) + \xi_t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\{\xi_t\}_{t=2,3,\dots,N}$  — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин.

Если бы константа  $\rho$  была известна, то модель (4.1) была бы моделью множественной регрессии, в рамках которой все предпосылки теоремы 4.1 (теоремы Гаусса—Маркова) справедливы. Так что можно было бы получить методом наименьших квадратов оценки неизвестных параметров регрессии. Однако  $\rho$  — неизвестная константа, значения которой принадлежит промежутку  $[0, 1)$ . Алгоритм ее определения

нелинейным методом наименьших квадратов принадлежит Хилдрету и Лу и состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задаться в промежутке  $[0, 1)$  набором пробных значений  $\rho = \rho_i$  по правилу

$$\rho_i = (i - 1)/n, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $n$  — некоторое натуральное число.

Шаг 2. При каждом значении  $\rho = \rho_i$  составить в рамках модели (4.1) систему уравнений

$$\begin{cases} y_2 - \rho y_1 = a_0(1 - \rho) + a_1(x_{1,2} - \rho x_{1,1}) + \dots + a_k(x_{k,2} - \rho x_{k,1}) + \xi_2; \\ \dots \\ y_N - \rho y_{N-1} = a_0(1 - \rho) + a_1(x_{1,N} - \rho x_{1,N-1}) + \dots + \\ \quad + a_k(x_{k,N} - \rho x_{k,N-1}) + \xi_N \end{cases}$$

и вычислить на основании этой системы оценки неизвестных параметров с помощью метода наименьших квадратов, а также оценки случайных остатков регрессии  $\hat{\xi}_j$ ,  $j = 2, \dots, N$ . Далее следует вычислить сумму квадратов оценок случайных остатков

$$\sum_{j=2}^N \hat{\xi}_j^2.$$

Шаг 3. Выбрать из множества пробных значений  $\rho_i$  такую величину  $\hat{\rho}$  и соответствующие ей оценки неизвестных параметров регрессии, для которой достигается минимум  $\sum_{j=2}^N \hat{\xi}_j^2$ . Полученные оценки и будут искомыми оценками параметра  $\rho$  в модели авторегрессии, а также неизвестных параметров регрессии  $a_0, a_1, \dots, a_k$ .

В предлагаемых задачах всюду предполагается, что  $k = 1$ .

## 4.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры регрессии



|           |   |    |   |
|-----------|---|----|---|
| $x_{1,t}$ | 1 | 2  | 3 |
| $y_t$     | 5 | -1 | 2 |

Вычислить оценки неизвестных параметров регрессии, предполагая, что случайные остатки подчиняются модели авторегрессии с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $1/2$ .

2. Методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры регрессии

|           |       |       |       |       |        |        |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $x_{1,t}$ | 1     | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      |
| $y_t$     | 5, 4  | 10, 4 | 14, 6 | 16, 8 | 20, 07 | 26, 13 |
| $x_{1,t}$ | 7     | 8     | 9     | 10    |        |        |
| $y_t$     | 30, 8 | 35, 3 | 41, 5 | 43, 5 |        |        |

Вычислить реализацию статистики Дарбина—Ватсона, сделать выводы. Предполагая, что случайные остатки подчиняются модели авторегрессии первого порядка с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $0,3$ , вычислить оценки параметров регрессии, а также оценки случайных остатков, для полученных случайных остатков снова вычислить статистику Дарбина—Ватсона и сделать выводы.

3. Методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры регрессии

|           |   |    |   |
|-----------|---|----|---|
| $x_{1,t}$ | 1 | 2  | 3 |
| $y_t$     | 2 | -1 | 2 |

Вычислить статистику Дарбина—Ватсона и сделать выводы, вычислить сумму квадратов остатков. Далее, предполагая, что случайные остатки подчиняются модели  $AR(1)$ , с  $\rho = 1/2$ , вычислить также оценки параметров регрессии и сумму квадратов остатков, сравнить эту сумму квадратов с полученной ранее и сделать выводы.

4. Пусть последовательность случайных величин  $\{u_t\}$  подчиняется модели авторегрессии первого порядка с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $1/3$ . Вычислить автокорреляционную функцию.

5. Последовательность случайных величин  $\{u_t\}$  удовлетворяет модели скользящего среднего первого порядка с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $1/2$ . Вычислить автокорреляционную функцию.

6. Предполагая, что случайные остатки в модели регрессии подчиняются модели авторегрессии первого порядка, вычислить коэффициент корреляции между соседними уровнями случайных остатков (использовать алгоритм Хилдрета—Лу)

|           |      |      |    |       |
|-----------|------|------|----|-------|
| $x_{1,t}$ | 1    | 2    | 3  | 4     |
| $y_t$     | 7, 7 | 9, 2 | 13 | 18, 8 |

7. Предполагая, что случайные остатки в модели регрессии удовлетворяют модели скользящего среднего первого порядка, найти оценки неизвестных параметров регрессии

|           |   |    |   |    |   |
|-----------|---|----|---|----|---|
| $x_{1,t}$ | 1 | 2  | 3 | 4  | 6 |
| $y_t$     | 5 | −1 | 2 | −1 | 3 |

8. Пусть случайные остатки в модели регрессии удовлетворяют модели авторегрессии первого порядка с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $1/2$ . Используя обобщенный метод наименьших квадратов, вычислить оценки параметров регрессии

|           |   |    |   |
|-----------|---|----|---|
| $x_{1,t}$ | 1 | 2  | 3 |
| $y_t$     | 4 | −1 | 2 |

Указание: матрица, обратная к матрице  $\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1/(\rho^2 - 1) & \rho/(\rho^2 - 1) & 0 \\ \rho/(\rho^2 - 1) & -(\rho^2 + 1)/(\rho^2 - 1) & \rho/(\rho^2 - 1) \\ 0 & \rho/(\rho^2 - 1) & -1/(\rho^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

9. Пусть случайные остатки в модели регрессии удовлетворяют модели скользящего среднего первого порядка с коэффициентом корреляции между соседними уровнями, равным  $1/2$ . Используя обобщенный метод наименьших квадратов, вычислить оценки параметров регрессии

|           |   |    |   |
|-----------|---|----|---|
| $x_{1,t}$ | 1 | 2  | 3 |
| $y_t$     | 4 | −1 | 2 |

Указание: матрица, обратная к матрице  $\begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\rho^2 - 1)/(2\rho^2 - 1) & \rho/(2\rho^2 - 1) & -\rho/(2\rho^2 - 1) \\ \rho/(2\rho^2 - 1) & -1/(2\rho^2 - 1) & \rho/(2\rho^2 - 1) \\ -\rho/(2\rho^2 - 1) & \rho/(2\rho^2 - 1) & (\rho^2 - 1)/(2\rho^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

10. Пусть реализация случайных остатков в модели линейной регрессии имеет вид 0, 27; 2, 18; 0, 18; -1, 17; 0, 68; 2, 05; -1, 1; -1, 74; -3, 21. Будем предполагать, что случайные остатки удовлетворяют модели AR(1), т. е.  $u_t = \rho u_{t-1} + \xi_t$ , где  $\{\xi_t\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин. Используя метод наименьших квадратов, найти оценку для  $\rho$ .

11. Методом наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров регрессии

$\frac{x_{1,t}}{y_t} \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & -1 & 4 \end{array} \right|$ . Найти оценки случайных остатков регрессии. Предполагая, что остатки удовлетворяют модели AR(1), найти оценку для  $\rho$  (см. предыдущую задачу).

12. С помощью критерия Голдфельда—Квандта на уровне значимости пять процентов проверить предпосылку теоремы Гаусса—Маркова о равенстве дисперсий случайных остатков

а)  $\frac{x_{1,t}}{y_t} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 9,2 & 11,9 & 16,1 & 17,2 & 20 & 24,6 & 27 & 32,7 & 41,5 & 45,5 \end{array} \right|;$   
 б)  $\frac{x_{1,t}}{y_t} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 5,9 & 8,7 & 14,6 & 18,4 & 21,8 & 28 & 32,4 & 35,6 & 39,5 & 42,4 \end{array} \right|.$

## Глава 5

### Индивидуальные задания

#### 5.1. Задания по теории игр

##### Вариант 1

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из трех праздничных дней, вторая — один из трех дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен одному очку для первых двух праздничных дней и двум очкам для последнего.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

$$4. \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 & 7 \\ 8 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

На солдата движется шеренга из 3 неприятельских танков. Он может сделать 2 выстрела. Он победит, если поразит командирский танк. Центральный танк в шеренге он поражает с вероятностью 1, остальные — с вероятностями по 0,2.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 2

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Найти седловые точки, если они существуют.}$$

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как  $4 : 2 : 2 : 1$ . Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

4.  $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

5.  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два друга решили ехать поездом. В нужном направлении идут 4 поезда, на один из них могут напасть бандиты. Друзья считают, что вероятность погибнуть от рук бандитов в 1,5 раза выше для того, кто едет в одиночку.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 3

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и двум очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -5 & 1 & -6 & -1 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из сторон отправляет в разведку одну из 3 боевых единиц: танк, саперов, автоматчиков. Саперы побеждают танк с вероятностью 0,7, автоматчики побеждают саперов с вероятностью 0,7, танк побеждает автоматчиков наверняка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.



#### Вариант 4

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 4 очка.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы три из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — 4 очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 5

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и трем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 5 самолетов, один из них — бомбардировщик. Противник может выстрелить по одному из самолетов. При выстреле по самолету он поражает летящий первым с вероятностью 0,6, летящий вторым, третьим, четвертым или пятым — с вероятностью 0,5. Аэродром разбомблен, если бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 6

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает два способа рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 6 : 1 : 2 : 1. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель может купить 1 коробок спичек в одном из трех магазинов или 2 коробка в разных магазинах. Он уверен, что не более чем в двух из магазинов продают сырые спички. Оставшись без сухих спичек, несет ущерб, равный стоимости 5 коробков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую

последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 7

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Пират спрятал клад в одном из пяти гротов пещеры. Кладоискатель может обследовать либо два из трех ближайших гротов, либо один из двух более удаленных.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 8

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из четырех праздничных дней, вторая — три из четырех дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен трем очкам для первых двух праздничных дней и двум очкам для двух последних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & -2 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два преступника могут быть задержаны на одном из трех КПП. Каждый из них одерживает победу в борьбе с одним милиционером. Для задержания выделено 4 милиционера.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 9

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 2 очка.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$5. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

В караване из трех кораблей противника одно судно с ценным грузом. Подводная лодка может атаковать 2 судна. Если она атакует первое судно в караване, она поражает его с вероятностью 0,6, любое другое — с вероятностью 0,2.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 10

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две бабушки решили ехать на курорт. Они должны выбрать, чем ехать — самолетом, поездом или теплоходом (полагая, что авария может произойти не более чем с одним из этих транспортных средств). Выигрыш равен числу уцелевших бабушек (ценой билетов пренебречь).

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 11

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и двум очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ -6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Первый, второй, третий, четвертый избиратели участвуют в голосовании за кандидатов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Известно, что третий избиратель с равной вероятностью голосует за  $A$  и  $C$ , четвертый избиратель будет голосовать за  $B$ . Первый избиратель выигрывает у второго, если будет зафиксирована ничья, и проигрывает, если один из кандидатов побеждает.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 12

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

**2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 3 : 2 : 1 : 1. Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Лошадь решила купить 2 пары галош. Галошами торгуют 3 магазина. Можно купить обе пары в одном, а можно — в разных магазинах. Стоимость перемещения от магазина к магазину равна 1. Потери при приобретении бракованной пары равны 2. Если купленные в разных магазинах пары оказались бракованными, лошадь подает рекламацию и компенсирует свои расходы.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в

статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 13

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две корпорации проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций один из четырех праздничных дней, вторая — три из четырех дней. Корпорация выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен трем очкам для первых трех праздничных дней и двум очкам для последнего.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$

4.  $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель может приобрести 1 или 2 бутылки напитка в одном из трех магазинов. Покупатель уверен, что в одном из магазинов (неизвестно, в каком) вместо напитка — суррогат. Потери равны разности между числом купленных бутылок суррогата и напитка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

#### Вариант 14

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 3 очка.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

3 бабушки решили ехать на курорт. Они должны выбрать, чем ехать — самолетом, поездом или теплоходом (полагая, что авария может произойти не более чем с двумя из этих транспортных средств). Выигрыш равен числу уцелевших бабушек (ценой билетов пренебречь).

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы



растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 15

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и трем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -9 & -3 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 5 самолетов, 1 из них — бомбардировщик. Противник может выстрелить по одному самолету. При выстреле по самолету он поражает летящий первым с вероятностью 0,6, любой другой — с вероятностью 0,4. Аэродром разбомблен, если бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 16

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Каждая выбирает для проведения акций два из трех праздничных дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш

равен одному очку для первых двух праздничных дней и трем очкам для последнего.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

4.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

5.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы три из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — два очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы

растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 17

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как  $3 : 1 : 1 : 1$ . Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 7 & 0 \\ -4 & -3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из сторон может отправить в разведку танк, либо саперов, либо автоматчиков. Саперы побеждают танк с вероятностью 0,8,

автоматчики побеждают саперов с вероятностью 0,8, танк побеждает автоматчиков наверняка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 18

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы две из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает 5 очков, если рекламный блок — 9 очков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 19

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из пяти входов в метро, вторая — один из пяти входов. Фирма выигрывает, если у данного входа проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен одному очку для первых двух входов, трем очкам для третьего входа, двум очкам для четвертого и пятого входов.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Илья Муромец может поехать либо вправо, либо влево, либо прямо, либо повернуть назад. Змей Горыныч может оказаться либо слева, либо прямо, либо справа, но никак не сзади. Слева и справа Илья Муромец побеждает с вероятностью 0,6, погибает с вероятностью 0,4. Прямо он побеждает с вероятностью 0,9. Если же он не найдет Змея

Горыныча, то вернуться ему не суждено. Он считает, что в 3 раза более ценно победить, чем уцелеть.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 20

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.



Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Продавец птиц перевозит 6 попугаев в двух клетках (в одну клетку все попугаи не помещаются). У одной из клеток ненадежный замок, и в случае теплой погоды помещенные туда попугаи могут улететь. Одинокий попугай в случае холодной погоды может замерзнуть. При этом (с учетом затрат на похороны) ущерб равен стоимости трех попугаев. Прогноз погоды неизвестен.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 21

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 2 : 1 : 2 : 1. Первая фирма выбирает три способа рекламы, а вторая — два способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \\ 5 & 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Рыбак может купить 1 коробок спичек в одном из 4 магазинов или 2 коробка в разных магазинах. Он уверен, что не более чем в двух из них спички сырые. Оставшись без сухих спичек, несет ущерб, равный стоимости 10 коробков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую

последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 22

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и трем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Разбойник спрятал клад в одном из семи подвалов замка. Кладовискатель может обследовать либо два из трех ближайших подвалов, либо один из четырех более удаленных.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 23

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 9 & 8 \\ 7 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

**2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3. 
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два преступника могут быть задержаны на одном из трех КПП. Каждый из них одерживает победу в борьбе с одним милиционером. Для задержания выделено 5 милиционеров.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в

статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

#### Вариант 24

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

4.  $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

В караване из 6 кораблей противника одно судно с ценным грузом. Подводная лодка может атаковать одно из судов. Если она атакует первое судно в караване, она поражает его с вероятностью 0,6, любое другое — с вероятностью 0,3.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 25

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 3 : 2 : 2 : 1. Первая фирма выбирает три способа рекламы, а вторая — два способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Студент может поехать на автобусе, электричке или маршрутном такси. Цена билета соответственно 10, 20, 25. Если водители автобусов объявили забастовку, решивший ехать на автобусе опаздывает и несет потери, равные 50. В случае забастовки билеты на маршрутное такси дешевеют до 15.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$



Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 26

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ .

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Первый, второй, третий и четвертый избиратели участвуют в голосовании за кандидатов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Известно, что третий избиратель проголосует за  $A$ , а четвертый с равными вероятностями за  $A$  или за  $B$ . Первый избиратель проигрывает второму, если выборы закончились ничьей, и выигрывает, если победил один из кандидатов.

**7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.**

**8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 27

**1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока**  $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  **. Найти седловые точки, если они существуют.**

**2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить

на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Лошадь решила купить 2 пары калош. Калошами торгуют 4 магазина. Можно купить обе пары в одном, а можно — в разных магазинах. Стоимость перемещения от магазина к магазину равна 1. Потери при приобретении бракованной пары равны 2. Если купленные в разных магазинах пары оказались бракованными, лошадь подает рекламацию и компенсирует свои расходы.

**7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.**

**8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами**

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 28

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как  $3 : 2 : 2 : 3$ . Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 9 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель должен купить 1 или 2 бутылки напитка в одном из двух магазинов. Он уверен, что в одном из них (неизвестно, в каком) вместо напитка — суррогат. Потери равны разности между числом купленных бутылок суррогата и напитка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

## Вариант 29

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача.

Прибыль равна трем очкам для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

$$3. \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы одну из пяти газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в четырех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — три очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы

растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.

### Вариант 30

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока  $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ . Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

**Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

5.  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 3 самолета, 2 из них — бомбардировщики. Защитники аэродрома могут сбить любые два самолета. Аэродром разбомблен, если хотя бы один бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\delta_1$  — купить пакет акций,  $\delta_2$  — не покупать пакет акций,  $\theta_1$  — нефть подорожает,  $\theta_2$  — нефть подешевеет,  $\tau_1$  — биржевые индексы растут,  $\tau_2$  — биржевые индексы падают. Элементы матрицы  $A$  — потери первого игрока в тысячах рублей.



## 5.2. Задания по теории массового обслуживания

Предполагается, что все входные потоки — независимые пуассоновские, их разделение осуществляется по бернуллиевскому алгоритму; времена обслуживания — независимые одинаково распределенные показательные случайные величины.

### Вариант 1

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 8 минут. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит более 2 вызовов.

2. Студент принимает звонки на 2 номера, причем из звонков на первый номер остаются непринятыми в среднем  $1/3$  всех поступивших звонков, а на второй номер —  $1/6$ . Интенсивность поступления звонков на первый номер 6 звонков в час, на второй — 3 звонка в час. Найти вероятность того, что за полчаса будет принято ровно 2 звонка; от 2 до 6 звонков; более 3 звонков.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 6 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 4 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 2

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 9 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 20 минут придет более 4 вызовов.

2. Адресат получает письма по двум адресам, при этом в среднем  $9/10$  писем он сразу удаляет, а на каждое из оставшихся отвечает с

вероятностью 0,4. Известно, что в сутки на первый адрес поступает в среднем 5 писем, а на второй в среднем 3 письма. Найти вероятность того, что за 5 дней адресат напишет ровно 3 ответа; от 1 до 3 ответов; более 4 ответов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 15 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 8 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 3

1. Вероятность того, что за 5 минут не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение 1 часа придет ровно 6 вызовов.

2. Покупатели выбирают некоторый товар либо сразу, либо сравнив его с другим товаром. При сравнении  $3/4$  покупателей предпочитают именно этот товар. С интенсивностью 12 человек в час появляются покупатели, собирающиеся сравнивать товары, и с интенсивностью 6 человек в час приходят покупатели, желающие сразу приобрести этот товар. Покупатели, выбравшие этот товар, оплачивают покупку наличными с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в течение 4 часов покупка этого товара будет оплачена наличными ровно 5 раз; хотя бы раз; менее 4 раз.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 1,5 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 1 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

#### Вариант 4

1. Вероятность того, что в течение 2 часов придет хотя бы один вызов пуассоновского потока, равна 0,8. Найти среднее время между поступлениями вызовов.

2. Пациенты поступают в 2 кабинета. Из пациентов, поступивших в первый кабинет, в среднем  $1/4$  от числа поступивших получают отказ в приеме, а во второй кабинет — в среднем  $1/8$  от числа поступивших. Интенсивность поступления клиентов в первый кабинет равна 16 человек в час, во второй — 4 человека в час. Найти вероятность того, что за 2 часа получат отказ в приеме ровно 1 пациент; от 2 до 5 пациентов; более 5 пациентов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 6 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 5 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 3 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

#### Вариант 5

1. Среднее число вызовов пуассоновского потока, поступившее за 8 часов, равняется 1,5. Найти вероятность того, что за два часа поступит менее 4 вызовов.

2. Два магазина расположены в разных районах города. Из покупателей, заходящих в первый магазин,  $1/4$  уходят, не сделав покупки. Из покупателей второго магазина  $1/10$  уходят без покупок. В первый магазин приходят в среднем 20 человек в час, во второй — в среднем 10 человек в час. Найти вероятность того, что за 6 минут покинут эти магазины без покупок ровно 1 покупатель; от 1 до 4 покупателей; более 4 покупателей.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 5 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 3 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в

системе будет более 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 6

1. Среднее время поступления 10 вызовов пуассоновского потока равняется 12 минутам. Найти вероятность того, что в течение 3 минут поступит более 4 вызовов.

2. Длительность разговора абонента составляет менее минуты всегда, когда он ошибся номером. Если он не ошибся номером, то длительность разговора с вероятностью 0,2 также может оказаться меньше минуты. Абонент делает в среднем 10 звонков в час и при каждом звонке с вероятностью 0,1 ошибается номером. Найти вероятность того, что в течение 2 часов он сделает звонков длительностью менее минуты ровно 1; от 2 до 4; более 2.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 45 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 25 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 7 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 7

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 12 минут. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит менее 3 вызовов.

2. В женском зале парикмахерской оказывают сразу несколько услуг в среднем  $2/3$  от числа клиентов. В мужском зале этот показатель  $1/10$ . В женский зал поступает в среднем 9 клиентов в час, в мужской — в среднем 10 клиентов в час. Найти вероятность того, что за 2 часа будет оказано несколько услуг ровно 1 клиенту парикмахерской; от 1 до 5 клиентам; более чем 2 клиентам.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 20 в неделю, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 15 в неделю. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 8

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 9 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 20 минут придет более 4 вызовов.

2. Дежурный получает сигналы с двух датчиков: с первого с интенсивностью 10 сигналов в час, со второго с интенсивностью 2 сигнала в час. С вероятностью 0,1 каждый сигнал имеет повышенную громкость. Из сигналов повышенной громкости в среднем  $1/3$  — это сигналы тревоги. Найти вероятность того, что за 4 часа не поступит сигналов тревоги; поступит ровно 1 сигнал тревоги; поступит 2 или более сигнала тревоги.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 90 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 50 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 9

1. Вероятность того, что за 5 минут не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение 1 часа придет ровно 6 вызовов.

2. Абонент получает сообщения от друзей и от фирм: от друзей с интенсивностью 3 сообщения в день, а от фирм — с интенсивностью

6 сообщений в день. Все сообщения от фирм и  $2/3$  сообщений от друзей содержат приглашения. Абонент соглашается на предложения с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что в течение 3 дней он: согласится ровно на 1 предложение; не согласится ни на одно предложение; согласится более чем на 4 предложения.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 4 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 3 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 8 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 10

1. Вероятность того, что в течение 2 часов придет хотя бы один вызов пуассоновского потока, равна 0,8. Найти среднее время между поступлениями вызовов.

2. Абоненту поступают сообщения на 2 номера. Из сообщений, поступивших на первый номер, в среднем  $1/5$  от числа поступивших требуют ответа, а на второй номер — в среднем  $1/3$  от числа поступивших. Интенсивность поступления сообщений на первый номер равна 15 сообщений в сутки, на второй — 6 сообщений в сутки. Найти вероятность того, что за 4 суток потребуют ответа ровно 1 сообщение; от 1 до 5 сообщений; более 5 сообщений.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 10 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 7 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 11

1. Среднее число вызовов пуассоновского потока, поступившее за 8 часов, равняется 1,5. Найти вероятность того, что за 2 часа поступит менее 4 вызовов.

2. Абонент принимает вызовы на 2 номера. Из вызовов на первый номер остаются непринятыми в среднем  $1/3$ , на второй — в среднем  $2/3$ . Номер звонившего не известен абоненту с вероятностью 0,05. На первый номер поступает в среднем 18 вызовов в день, на второй — в среднем 6 вызовов в день. Найти вероятность того, что за 2 дня будет пропущено вызовов от неизвестных абонентов ровно 2; менее 2; более 2.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 14 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 8 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 12

1. Среднее время поступления 10 вызовов пуассоновского потока равняется 12 минутам. Найти вероятность того, что в течение 3 минут поступит более 4 вызовов.

2. Адресат получает письма из России и из-за рубежа. Все письма из-за рубежа содержат поздравления с выигрышем в лотерее. Среди писем, поступающих из России, таких поздравлений в среднем 10 %. Адреса, с которых приходят поздравления, адресат вносит в «черный список» с вероятностью 0,1. Интенсивность поступления писем из-за рубежа — 10 в сутки, из России 5 в сутки. Найти вероятность того, что в течение 5 суток адресат внесет в «черный список» ровно 1 адрес; от 1 до 4 адресов; более 1 адреса.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 9 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 5 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 2 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 13

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 8 минут. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит более 2 вызовов.

2. Студент получает письма по двум адресам, при этом из писем, приходящих на первый адрес, в среднем  $9/10$  содержат спам, а из приходящих на второй адрес в среднем — каждое второе. На письма, содержащие спам, студент никогда не отвечает, а на остальные отвечает с вероятностью  $0,2$ . Известно, что в сутки на первый адрес поступает в среднем 5 писем, а на второй в среднем 10 писем. Найти вероятность того, что за 5 дней студент напишет ровно 2 ответа; от 1 до 3 ответов; более 2 ответов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 45 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 40 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 3 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 14

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 9 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 20 минут придет более 4 вызовов.

2. Медцентр находится рядом с двумя поликлиниками. Из каждой поликлиники в медцентр направляется в среднем  $1/100$  всех посетителей, при этом из направленных в медцентр записывается на прием в среднем половина. Первую поликлинику посещает в среднем 300 человек в сутки, вторую — в среднем 200. Найти вероятность того, что за 2 дня из числа посетителей поликлиник запишутся на прием в медцентр ровно 1 человек; более 5 человек; менее 5 человек.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 3 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью  $2,5$  в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих



приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 15

1. Вероятность того, что за 5 минут не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение 1 часа придет ровно 6 вызовов.

2. Клиенты входят в торговый центр через два входа. Вошедшие в первый вход сразу оказываются на втором этаже. Вошедшие во второй вход посещают второй этаж с вероятностью 0,8. Из клиентов, посетивших второй этаж, в среднем  $1/5$  делают там две разные покупки, а  $2/5$  — одну покупку. Интенсивность прихода клиентов через первый вход — 20 человек в минуту, через второй — 15 в минуту. Найти вероятность того, что в течение 10 секунд на втором этаже будет сделано хотя бы одна покупка; ровно 1 покупка; менее 5 покупок.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 10 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 7 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 16

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 10 минут. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит более 4 вызовов.

2. Студент принимает звонки на 2 номера, причем из звонков на первый номер остаются непринятыми в среднем  $1/4$  всех поступивших звонков, а на второй номер —  $1/8$ . Интенсивность поступления звонков на первый номер 8 звонков в час, на второй — 4 звонка в час. Найти вероятность того, что за полчаса будет принято ровно 3 звонка; от 3 до 6 звонков; более 3 звонков.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 8 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 5 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 3 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 17

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 16 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 20 минут придет более 3 вызовов.

2. Адресат получает письма по двум адресам, при этом в среднем 7/10 писем он сразу удаляет, а на каждое из оставшихся отвечает с вероятностью 0,3. Известно, что в сутки на первый адрес поступает в среднем 10 писем, а на второй в среднем 2 письма. Найти вероятность того, что за 6 дней адресат напишет ровно 2 ответа; от 1 до 2 ответов; более 3 ответов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 10 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 8 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 18

1. Вероятность того, что за 16 минут не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 часа придет ровно 8 вызовов.

2. Покупатели выбирают некоторый товар либо сразу, либо сравнив его с другим товаром. При сравнении 3/5 покупателей предпочитают именно этот товар. С интенсивностью 10 человек в час появляются

покупатели, собирающиеся сравнивать товары, и с интенсивностью 5 человек в час приходят покупатели, желающие сразу приобрести этот товар. Покупатели, выбравшие этот товар, оплачивают покупку наличными с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в течение 3 часов покупка этого товара будет оплачена наличными ровно 5 раз; хотя бы раз; менее 4 раз.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 3 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 2 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 19

1. Вероятность того, что в течение 3 часов придет хотя бы один вызов пуассоновского потока, равна 0,03. Найти среднее время между поступлениями вызовов.

2. Пациенты поступают в 2 кабинета. Из пациентов, поступивших в первый кабинет, в среднем  $3/16$  от числа поступивших получают отказ в приеме, а во второй кабинет — в среднем  $1/12$  от числа поступивших. Интенсивность поступления клиентов в первый кабинет равна 8 человек в час, во второй — 4 человека в час. Найти вероятность того, что за 3 часа получают отказ в приеме ровно 1 пациент; от 2 до 5 пациентов; более 5 пациентов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 18 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 15 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

## Вариант 20

1. Среднее число вызовов пуассоновского потока, поступивших за 12 часов, равняется 15. Найти вероятность того, что за 4 часа поступит менее 3 вызовов.

2. Два магазина расположены в разных районах города. Из покупателей, заходящих в первый магазин,  $1/5$  уходят, не сделав покупки. Из покупателей второго магазина  $1/10$  уходят без покупок. В первый магазин приходят в среднем 25 человек в час, во второй — в среднем 20 человек в час. Найти вероятность того, что за 12 минут покинут эти магазины без покупок ровно 1 покупатель; от 1 до 5 покупателей; более 5 покупателей.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 25 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 15 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

## Вариант 21

1. Среднее время поступления 100 вызовов пуассоновского потока равняется 15 минутам. Найти вероятность того, что в течение 2 минут поступит более 2 вызовов.

2. Длительность разговора абонента составляет менее минуты всегда, когда он ошибся номером. Если он не ошибся номером, то длительность разговора с вероятностью 0,1 также может оказаться меньше минуты. Абонент делает в среднем 6 звонков в час, и при каждом звонке с вероятностью  $1/6$  ошибается номером. Найти вероятность того, что в течение 3 часов он сделает звонков длительностью менее минуты ровно 1; от 2 до 4; более 2.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 65 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 35 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в

системе будет менее 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 22

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 45 минут. Найти вероятность того, что за 24 минуты поступит менее 2 вызовов.

2. В женском зале парикмахерской оказывают сразу несколько услуг в среднем  $3/4$  от числа клиентов. В мужском зале этот показатель  $1/20$ . В женский зал поступает в среднем 16 клиентов в час, в мужской — в среднем 20 клиентов в час. Найти вероятность того, что за 2 часа будет оказано несколько услуг ровно 1 клиенту парикмахерской; от 1 до 5 клиентам; более чем 5 клиентам.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 10 в неделю, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 6 в неделю. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 8 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 23

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 15 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 10 минут придет более 3 вызовов.

2. Дежурный получает сигналы с двух датчиков: с первого с интенсивностью 20 сигналов в час, со второго с интенсивностью 4 сигнала в час. С вероятностью 0,01 каждый сигнал имеет повышенную громкость. Из сигналов повышенной громкости в среднем  $1/6$  — это сигналы тревоги. Найти вероятность того, что за 10 часов не поступит сигналов тревоги; поступит ровно 1 сигнал тревоги; поступит 2 или более сигнала тревоги.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 90 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 50 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

#### Вариант 24

1. Вероятность того, что за 20 минут не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,05. Найти вероятность того, что в течение 2 часов придет ровно 8 вызовов.

2. Абонент получает сообщения от друзей и от фирм: от друзей с интенсивностью 4 сообщения в день, а от фирм — с интенсивностью 8 сообщений в день. Все сообщения от фирм и  $2/5$  сообщений от друзей содержат приглашения. Абонент соглашается на предложения с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в течение 4 дней он: согласится ровно на 2 предложения; не согласится ни на одно предложение; согласится более чем на 3 предложения.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 4 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 3 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 8 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

#### Вариант 25

1. Вероятность того, что в течение 4 часов придет хотя бы один вызов пуассоновского потока, равна 0,6. Найти среднее время между поступлениями вызовов.

2. Абоненту поступают сообщения на 2 номера. Из сообщений, поступивших на первый номер, в среднем  $1/10$  от числа поступивших

требуют ответа, а на второй номер — в среднем  $1/6$  от числа поступивших. Интенсивность поступления сообщений на первый номер равна 30 сообщений в сутки, на второй — 12 сообщений в сутки. Найти вероятность того, что за 4 суток потребуют ответа ровно 2 сообщения; от 1 до 5 сообщений; более 5 сообщений.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 30 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 16 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 26

1. Среднее число вызовов пуассоновского потока, поступивших за 16 часов, равняется 3. Найти вероятность того, что за 4 часа поступит менее 4 вызовов.

2. Абонент принимает вызовы на 2 номера. Из вызовов на первый номер остаются непринятыми в среднем  $1/8$ , на второй — в среднем  $1/16$ . Номер звонившего не известен абоненту с вероятностью 0,1. На первый номер поступает в среднем 16 вызовов в день, на второй — в среднем 8 вызовов в день. Найти вероятность того, что за 2 дня будет пропущено вызовов от неизвестных абонентов ровно 1; менее 2; более 3.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 10 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 8 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 5 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 27

1. Среднее время поступления 20 вызовов пуассоновского потока равняется 24 минутам. Найти вероятность того, что в течение 6 минут поступит более 5 вызовов.

2. Адресат получает письма из России и из-за рубежа. Все письма из-за рубежа содержат поздравления с выигрышем в лотерею. Среди писем, поступающих из России, таких поздравлений в среднем 20 %. Адреса, с которых приходят поздравления, адресат вносит в «черный список» с вероятностью 0,05. Интенсивность поступления писем из-за рубежа — 8 в сутки, из России 5 в сутки. Найти вероятность того, что в течение 5 суток адресат внесет в «черный список» ровно 1 адрес; от 1 до 4 адресов; более 1 адреса.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 20 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 12 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 28

1. Вызовы пуассоновского потока поступают в среднем через каждые 7 минут. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит более 3 вызовов.

2. Студент получает письма по двум адресам, при этом из писем, приходящих на первый адрес, в среднем  $4/5$  содержат спам, а из приходящих на второй адрес — в среднем каждое третье. На письма, содержащие спам, студент никогда не отвечает, а на остальные отвечает с вероятностью 0,1. Известно, что в сутки на первый адрес поступает в среднем 10 писем, а на второй в среднем 6 писем. Найти вероятность того, что за 6 дней студент напишет ровно 3 ответа; от 1 до 3 ответов; более 2 ответов.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 25 в минуту, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 20 в минуту. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет менее 4 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.



### Вариант 29

1. Интенсивность пуассоновского потока составляет 50 вызовов в час. Найти вероятность того, что за 10 минут придет более 3 вызовов.

2. Медцентр находится рядом с двумя поликлиниками. Из каждой поликлиники в медцентр направляется в среднем  $1/500$  всех посетителей, при этом из направленных в медцентр записывается на прием в среднем половина. Первую поликлинику посещает в среднем 150 человек в сутки, вторую — в среднем 100. Найти вероятность того, что за 3 дня из числа посетителей поликлиник запишутся на прием в медцентр ровно 1 человек; более 5 человек; менее 5 человек.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 6 в час, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 5 в час. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет более 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### Вариант 30

1. Вероятность того, что за 4 минуты не придет ни одного вызова пуассоновского потока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение 1 часа придет ровно 8 вызовов.

2. Клиенты входят в торговый центр через два входа. Вошедшие в первый вход сразу оказываются на втором этаже. Вошедшие во второй вход посещают второй этаж с вероятностью 0,9. Из клиентов, посетивших второй этаж, в среднем  $1/3$  делают там две разные покупки, и  $1/3$  — одну покупку. Интенсивность прихода клиентов через первый вход — 20 человек в минуту, через второй — 12 в минуту. Найти вероятность того, что в течение 10 секунд на втором этаже будет сделано хотя бы одна покупка; ровно 2 покупки; менее 4 покупок.

3. Вызовы поступают в систему с интенсивностью 20 в секунду, обслуживаются с ожиданием. Обслуживающие приборы работают с интенсивностью 14 в секунду. Рассмотреть случаи двух и трех обслуживающих приборов. Найти вероятность того, что в стационарном ре-

жине в системе будет менее 6 вызовов. Найти среднее время ожидания начала обслуживания.

### **5.3. Расчетно-практическое задание по теории массового обслуживания**

Задание выполняется двумя студентами. Для выполнения задания выбрать систему обслуживания (магазин с одной кассой или киоск), записать название, адрес и дату исследования. Для 30 клиентов записать время прибытия в очередь (часы, минуты, секунды), время начала обслуживания (если очереди нет, то оно совпадает с временем прибытия), время окончания обслуживания (если очередь есть, то оно совпадает с временем начала обслуживания следующего клиента).

Вычислить оценки интенсивностей прихода клиентов и обслуживания, нагрузки системы. Вычислить оценки вероятностей того, что в системе нет клиентов, один клиент, два клиента, три клиента; оценки среднего числа клиентов в системе, средней длины очереди, среднего времени ожидания и среднего полного времени обслуживания.

Вычислить, как изменятся эти характеристики, если вместо одного кассира (киоскера) будут работать двое с той же интенсивностью.

## 5.4. Расчетное задание по теории регрессии

Для данной реализации  $Y_1, \dots, Y_N$  рассмотреть трендовые трехпараметрические модели

$$y_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{N} + b_1 \sin \frac{2\pi t}{N};$$

$$y_2(t) = \begin{cases} c_1 & t < \theta; \\ c_2 & t \geq \theta; \end{cases}$$

$$y_3(t) = a + bt + ct^2.$$

В качестве оценки параметра  $\theta$  взять точку, в которой достигается максимум

$$|NS_k - kS_N|$$

по  $k$  от 1 до  $N - 1$ , где  $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$ .

Оценки остальных параметров найти по методу наименьших квадратов.

Для каждой из моделей вычислить долю объясненной дисперсии.

Выбрать ту модель, для которой доля объясненной дисперсии окажется наибольшей.

Для остатков регрессии в этой модели с помощью критерия Дарбина—Ватсона проверить гипотезу о некоррелированности на уровне значимости 0,05.

С помощью критерия Голдфелда—Квандта проверить гипотезу об их гомоскедастичности на уровне значимости 0,05.

## Список литературы

1. *Бывшев В. А.* Эконометрика/ Бывшев В. А. — М.: Финансы и статистика, 2008.
2. *Джафаров К. А.* Элементы теории игр/ Джафаров К. А., Могоульский А. А. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 1997.
3. *Джафаров К. А.* Элементы теории массового обслуживания/ Джафаров К. А., Могоульский А. А. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 1997.
4. *Коршунов Д. А.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей/ Коршунов Д. А., Фосс С. Г. — СПб.: Лань, 2004.
5. *Крушевский А. В.* Теория игр/ Крушевский А. В. — Киев: Вища школа, 1977.
6. *Лунгу К. Н.* Линейное программирование/ Лунгу К. Н. — М.: Физматлит, 2009.
7. *Мулен Э.* Теория игр/ Мулен Э. — М.: Мир, 1985.
8. *Палий И. А.* Линейное программирование/ Палий И. А. — М.: Эксмо, 2008.
9. *Свешников А. А.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Свешников А. А. — СПб.: Лань, 2008.

10. *Ширяев А. Н.* Вероятность/ Ширяев А. Н. — М.: Наука, 1980.

## Источники Интернет

1. *Аркашов Н. С.* Пакет статистических вычислений.  
<http://www.nsu.ru/mmф/tvims/arkashov/calc/index.html>
2. *Чернова Н. И.* Лекции по теории вероятностей.  
<http://www.nsu.ru/mmф/tvims/chernova/tv/index.html>