

Глава 3. Случайные величины (продолжение).....	1
Основные распределения случайных величин.	1
Основные распределения дискретных случайных величин.	2
Биномиальный закон распределения.....	2
Ряд распределения.....	2
Функция распределения.....	2
Распределение Пуассона.....	4
Геометрическое распределение.	5
Гипергеометрическое распределение.....	7
Основные распределения непрерывных случайных величин.	7
Равномерное распределение.....	8
Экспоненциальное (показательное) распределение.....	10

Глава 3. Случайные величины (продолжение).

Основные распределения случайных величин.

Для исследования распределений случайных величин нам понадобится понятие характеристической функции. Поэтому рекомендуется еще раз перечитать лекцию про функции случайного аргумента.

Напомним, что ранее мы ввели определение характеристической функции случайной величины X :

$$\varphi(t) = Me^{itX}.$$

Характеристическая функция есть математическое ожидание функции случайной величины $g(X) = e^{itX}$.

Если X - дискретная случайная величина, $p_k = P\{X = x_k\}$, то, согласно правилу вычисления математического ожидания функции случайной величины:

$$M[g(X)] = \sum_k (g(x_k) \cdot p_k).$$

Следовательно, для дискретных случайных величин характеристическая функция есть:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{itx_k} \cdot p_k)$$

В случае, когда случайная величина принимает целочисленные значения $X = m$, ($m=0,1,2,3..$) характеристическую функцию можно записать в виде производящей функции:

$$\psi(z) = \sum_m z^m P_m (z = e^{it}).$$

С помощью характеристической функции можно найти начальные моменты:

$$\alpha_k = (-i)^k \varphi^{(k)}(0).$$

В частности: $\alpha_1 = -i \cdot \varphi'(0)$, $\alpha_2 = -\varphi''(0)$.

В свою очередь, математическое ожидание и дисперсия есть:

$$MX = \alpha_1, \quad DX = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Заметим, что в наших обозначениях $\varphi^{(k)}(0) = \psi^{(k)}(1)$.

Ранее мы показали, что

$$MX = \psi'(1); \quad DX = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2$$

Характеристическая (производящая) функция так же однозначно определяет распределение, как и функция распределения $F(x)$ и функция плотности $f(x)$.

Основные распределения дискретных случайных величин.



Общий план исследования распределения будет таков:

- вводим определение распределения,
- находим функцию распределения,
- находим характеристическую функцию,
- находим основные числовые характеристики (непосредственно из определений или с помощью характеристической функции),
- получаем формулы для вычисления вероятностей,
- рассматриваем примеры.

Биномиальный закон распределения.

Определение. Дискретная величина X распределена по **биномиальному** закону, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями

$$P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } 0 < p < 1, q = 1 - p, m = \overline{1, n}$$

С.в. X , определенная таким образом, является числом успехов с вероятностью p в схеме Бернулли.

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами: n, p .

Ряд распределения выглядит так:

X	0	1	2	...	m	...	n
P_m	$C_n^0 p^0 q^n = q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	$C_n^n p^n q^0 = p^n$

Название распределения происходит от "бинома (Ньютона)": $(a + b)^n$.

Известно, что $(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$ (легко проверить это равенство для $n=2$ или 3).

Биномиальное распределение действительно удовлетворяет условию нормировки, так как:

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{m=0}^x C_n^m p^m q^{n-m}, & 0 < x \leq n \\ 1, & n < x \end{cases}$$

Для нахождения математического ожидания и дисперсии воспользуемся характеристической функцией, а именно, ее частным случаем – производящей функцией.

Для биномиального распределения **производящая функция** выглядит так:

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^n P_m z^m = \sum_{m=0}^n (C_n^m p^m q^{n-m}) z^m = \sum_{m=0}^n C_n^m (p^m z^m) q^{n-m} = (q + pz)^n$$

Воспользуемся тем, что $MX = \psi'(1)$; $DX = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2$.

Вычислим производные производящей функции:

$$\psi'(z) = n(q + pz)^{n-1} p; \quad \psi''(z) = n(n-1)(q + pz)^{n-2} p^2.$$

Подставим значения $z = 1$: $\psi'(1) = np$; $\psi''(1) = n(n-1)p^2$.

$$DX = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1 - p) = npq$$

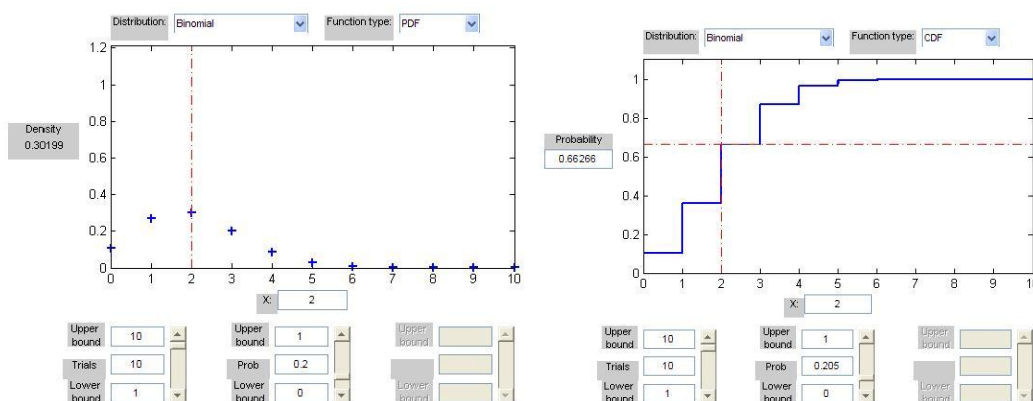
Получили выражения для математического ожидания и дисперсии в случае биномиального распределения:

$$MX = np; \quad DX = npq.$$

(при вычислении воспользовались очевидным фактом: $(p + q) = 1$)

Формально мы можем рассмотреть для дискретных случайных величин функцию плотности, она будет представлять собой точечные значения вероятностей для соответствующих значений случайной величины.

Далее приводятся **графики функций** плотности (PDF) и функции распределения (CDF) для биномиального распределения для различных значений вероятности при $n=10$:

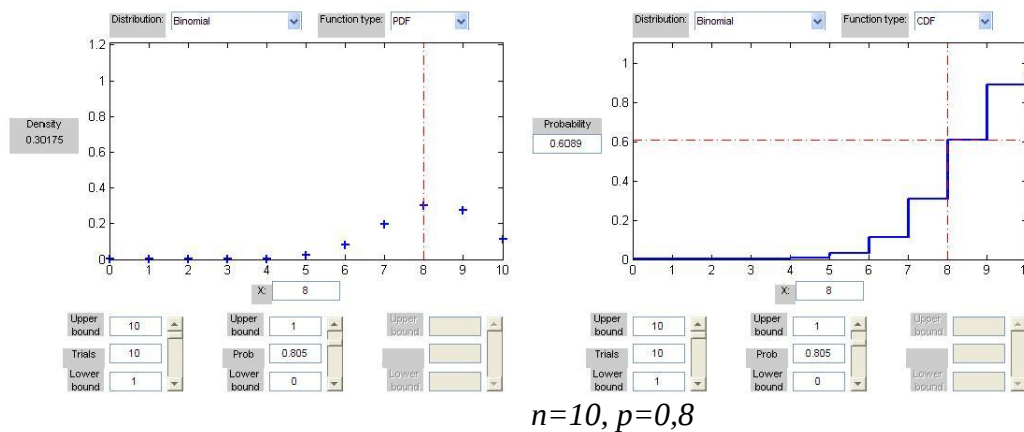


$n=10, p=0.2.$

Пояснения к рисункам.

График PDF: "Density=0.3" – значение вероятности при $X=2$.

График CDF "Probability=0.66" – значение вероятности $P(X < 2) = F(2)$



Распределение Пуассона.

Определение. Дискретная величина X распределена по закону **Пуассона**, если принимает счетное число значений $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ с вероятностями:

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} \quad (*)$$

Формула (*) получается из формулы Бернулли предельным переходом при $n \rightarrow \infty$, когда вероятность успеха в схеме Бернулли p настолько мала, что можно считать параметр $a = np = \text{const}$. При последовательности независимых событий параметр a можно трактовать как постоянную среднюю интенсивность. Распределение Пуассона определяется одним параметром: a .

Ряд распределения выглядит так:

X	0	1	2	...	m	...
P_m	e^{-a}	$\frac{a \cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2!}$	...	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	...

Проверка выполнения условия нормировки:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^a = 1$$

(воспользовались разложением экспоненты e^a в ряд).

Воспользуемся аппаратом производящих функций и найдем математическое ожидание и дисперсию.

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{a^m e^{-a}}{m!} \right) z^m \right] = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(az)^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{az} = e^{a(z-1)}$$

- характеристическая (производящая) функция распределения Пуассона.

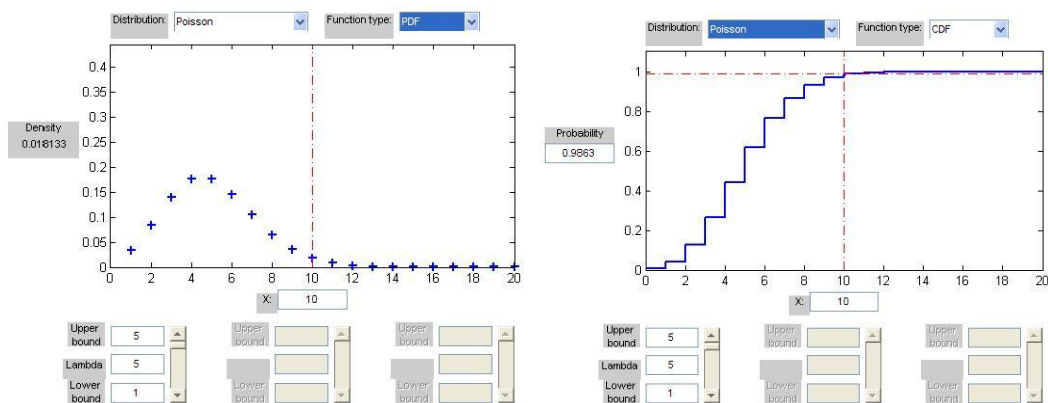
$$\psi'(z) = ae^{a(z-1)}; \quad \psi''(z) = a^2 e^{a(z-1)} \Rightarrow$$

$$MX = \psi'(1) = a; \quad DX = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = a.$$

Получили интересный факт: в случае распределения Пуассона $MX = DX = a$.

Замечание. Если для полученных данных оценки мат. ожидания и дисперсии получают приблизительно равными, то можно считать случайную величину распределенной по закону Пуассона.

Далее на рисунках приводятся графики функции плотности (PDF) и функции распределения (CDF) для распределения Пуассона для различных значений a :

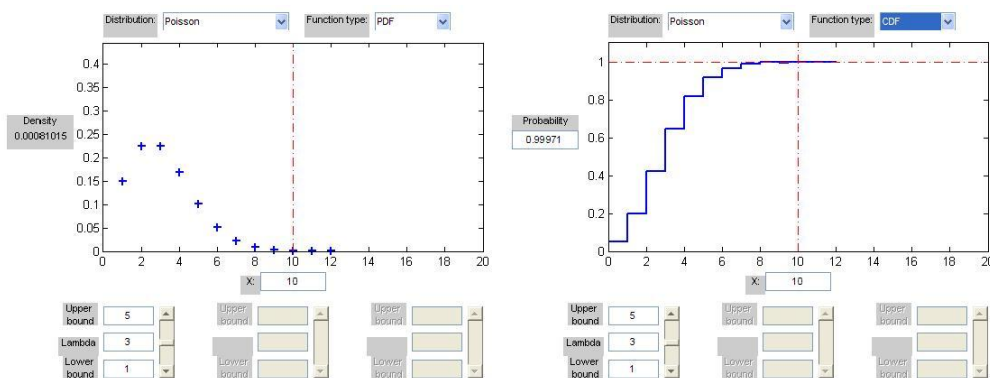


Пояснения к рисункам.

"Lambda"=a=5.

График PDF: "Density=0.018" – значение вероятности при X=10.

График CDF "Probability=0.98" – значение вероятности $P(X < 10) = F(10)$



"Lambda"=a=3.

Геометрическое распределение.

Определение. Дискретная величина X распределена по **геометрическому** закону, если принимает счетное число значений $1, 2, \dots, m, \dots$ с вероятностями:

$$P_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Такое распределение имеет случайная величина, равная количеству испытаний до первого успеха. Как видно из определения, геометрическое распределение определяется одним параметром – вероятностью успеха p .

Ряд распределения выглядит так:

X	1	2	3	...	m	...
P_m	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...	$q^{m-1} \cdot p$	...

Получаем, в принципе, бесконечный ряд, так как мы не знаем, когда наступит успех в серии испытаний. Заметим, что вероятности, соответствующие значениям X , представляют собой **геометрическую прогрессию**, в которой каждый следующий член отличается от предыдущего на множитель $q < 1$. Поэтому распределение и называется **геометрическим**.

Для проверки условия нормировки достаточно вспомнить, чему равна сумма геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии, меньшим 1, $a_1 = 1$, при $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

Для геометрического распределения производящая функция выглядит так:

$$\psi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m z^m = \sum_{m=1}^{\infty} (pq^{m-1})z^m = pz \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} = pz \cdot \frac{1}{1-qz}$$

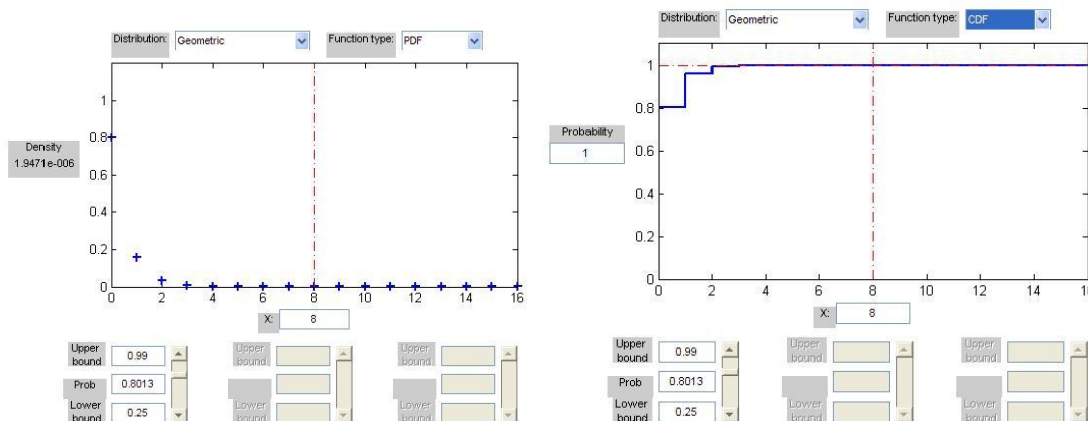
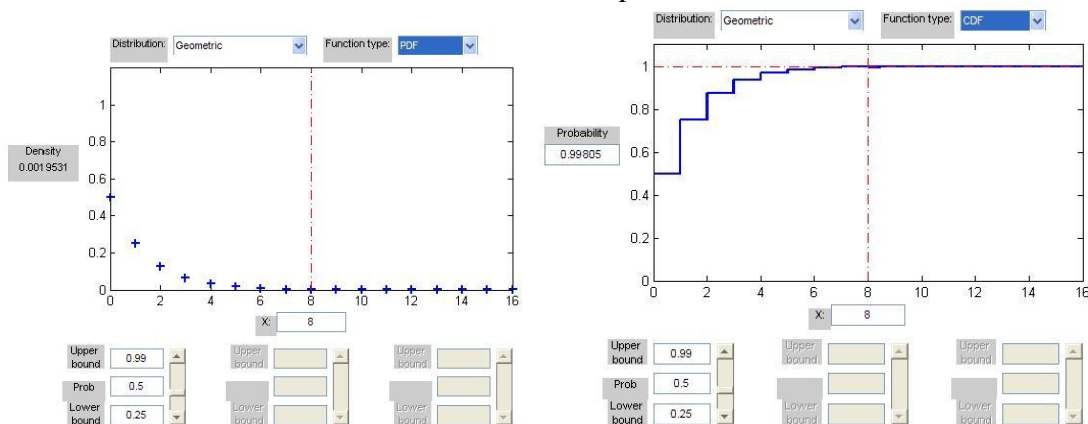
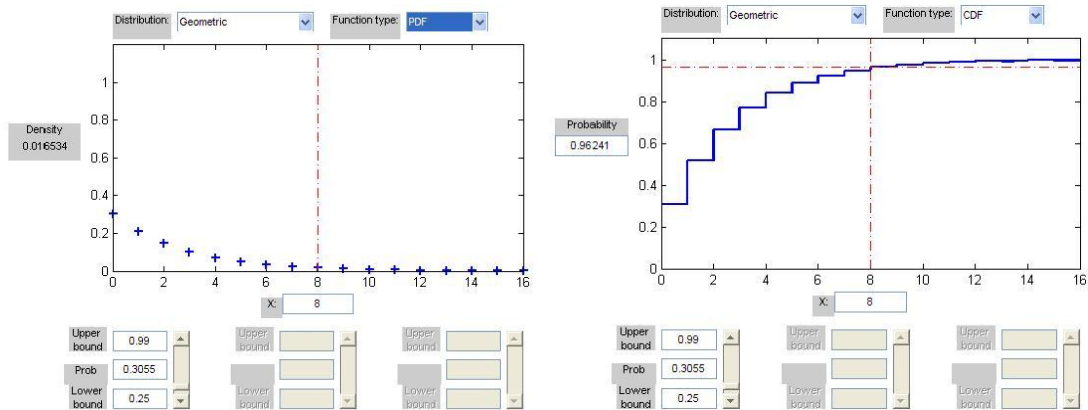
(с учетом того, что $|z| \leq 1$, получаем сумму геометрической прогрессии).

$$\psi'(z) = \frac{p(1-qz) - pz(-q)}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}; \quad \psi''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3} \Rightarrow \psi'(1) = \frac{1}{p}; \quad \psi''(1) = \frac{2q}{p^2} \Rightarrow$$

$$MX = \psi'(1) = \frac{1}{p};$$

$$DX = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Далее на рисунках - графики плотности геометрического распределения (PDF) и функции распределения (CDF), приводятся для различных значений вероятности p :

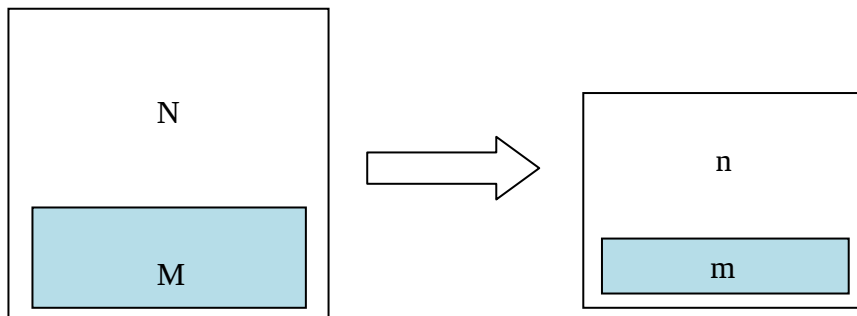


Гипергеометрическое распределение.

Определение. Дискретная величина X распределена по *гипергеометрическому* закону, если принимает счетное число значений $0, 1, 2, \dots, m, \dots, \min(n, M)$ с вероятностями:

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \text{ где } m = 0, 1, 2, 3, \dots; M \leq N; m \leq n$$

Гипергеометрическое распределение можно смоделировать так: пусть из N объектов M объектов обладают некоторым свойством A . Из всей совокупности из N объектов случайным образом отбирают n объектов. Нужно найти вероятность того, что в выборке из n объектов m объектов будут обладать свойством A .



Значения основных числовых характеристик для гипергеометрического распределения приведем без вывода:

$$MX = n \cdot \frac{M}{N};$$

$$DX = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2}$$

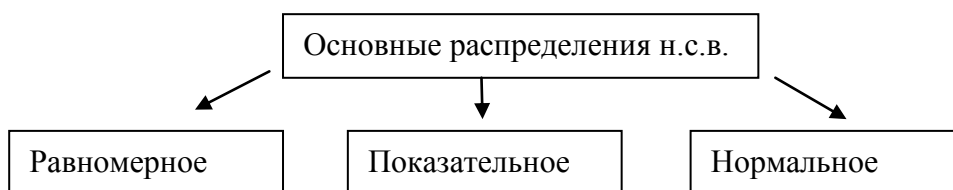
Замечание. Биномиальное распределение является предельным случаем гипергеометрического, когда мы определяем вероятность успеха – «выбрать объект, обладающий свойством A » – по исходной совокупности:

$$p = \frac{M}{N} \Rightarrow \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_n^m p^m q^{n-m}$$

На практике, так поступают, когда « n мало по сравнению с N »: $n < \frac{1}{10} N$.

Биномиальное распределение можно рассматривать как "схему с возвращением" – тогда вероятность извлечения объекта, обладающего свойством " M ", будет постоянной и равной $p = \frac{M}{N}$.

Основные распределения непрерывных случайных величин.

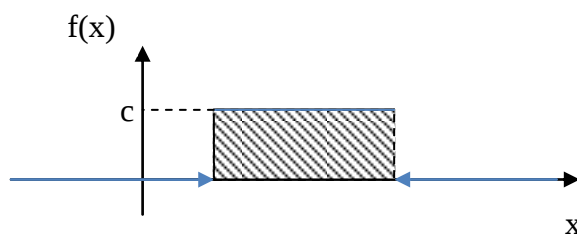


Равномерное распределение.

В случае, когда мы плохо представляем себе картину дискретного распределения (в общем и в частности), мы делаем предположение о равновозможности. В случае непрерывного распределения случайных величин, самое простое предположение, которое мы можем сделать: случайная величина имеет равномерное распределение. Если вероятность уподобить массе, то равномерное распределение есть масса, равномерно распределенная по всей длине, например, стержня.

Определение. Непрерывная случайная величина X , принимающая значения на интервале $[a, b] \in R$, имеет **равномерное распределение**, если ее плотность распределения можно задать так:

$$f(x) = \begin{cases} c = \text{const}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (1)$$



$f(x)$ является функцией плотности распределения в том случае, если удовлетворяет условию нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ - в общем случае. Для нахождения конкретного значения константы нам достаточно рассмотреть этот интеграл на заданном интервале:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b - a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b - a} = \frac{1}{l}, \text{ где } l = b - a \text{ - длина интервала.}$$

Таким образом, координаты концов интервала однозначно определяют константу, поэтому:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} = \frac{1}{l}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2)$$

Определенный интеграл

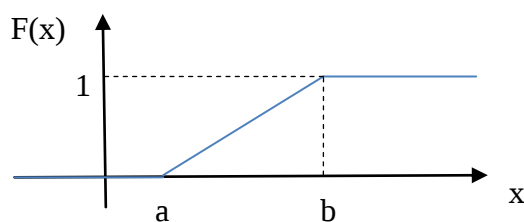
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

равен вероятности попадания в интервал $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^x f(u) du = P(X < x) = F(x)$ есть функция распределения. С учетом того, что плотность распределения отлична от нуля только на $[a, b]$:

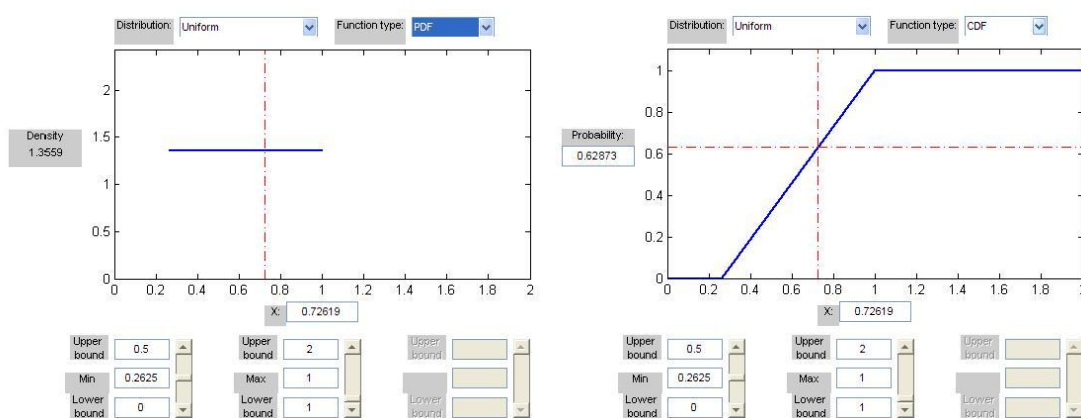
$$F(x) = \int_a^x f(u) du = \frac{x - a}{b - a} \quad (3)$$

Полученное выражение (3) задает уравнение прямой. Общий вид графика такой функции:



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (4)$$

(4) можно считать определением функции распределения в случае равномерного распределения непрерывной случайной величины.



Графики функции плотности и функции распределения, построенные с помощью пакета Matlab. Для интервала $[0.2625; 1]$

Найдем основные числовые характеристики равномерного распределения.

Математическое ожидание:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{2(b-a)}(b^2 - a^2) = \frac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a) = \frac{a+b}{2}$$

$$MX = \frac{a+b}{2} \quad (5)$$

Дисперсия:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (6)$$

Как видим, равномерное распределение определяется двумя параметрами: a и b .

Обозначение: $X \sim R[a, b]$ - случайная величина имеет равномерное распределение на интервале $[a, b]$.

Характеристическая функция равномерного распределения:

$$\varphi(t) = \int_a^b e^{itx} \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Вспомним, что значения производных характеристической функции при $t = 0$ связаны с начальными моментами соотношением: $\alpha_k = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$, $\alpha_1 = -i \cdot \varphi'(0)$, $\alpha_2 = -\varphi''(0)$.

В свою очередь, математическое ожидание и дисперсия есть: $MX = \alpha_1$, $DX = \alpha_2 - \alpha_1^2$. Можем воспользоваться характеристической функцией для вычисления начальных моментов, хотя непосредственное вычисление, в данном случае, приводит нас к нужному результату более простым путем.

Например, найдем математическое ожидание. Первая производная характеристической функции:

$$\varphi'(t) = \frac{be^{itb} - ae^{ita}}{t(b-a)} - i \cdot \frac{e^{itb} - e^{ita}}{t^2(b-a)}.$$

Непосредственная подстановка $t = 0$ дает неопределенность типа $\frac{0}{\infty}$.

Найдем $\varphi'(0)$ как $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$, для чего воспользуемся правилом Лопиталя: $\varphi'(0) = \frac{i}{2}(a+b)$.

Тогда получим уже знакомый нам результат: $MX = -i\varphi'(0) = \frac{a+b}{2}$.

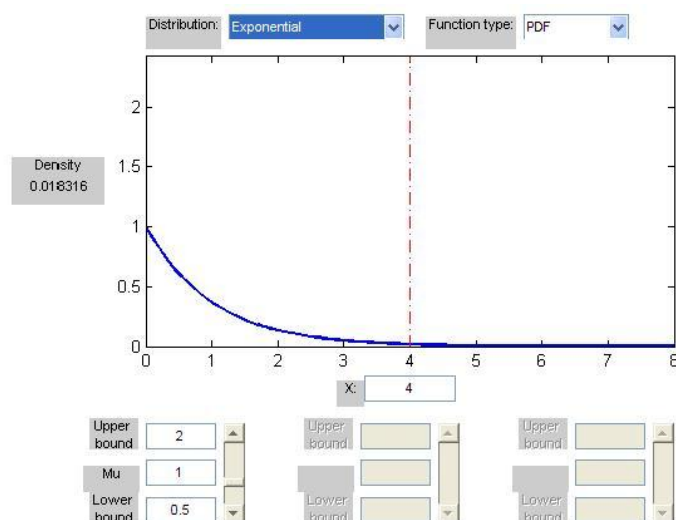
Экспоненциальное (показательное) распределение.

Определение. Случайная величина X имеет экспоненциальное (показательное) распределение, если функция плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \lambda > 0 \quad (7)$$

Как это видно из определения, экспоненциальное распределение определяется одним параметром λ . Плотность отлична от 0 только для положительных x , что дает основание интерпретировать эту переменную как время t .

График плотности экспоненциального распределения (Matlab):



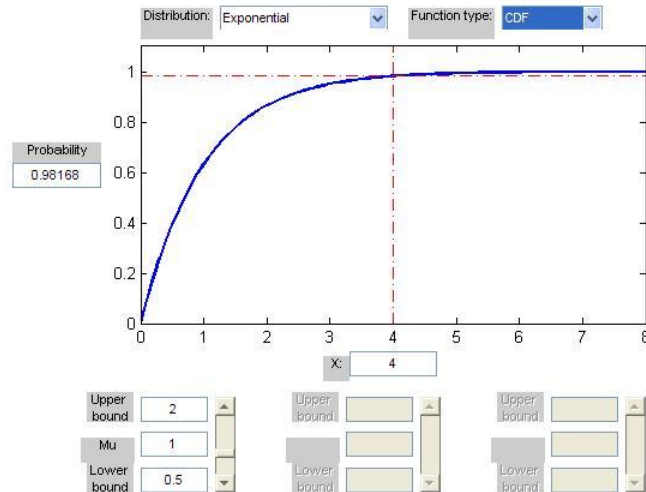
Комментарии к рисунку.

Function Type – PDF (probability density function);
показано значение функции $f(4)$: Density=0.018316;
значение "Mu" = $\lambda = 1$.

Проверка условия нормировки: $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1$.

Функция распределения: $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (8)$

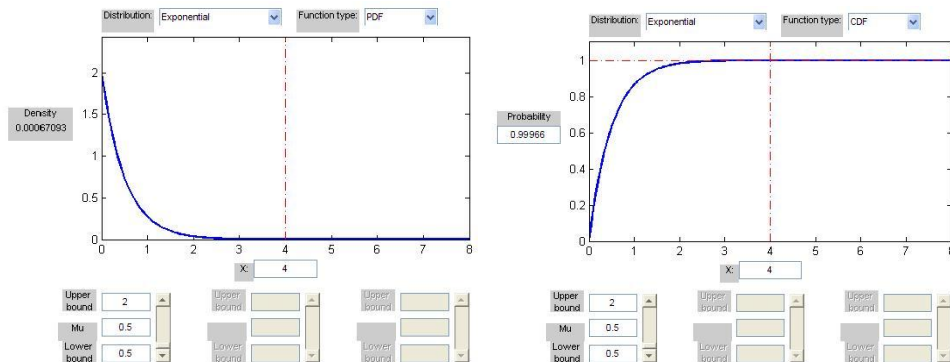
График функции распределения (CDF):



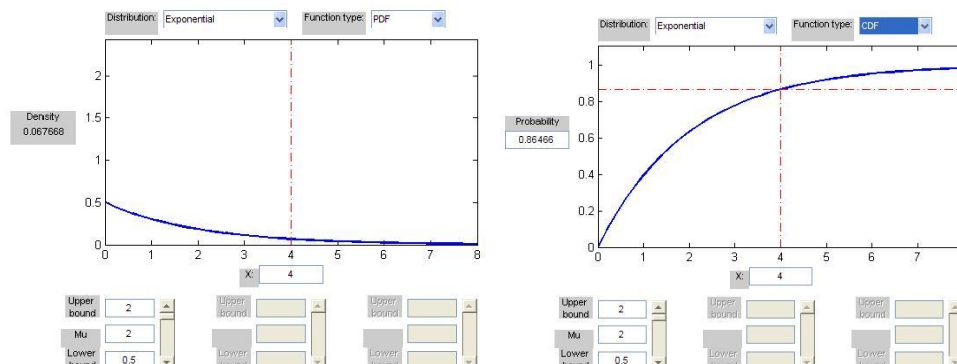
Function Type – CDF (cumulative distribution function);
показано значение вероятности $F(4)=P\{x<4\}$: Probability=0.98168

Далее на графиках демонстрируется изменение плотности и функции распределения при изменении параметра λ .

Для $\lambda = 2$:



Для $\lambda = 0.5$:



Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (9)$$

Математическое ожидание:

$$MX = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{1}{\lambda} \quad (10)$$

Дисперсия:

$$DX = \int_0^{\infty} (x - MX)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{1}{\lambda^2} \quad (11)$$

Экспоненциальное распределение является однопараметрическим с параметром λ , причем:

$$MX = \sigma_x = \frac{1}{\lambda} \quad (12)$$

Характеристическая функция экспоненциального распределения:

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} [\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(it - \lambda)x} - 1] = \frac{\lambda}{\lambda - it},$$

(так как $|\frac{e^{itx}}{e^{\lambda x}}| \leq \frac{1}{e^{\lambda x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$).

Математическое ожидание и дисперсию можем найти и с помощью характеристической функции:

$$\varphi'(t) = \frac{-i\lambda}{(\lambda - it)^2}, \quad \varphi''(t) = \frac{-2\lambda}{(\lambda - it)^3},$$

$$\alpha_1 = -i\varphi'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \alpha_2 = -\varphi''(0) = -\frac{-2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Следовательно, $MX = \alpha_1 = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{\lambda}$