НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В лабораторном практикуме вы постоянно будете иметь дело с измерениями физических величин. Необходимо уметь правильно обрабатывать и представлять результаты этих измерений. Цель данного раздела- сообщить основные сведения, касающиеся особенностей физических измерений, обработки и представления результатов. Более подробная информация приведена в литературе, указанной в конце этого раздела.

1. Погрешности измерения физических величин. Основные сведения.

Измерения бывают *прямые* и *косвенные*. В случае *прямого* измерения значение физической величины непосредственно измеряется с помощью прибора, шкала которого проградуирована в единицах измерения этой величины. В случае *косвенного* измерения значение величины вычисляется по формуле, которая связывает искомую величину с другими величинами, измеренными прямо или косвенно.

Прямые измерения могут быть *однократными* и *многократными*. При многократных измерениях одной и той же величины при одних и тех же условиях, как правило, получаются разные результаты. Это связано с тем обстоятельством, что любое измерение сопровождается *погрешностями*.

Погрешности в зависимости от характера вызвавших их причин принято разделять на три вида:

1. *Систематические погрешности*- это погрешности, остающиеся неизменными (как по величине, так и по знаку) или изменяющиеся по известному закону при многократных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности могут

быть связаны с ошибками измерительных приборов (инструментальная погрешность) и/или с самой постановкой опыта. Этот тип погрешностей является наиболее опасным, так как их нельзя выявить при многократных измерениях или с помощью статистической обработки.

2. *Случайные погрешности*- погрешности, изменяющиеся случайным, непредсказуемым образом (по величине и по знаку) при многократных измерениях одной и той же величины. Случайный характер этой погрешности означает, что при многократных измерениях погрешность любого данного измерения не зависит от того, какое значение погрешности получилось при любом другом измерении. Этот тип погрешности возникает в результате действия неконтролируемых факторов, влияние которых нельзя точно предсказать. Однако, существуют методы, основанные на теории вероятностей и законах математической статистики, позволяющие их уверенно оценить (и уменьшить) в каждом конкретном случае.
3. Промахи- грубые погрешности, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Такие погрешности обычно связаны с невнимательностью экспериментатора, неверностью взятого отсчета или его записи и т. д. При повторных измерениях промах легко обнаруживается и исключается из эксперимента.

2. Случайные погрешности и статистические характеристики результатов прямых измерений физических величин.

2.1 Среднее значение

В теории ошибок существует понятие *истинного значения* измеряемой физической величины, которое мы будем обозначать символом X. Это значение неизвестно и целью любых измерений является определение соответствующей величины x_0, которая по возможности является наиболее близкой к X: $x_0 \approx X$. Величина x_0 называется *оценкой* истинного значения величины X.

При проведении конечного, но достаточно большого числа измерений N одной и той же величины оценка x_0 приблизительно равна среднему арифметическому значению

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

где x_i- значение величины x, полученное в ***i***- ом измерении.

В теории ошибок доказывается, что при $N \to \infty$ оценка x_0 будет приближаться к истинному значению X.

Величина $\bar{x}$ в (1) называется *выборочным средним* для данной серии измерений, а сама серия называется *выборкой*.

2.2 Среднеквадратичное отклонение

Истинная величина погрешности Δ величины X является также неизвестной и в процессе измерений мы получаем оценку этой величины, которую мы обозначим σ_x. В теории ошибок доказывается, что при достаточно большом числе измерений N величина σ_x приблизительно равна Δ и определяется следующей формулой

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \qquad (2)$$

Эта величина называется среднеквадратичным отклонением (СКО) и представляет собой разброс “в среднем” значений x_i относительно x_0. По сути, величина σ_x представляет собой погрешность единичного измерения: погрешность любого измеренного значения x_i в данной серии из N измерений одна и та же и равна σ_x. Множитель (N–1) в знаменателе (2) отражает тот факт, что, если вы проводите однократное измерение, то погрешность такого измерения является полностью неопределенной.

2.3. Погрешность среднего

Если провести несколько серий измерений, по N измерений в каждой серии, то мы обнаружим, что в каждой серии средние величины $\bar{x}$ будут разными. Обозначим эти величины как $\bar{x}_k$, где k означает номер серии. Таким образом, сама оценка $\bar{x}$ является случайной величиной. Теперь, по формуле (2) мы могли бы рассчитать СКО $s_{\bar{x}}$ для величины $\bar{x}$. На самом деле в этом нет необходимости, так как в теории ошибок показано, что величину $s_{\bar{x}}$ можно оценить по результатам одной серии из N измерений:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

Таким образом, в итоге мы можем записать приближенное выражение для истинного значения величины X:

$$X \approx \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \tag{4}$$

3. Погрешность косвенных измерений

На практике часто приходится определять значение физических величин, которые не измеряются непосредственно. Простой пример: определение высоты, с которой падает тело по измерению времени падения. Соответствующее соотношение имеет вид h=gt^2/2, где g- ускорение свободного падения. В этом примере время падения измеряется непосредственно, а высота не измеряется, а вычисляется по приведенной выше формуле. В таком случае говорят, что высота измеряется косвенно. Таким образом, при косвенных измерениях физическая величина вычисляется по формуле через величины, полученные в прямых измерениях.

Пусть некоторая физическая величина f является функцией величин x, y, z…., которые определяются прямыми измерениями:

$$f = f(x, y, z, ...)$$

Тогда наилучшей оценкой величины f при косвенном измерении является величина

$$\overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, ...) \tag{5}$$

где $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}....$средние значения величин x, y, z…., вычисленные по формуле (1), а ее СКО σ_f определяется по формуле:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} s_z\right)^2 + ...} \tag{6}$$

где СКО σ_x, σ_y, σ_z …..вычисляются по формуле (2).

Часто более удобно пользоваться формулой не для σ_f, а для относительной среднеквадратичной погрешности σ_f/f, которую удобно представить в следующем виде:

$$\frac{s_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial z} s_z\right)^2 + ...} \tag{7}$$

4. Инструментальная погрешность

Измерительные приборы вносят свой вклад в погрешность, зависящий от точности прибора. Эта точность выражается метрологической характеристикой, называемой *классом точности* прибора. Его величина указывается в паспорте и (или) на шкале прибора. Во многих случаях класс точности представляет собой относительную погрешность δ_x измерения величины x, выраженную в процентах:

$$d_x = \frac{\Delta_x}{\Pi_x} 100\%$$

где Δx- максимальная приборная абсолютная погрешность измерения величины x, Π_x- предел измерения прибора.

Таким образом, зная класс точности δ_x, можно определить приборную погрешность Δ_x:

$$\Delta_x = d_x \Pi_x / 100 \tag{8}$$

Определяемая таким образом приборная погрешность показывает максимально возможное отклонение показаний прибора от истинного значения измеряемой величины, обусловленное несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов.

Если класс точности прибора неизвестен или прибор не имеет *класса точности* (измерительная линейка, например), то приборная погрешность определяется *половиной цены деления* шкалы прибора.

Если в процессе многократных измерений выясняется, что основной вклад в случайную погрешность вносит приборная погрешность, то в данном эксперименте можно ограничиться однократными измерениями. Практически так довольно часто и делается. При этом оценка истинного значения измеряемой величины будет определяться однократным показанием прибора, а оценка погрешности измерения-приборной погрешностью. Если же основной вклад определяется не приборной погрешностью, то принципиальным становится именно проведение многократных измерений. При этом в качестве оценки истинного значения будет выступать величина среднего значения (1), а в качестве оценки погрешности-среднеквадратичное отклонение (3).

В общем же случае необходимо принимать во внимание как случайные так и инструментальные погрешности. При этом стандартная погрешность величины х вычисляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{s_{\bar{x}}^{2} + \Delta_x^2} \qquad (9)$$

Если $s_{\bar{x}}$ и Δ_x отличаются друг от друга в два и более раз, то практически можно считать, что Δx равна большей из них.

Из формулы (9) следует, что для повышения точности измерений надо либо увеличить число измерений, либо принять меры к уменьшению инструментальной погрешности (например, использовать более точный прибор).

5. Представление результатов однократных измерений

Часто на практике достаточно провести однократное измерение интересующей нас величины x. В этом случае результат однократного измерения представляется в виде

$$x \pm \Delta_x$$

где величина Δ_x представляет собой приборную погрешность.

Погрешность косвенных измерений в этой ситуации определяется формулой, аналогичной (6):

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta_z\right)^2 + \ldots} \qquad (10)$$

где величины Δ_x, Δ_y, Δ_z и т. д. представляют собой приборные погрешности измерения величин x, y, z.

6. Построение графика. Общие правила.

Целью любого эксперимента является установление зависимости между измеряемыми величинами и объяснение этой зависимости на основе теоретических моделей. Довольно часто эксперимент проводится с целью проверки уже известных (или предполагаемых) теоретических зависимостей, а также для определения каких-либо параметров теоретической формулы, которые не определяются экспериментально.

Удобным представлением функциональной зависимости одной величины от другой является *график*. При его построении необходимо придерживаться следующих правил.

1. ***График необходимо строить на миллиметровой бумаге.***
2. По горизонтальной оси графика откладываются значения независимой переменной, по вертикальной- значения функции этой переменной. На каждой оси графика через равные интервалы наносятся *масштабные метки*. Для выбора масштаба вдоль каждой оси вначале необходимо определить диапазон

изменения значений измеряемых величин. При этом масштаб нужно выбрать так, чтобы экспериментальные точки максимально распределились вдоль каждой оси. Около координатных осей указываются символы (обозначения) величин и единицы их измерений.

3. После того, как проставлены масштабные метки и указаны обозначения осей с единицами измерений, на график наносятся ***экспериментальные точки***. При этом, численные значения величин, соответствующие экспериментальным точкам, на осях не проставляются. Желательно, чтобы интервалы между экспериментальными точками, которые откладываются по оси абцисс, были примерно одинаковыми. Это особенно важно, если величина, откладываемая по оси абцисс, получается в результате косвенных измерений. Например, для измерения ускорения свободного падения строится график зависимости высоты падения h тела от величины $t^2/2$, где t- время падения. Этот график представляет собой линейную зависимость y=kx, где y=h, $x=t^2/2$, а угловой коэффициент наклона k равен ускорению свободного падения g. В этом примере время измерения t необходимо выбирать таким образом, чтобы экспериментальные точки лежали на равных расстояниях не по шкале t, а по шкале $t^2/2$.

4. Кроме самих экспериментальных точек, на графиках около каждой точки иногда указывается соответствующая этой точке ***погрешность.*** Это делается с помощью горизонтальных и вертикальных черточек, пересекающих экспериментальные точки. Длина каждой черточки определяется погрешностью измерения соответствующей величины. Если экспериментальная точка получена однократным измерением, то погрешность соответствующей величины определяется инструментальной погрешностью. Если же экспериментальная точка получена в результате многократных измерений, то погрешность соответствующей величины определяется путем статистической обработки (формулы (3), (4), (6)).

5. ***По нанесенному на график массиву экспериментальных точек проводят плавную, без изломов, кривую.*** Существуют строгие математические методы, позволяющие построить по полученным экспериментальным точкам “наилучшую” кривую. Однако, и, не прибегая к таким методам, можно “на глаз” построить кривую достаточно близкую к “наилучшей”. Дело в том, что в лабораторном практикуме ожидаемая зависимость чаще всего известна, поэтому понятно какую кривую надо строить. ***Основное правило состоит в том, что кривую надо строить так, чтобы число точек, лежащих выше и ниже кривой было примерно одинаковым.***

6.1. Графический метод определения погрешности углового коэффициента наклона линейного графика

Поскольку прямую линию строить гораздо проще чем кривую, то часто экспериментальные результаты приводят к такой форме, чтобы зависимость между измеряемыми величинами была линейной. При этом, как правило, величины откладываемые по осям ординат графика, получают в результате косвенных измерений. В настоящем практикуме такой метод применяется в работах 14, 15, 17. В этих работах экспериментальная зависимость имеет вид прямой линии, выходящей из начала координат: $y=kx$. Величиной, подлежащей определению, является угловой коэффициент наклона k. Он определяется по наклону прямой, проведенной по массиву экспериментальных точек согласно указанному в п. 5.

Графический способ определения погрешности углового коэффициента состоит в следующем:

1. Весь диапазон экспериментальных точек по оси абцисс (от нуля до последней точки) разбивается на три равные части, и самую левую часть (ближнюю к началу координат) из дальнейшего рассмотрения исключают.

2. Через начало координат проводится две прямые так, чтобы выше одной из них лежало 2/3 оставшихся точек, а выше другой-1/3 точек. Различие в величине k между

этими прямыми определяет величину Δk. Стандартная погрешность k находится по формуле

$$s_k = \frac{\Delta k}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

где n- полное число точек на графике.

7. Построение наилучшей прямой методом наименьших квадратов

Этот метод представляет собой способ аналитического определения углового коэффициента и его погрешности. Если согласно теоретической модели ожидаемая прямая проходит через начало координат:

$$y = kx,$$

то наилучшее значение углового коэффициента k и его среднеквадратичная погрешность σ_k определяются по формулам:

$$k = \sum_i x_i y_i \Big/ \sum_i x_i^2 \tag{12}$$

$$s_k = \sqrt{\sum (y_i - kx_i)^2 \Big/ (N-1)\sum x_i^2} \tag{13}$$

где x_i, y_i- координаты экспериментальных точек.

Литература

1. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лаб. практикум/ В. Н. Холявко и др.-Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.-54 с.
2. Механика и термодинамика: Лабораторный практикум. Вводное занятие / В. Г. Дубровский и др.- Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.
3. Лабораторные занятия по физике: Уч. пос./ Гольдин Л. Л., Игошин Ф. Ф., Козел С. М. и др.-М.: Наука, 1983.-704 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика.-М.: МИР, 1971.-246 с.

5. Зайдель А. Н. Погрешности измерений физических величин.-Л.: Наука, 1985.
6. Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков.-М.: Наука. 1972.-172 с.
7. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок.-М.: Мир, 1985.-272 с.
8. Худсон Д. Статистика для физиков.-М.: Мир,1967.-243 с.
9. Портис А. Физическая лаборатория.-М.: Наука,1972.