

3. Методы решения транспортной задачи

3.1. Содержательная постановка транспортной задачи

Пусть имеется сеть географически произвольно расположенных пунктов производства некоторой однородной продукции. Для рассматриваемого планируемого периода времени известны объемы производства в этих пунктах. С другой стороны имеется сеть географически произвольно расположенных пунктов потребления этой продукции с известными объемами спроса. Рассчитаны затраты на доставку от каждого пункта производства в каждый пункт потребления единицы продукции.

Под планом транспортной задачи (ТЗ) понимается матрица объемов перевозок от каждого поставщика каждому потребителю.

Под *оптимальным планом* перевозок естественно понимать такой план, который удовлетворяет следующим условиям.

1. От каждого поставщика все должно быть по возможности вывезено.
2. Каждый потребитель должен быть удовлетворен в своем спросе.
3. Разрешены только перевозки от поставщиков к потребителям.
4. Суммарные затраты на реализацию всего плана перевозок должны быть минимальными.

Такой план называется оптимальным по *критерию стоимости*.

К содержанию.

3.2. Формальная постановка транспортной задачи

Построим экономико-математическую модель ситуации, содержательно представленной выше. Для этого рассмотрим таблицу:

		B_1		B_j		B_n
	потребитель	b_1	...	b_j	...	b_n
	поставщик					
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
	...	...		...		...
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
	...	...		...		...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

где: i -текущий номер поставщика (пункта производства)

$i = \overline{1, m}$, m -количество поставщиков.

j - текущий номер потребителя, $j = \overline{1, n}$

n - количество потребителей (пунктов потребления);

A_i - наименование поставщика под номером i ;

a_i - мощность i -го пункта производства (объем производимой продукции в пункте A_i)¹;

B_j - наименование потребителя под номером j ;

b_j - объем спроса в пункте B_j ;

c_{ij} - затраты на доставку единицы продукции из A_i в B_j (истинные тарифы).

x_{ij} - планируемое количество единиц продукции, предназначенное для доставки из A_i в B_j (объем перевозок).²

¹ единицы измерения объемов спроса, мощностей (объемов) производства, а также объемов перевозок представлены натуральными величинами (тонны, штуки и т.д.)

² переменная x_{ij} определяет x -количество, i - откуда, j - куда.

Формально, таким образом, под планом в транспортной задаче подразумевается вектор $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$. Вместо вектора удобнее использовать

матрицу:
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Построим математическую модель транспортной задачи, формализуя представленные выше условия:

Найти $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$, которые удовлетворяют ограничениям:

$$1. \quad \begin{cases} x_{11} + \dots + x_{1j} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} = a_i \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} + \dots + x_{mj} + \dots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

Первая группа условий: (От каждого поставщика все запасы должны быть по возможности вывезены.).

$$2. \quad \begin{cases} x_{11} + \dots + x_{i1} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} = b_j \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} + \dots + x_{in} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Вторая группа условий: (Каждый потребитель должен быть удовлетворен в своем спросе).

$$3. \quad x_{11} \geq 0; \dots; x_{ij} \geq 0; \dots; x_{mn} \geq 0$$

Третья группа условий: (Разрешены только перевозки от поставщиков к потребителям).

$$4. \quad S = c_{11}x_{11} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + x_{mn} \rightarrow \min$$

(Суммарные затраты на реализацию всего плана перевозок должны быть минимальными).

Более компактно транспортная задача формулируется следующим образом. Необходимо минимизировать транспортные расходы

$$S(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, & j &= \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, & i &= \overline{1, m}, \\ x_{ij} &\geq 0, & i &= \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \right\},$$

Полученная экономико-математическая модель представляет собой задачу линейного программирования с ограничениями - равенствами. Ее можно решить с использованием любого универсального метода ЛП. Однако, учитывая специфику ограничений данной задачи, ее решают специально для нее разработанными алгоритмами, которые также основаны на идеологии симплекс-метода, но позволяют эффективно решать задачи больших размеров. К таким алгоритмам относятся *метод потенциалов* и *венгерский метод*.

[К содержанию.](#)

3.3. Необходимое и достаточное условие существования оптимального плана

Из математической постановки следует, что транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования. Как отмечалось выше, при поиске решения задачи ЛП в общей постановке возможны следующие исходы:

1. Задача имеет оптимальное решение (единственное или множество).
2. Задача не имеет оптимального решения по причине несовместимости системы ограничений (пустоты ОДР).
3. Задача не имеет оптимального решения по причине неограниченности целевой функции (этот исход для транспортной задачи невозможен, т.к. очевидно что $S \geq 0$).

Гарантией невозможности второго исхода для транспортной задачи является условие баланса.

Теорема 3.3.1 (об условии баланса). Для существования оптимального плана транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы вся продукция, произведенная поставщиками, потреблялась потребителями, т.е. выполнялось равенство: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

К содержанию.

3.4. Открытая модель транспортной задачи. Понятие о фиктивных поставщике и потребителе

Транспортную задачу с выполняющимися условиями баланса называют закрытой моделью транспортной задачи. Если условие баланса нарушается, то модель называется открытой.

1) Пусть имеется открытая модель транспортной задачи, то есть имеет место нарушение условий баланса (суммарное предложение превышает суммарный спрос $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$). Для перехода к закрытой модели транспортной задачи в этом случае к имеющимся n -потребителям добавляется $(n+1)$ -й фиктивный потребитель с именем B_{n+1} и объемом фиктивного спроса $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, причем затраты на поставку от всех поставщиков к фиктивному потребителю берутся равными нулю:

$$c_{1,n+1} = 0; c_{2,n+1} = 0; \dots; c_{m,n+1} = 0$$

Если в оптимальном плане $x_{i,n+1} > 0$, то эта величина интерпретируется как не вывоз продукции i -го поставщика в соответствующем объеме.

2) Пусть суммарный спрос превышает суммарное предложение:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

В этом случае вводится $(m+1)$ -й фиктивный поставщик с именем A_{m+1} и предложением $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$.

Затраты на доставку единицы продукции от фиктивного поставщика A_{m+1} всем потребителям берутся равными нулю.

Обращение какого-либо потребителя b_j к фиктивному поставщику в оптимальном плане перевозок $x_{m+1,j}$ фактически означают недополучение данным потребителем продукции в объеме этой перевозки.

[К содержанию.](#)

3.5. Опорный план транспортной задачи и методы его нахождения

Пусть имеется допустимый план перевозок $\bar{x}^0 = (x_{11}^0, \dots, x_{ij}^0, \dots, x_{mn}^0)$. Коммуникация (сообщение) из A_i в B_j называется *действующей* по данному плану, если $x_{ij}^0 > 0$;

- коммуникация $(A_i B_j)$ называется *условно действующей*, если в соответствующей клетке транспортной таблицы объем перевозок равен нулю ($x_{ij}^0 = 0$)³;

- коммуникация $(A_i B_j)$ называется *не действующей* по плану, если ей соответствует пустая клетка.

Две коммуникации $A_i B_{j_1}$ и $A_i B_{j_2}$ называются соседними (смежными) по поставщику A_i , если они располагаются в одной строке транспортной таблицы.

Коммуникации $A_{i_1} B_j$ и $A_{i_2} B_j$ называются соседними по потребителю B_j , если они расположены в одном столбце таблицы.

³ клетки, содержащие *действующие* и *условно действующие* коммуникации являются занятыми

Набор коммуникаций (клеток) таблицы составляет *цикл* в том и только в том случае, если каждая коммуникация набора имеет среди других, по крайней мере, одну коммуникацию соседнюю по потребителю и, по крайней мере, одну соседнюю по поставщику. Например: рассмотрим фрагмент транспортной таблицы:

потреб. поставщ.	30	60	10	20	10	...
55	30	5	10	10		
25		25				
50		30		10	10	
...						

Здесь, и в любом другом случае, цикл составляют занятые клетки, (вершины цикла), находящиеся в углах замкнутой ломаной линии (если такую удастся построить), соединяющей смежные клетки по поставщикам и потребителям транспортной таблицы. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения вершинами не являются. Так, например, в нижеприведенном фрагменте транспортной таблицы (рис. 3.1) вершинами цикла являются только выделенные клетки, хотя заполненными могут быть и другие клетки.

■				■	
	■				■
		■			■
■			■		■
	■			■	
		■			■

Рис. 3.1 Пример цикла.

Количество клеток цикла является четным числом, начиная с четырех.

Под опорным планом транспортной задачи понимается такой допустимый план, который удовлетворяет двум требованиям:

1. Количество заполненных клеток транспортной таблицы равно числу $m+n-1$ (m -количество поставщиков, n -количество потребителей).

2. Никакое подмножество занятых клеток не должно составлять цикл.

Для построения опорного плана используется ряд алгоритмов, из которых наиболее известны: *метод северо-западного угла*, *метод минимального элемента* и *метод приближенной аппроксимации Фогеля*

Рассмотрим простейший из перечисленных алгоритмов - метод северо-западного угла.

1. Заполнение таблицы начинается с верхней левой клетки (на географических картах соответствует северо-западному углу). Величина перевозки устанавливается равной минимальной из двух величин: величины запасов в пункте A_1 и величины неудовлетворенного спроса в пункте B_1 .

2. Если ресурс в данной строке исчерпан, то строка вычеркивается. Если потребности для данного пункта (столбца) удовлетворены, то вычеркивается столбец.

3. После операции вычеркивания строки или столбца в оставшейся (не вычеркнутой) части таблицы находят новый северо-западный угол. Соответствующая клетка заполняется минимальной из величин: величины остатка запасов в пункте i и величины еще неудовлетворенного спроса в пункте j . Если заполненная клетка не последняя не вычеркнутая клетка таблицы, то необходимо перейти к п.2.

Останов алгоритма происходит при заполнении клетки, соответствующей юго-восточному углу таблицы. Приведем пример построения опорного плана по представленному алгоритму (таб. 3.1.).

Отдельного внимания заслуживает случай вырожденности опорного плана, получаемого при использовании метода северо-западного угла. Данная ситуация возникает при одновременном удовлетворении потребности в пункте потребления j и исчерпании запаса в пункте производства i . При этом

одновременно вычеркиваются строка i и столбец j . Следовательно, количество заполненных клеток по окончании алгоритма будет меньше величины $n+m-1$, и построенный план не будет опорным. Поэтому при одновременном вычеркивании строки и столбца в клетку справа или снизу от заполненной записывается нулевой объем перевозок (соответствующая коммуникация становится условно действующей). Пример, иллюстрирующий применение метода северо-западного угла в случае вырожденности плана ТЗ, представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.1.

потреб. поставщ.	30	60	10	10
35	30	5		
25		25		
50		30	10	10

Таблица 3.2.

потреб. поставщ.	2	2	2	2
2	2	0		
2		2		
2		0	2	0
2				2

Еще одним распространенным методом нахождения опорного решения транспортной задачи является *метод минимального элемента*. Заключается он в том, что в таблице отыскивается $\min\{c_{ij}\}$ и в первую очередь заполняется соответствующая клетка: $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Если клеток с минимальным тарифом оказывается несколько, то заполняется та из них, для которой сумма $\sum_i c_{ij}$ или $\sum_j c_{ij}$ максимальна. Затем вычеркивается соответствующая строка, если $a_i < b_j$, или столбец, если $a_i > b_j$, и корректируются остатки запасов и

неудовлетворенного спроса. В оставшихся клетках таблицы снова находится минимальный тариф и заполняется соответствующая клетка и т.д., до исчерпания запасов у всех поставщиков и спроса у всех потребителей.

Рассмотрим пример, исходные данные которого приведены в таб. 3.3.

Выбираем клетку, соответствующую минимальной стоимости перевозок. Клеткой с минимальной стоимостью 1 является A_2B_2 . В эту клетку записываем значение $\min(a_2, b_2)$, которое равно 70.

Таблица 3.3.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 60	4	5 60	7	120
A_2	5	1 70	3	2 60	130
A_3	6	2	5 30	3 60	90
Потребности	60	70	90	120	340

Так как потребности пункта B_2 полностью удовлетворены, то исключаем столбец B_2 из рассмотрения, а запасы в пункте A_2 считаем равными $130 - 70 = 60$. Среди оставшихся незаполненных клеток выбираем клетку с минимальной стоимостью перевозок. Такими клетками являются клетки A_1B_1 и A_2B_4 , которым соответствует стоимость перевозок, равная 2. Выбираем любую из них, например, A_1B_1 . Записываем в эту клетку значение $\min(a_1, b_1)$, которое равно 60. При этом потребность пункта B_1 полностью удовлетворена, и столбец B_1 исключаем из рассмотрения, а запасы пункта A_1 считаем равными $120 - 60 = 60$. Далее из оставшихся клеток выбираем клетку с минимальной стоимостью. Этой клеткой является клетка A_2B_4 со стоимостью, равной 2. Записываем в эту клетку значение 60, равное

минимальному из значений оставшегося запаса в пункте A_2 и потребности в пункте B_4 . При этом запасы в пункте A_2 будут исчерпаны, и строка A_2 исключается из рассмотрения, а потребность в пункте B_4 становится равной $120-60=60$. Из оставшихся четырех клеток выбираем клетку A_3B_4 с минимальной стоимостью, равной 3. Записываем в эту клетку значение 60 и исключаем из рассмотрения столбец B_4 . Из двух оставшихся клеток, которые можно еще заполнить, являются A_1B_3 и A_3B_3 . Обе эти клетки имеют одинаковую стоимость перевозок, равную 5. Выбираем любую из них, например, A_1B_3 . Чтобы полностью выбрать оставшийся запас пункта A_1 , запишем в нее значение 60. В клетку A_3B_3 помещаем единственное возможное значение, равное 30. Опорный план построен. Определим стоимость перевозок для построенного опорного плана методом минимального элемента

$$Z=2*60+5*60+1*70+2*60+5*30+3*60=940$$

Для определения опорного плана *методом аппроксимации Фогеля* для каждой строки и каждого столбца находят разность между двумя записанными в них минимальными стоимостями перевозок. Эти разности записывают напротив соответствующих строк и столбцов справа и снизу таблицы условий задачи. Затем находят максимальную из этих разностей. В строке (или столбце), соответствующей максимальной разности, определяют клетку с минимальной стоимостью перевозок и заполняют ее. Если минимальная стоимость перевозок одинакова для нескольких клеток, то для заполнения выбирают клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными стоимостями перевозок.

Найдем опорный план методом аппроксимации Фогеля. Для каждой строки и каждого столбца таблицы найдем разности между двумя минимальными стоимостями и поместим их в соответствующем дополнительном

столбце и дополнительной строке. Например, в строке A_1 минимальная стоимость равна 2, а следующая за ней равна 4. Разность между ними $4-2=2$ помещаем в дополнительный столбец справа таблицы. Максимальная из этих разностей равна 3 и находится в столбце A_1 . Определяем в этом столбце клетку с минимальной стоимостью и заполняем ее. После этого исключаем из рассмотрения столбец A_1 и определяем для всех оставшихся строк и столбцов разности между двумя минимальными стоимостями. Записываем эти разности в новом дополнительном столбце справа и новой строке снизу и определяем максимальную разницу, которая равна 2 и находится в столбце B_3 . Определяем клетку в столбце B_3 с минимальной стоимостью, которая находится в строке A_2 и заполняем ее. Этот процесс продолжаем до построения опорного плана.

Таблица 3.4.

Поставщики	Потребители				Запасы				
	B_1	B_2	B_3	B_4					
A_1	2 60	4 60	5	7	120	2	1	3	–
A_2	5	1 10	3 90	2 30	130	1	1	1	1
A_3	6	2	5	3 90	90	1	1	1	1
Потребности	60	70	90	120	340				
	3	1	2	1					
	–	1	2	1					
	–	1	–	1					
	–	1	–	1					

Определим стоимость перевозок для построенного опорного плана методом аппроксимации Фогеля

$$Z=2*60+4*60+1*10+3*90+2*30+3*90=870$$

При определении опорного плана тремя выше приведенными методами методом аппроксимации Фогеля был получен опорный план с наименьшей стоимостью перевозок. Обычно применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить оптимальный опорный план, либо план близкий к оптимальному.

[К содержанию.](#)

3.6. Критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи

Критерий оптимальности допустимого плана транспортной задачи основан на положениях теории двойственности. Для его получения строится задача двойственная к транспортной задаче, и составляются условия дополняющей нежесткости.

Теорема 3.6.1: Допустимый план транспортной задачи является оптимальным в том и только в том случае, если существует система так называемых потенциалов или условно-поисных цен на продукцию у поставщиков и потребителей ($u_1, \dots, u_m$ - условно-поисные цены у поставщиков, $v_1, \dots, v_n$ - у потребителей), которые удовлетворяют требованиям.

1. Косвенный тариф в этих ценах должен равняться истинному по заполненным клеткам: $v_j - u_i = c_{ij}$, где $v_j - u_i$ - косвенный тариф.

2. Косвенный тариф в этих ценах по незаполненным клеткам не должен превышать истинный тариф: $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

Доказательство:

Достаточность. Пусть для плана X существует система u_i и v_j , удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда для любого допустимого плана $X = [x'_{ij}]_{m \times n}$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v_j - u_i) x'_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x'_{ij} - \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x'_{ij} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n v_j b_j - \sum_{i=1}^m u_i a_i = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x_{ij} - \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_j x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (v_j - u_i) x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij},
\end{aligned}$$

т.е. стоимость перевозок по любому плану X' не меньше стоимости перевозок по плану X . Следовательно, план X оптимален.

Необходимость. Будем рассматривать транспортную задачу, как задачу линейного программирования с минимизацией линейной формы

$$S(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

при соответствующих ограничениях. Заполним симплексную таблицу и рассмотрим двойственную к исходной задачу, которую легко получить из таблицы.

	$0=$ $-u_1$		$0=$ $-u_i$		$0=$ $-u_m$	$0=$ $-v_1$		$0=$ $-v_j$		$0=$ $-v_n$	$Q=$ 1
$x_{1l} y_{1l} =$	-1		0		0	1		0		0	c_{1l}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{1n} y_{1n} =$	-1		0		0	0		0		1	c_{1n}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{il} y_{il} =$	0		-1		0	1		0		0	c_{il}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{ij} y_{ij} =$	0		-1		0	0		1		0	c_{ij}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{in} y_{in} =$	0		-1		0	0		0		1	c_{in}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{ml} y_{ml} =$	0		0		-1	1		0		0	C_{ml}
...	...		...		...	...		...		...	...
$x_{mn} y_{mn} =$	0		0		-1	0		0		1	C_{mn}
$1 \quad W =$	a_l		a_i		a_n	$-b_l$		$-b_j$		$-b_n$	0

Следовательно, двойственная задача имеет вид:

$$W = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$y_{ij} = u_i - v_j + c_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

т.е. $v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$

Пусть $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ – оптимальное решение транспортной задачи. Тогда на основании теоремы двойственности двойственная задача имеет оптимальное решение $u_1^*, \dots, u_m^*; v_1^*, \dots, v_n^*$.

Убедимся, что эти числа являются потенциалами соответствующих пунктов транспортной задачи. Действительно, все u_i^*, v_j^* как опорное решение двойственной задачи удовлетворяют неравенствам $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

Если $x_{ij} > 0$, то по второй теореме двойственности соответствующее ограничение $y_{ij} = u_i^* - v_j^* + c_{ij} \geq 0$ двойственной задачи обращается в строгое равенство $v_j^* - u_i^* = c_{ij}$.

[К содержанию.](#)

3.7. Метод нахождения оптимального плана перевозок (метод потенциалов)

Алгоритм метода потенциалов состоит из предварительного этапа и повторяющегося основного этапа.

Предварительный этап.

1. Каким-либо способом ищется допустимый план X (методом северо-западного угла, Фогеля или минимального элемента).
2. Для полученного плана строится система $m+n$ чисел (условно-поясных цен) $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$, таких, что $v_j - u_i = c_{ij}, \quad \forall x_{ij} > 0$.
3. Построенная система u_i и v_j проверяется на оптимальность (тем самым на оптимальность исследуется план X). Для этого проверяется

$v_j - u_i \leq c_{ij}, \forall x_{ij} = 0$. Если данные условия не выполняются, то переходят к основному этапу (т.к. план не оптимален), иначе оптимальный план найден.

Основной этап.

1. Улучшаем план, то есть от плана X переходим к плану X' такому, что $S(X) \geq S(X')$.
2. Для плана X' строим новую систему $u'_i, v'_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, такую, что $v'_j - u'_i = c_{ij}, \forall x_{ij} > 0$.
3. Проверяем X' на оптимальность. Если план не оптимален, то переходим на п.1. Иначе производится останов алгоритма.

Пример 3.7.1. Найдем методом потенциалов оптимальное решение задачи, определив опорный план методом северо-западного угла.

$$A_1 = 23; A_2 = 27; A_3 = 50 :$$

$$B_1 = 13; B_2 = 37; B_3 = 20; B_4 = 10;$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1) \text{ Проверяем условия баланса: } \sum_{i=1}^3 a_i = 100; \sum_{j=1}^4 b_j = 80 \Rightarrow$$

условия баланса не выполняются и необходимо ввести фиктивного потребителя с объемом спроса $B_5: 100 - 80 = 20$; т.е. $B_5 = 20$.

2) Построение исходного опорного плана методом северо-западного угла:

	Потребитель	$v_1=14$	$v_2=15$	$v_3=9$	$v_4=12$	$v_5=6$
Поставщик		13	37	20	10	20
$u_1=10$	23	4 - 13	5 + 10	1	7	0
$u_2=7$	27	3 +	8 - 27	2 0	6	0
$u_3=6$	50	5	10	3 20	6 10	0 20

3) Затраты по данному плану составляют:

$$S_0 = 4 \cdot 13 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 27 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 20 + 6 \cdot 10 + 0 \cdot 20 =$$

$$= 52 + 50 + 216 + 0 + 60 + 60 + 0 = 438$$

4) Проверка на оптимальность данного опорного плана.

а) Нахождение условно-попаясных цен по требованию равенства косвенного тарифа истинному для заполненных клеток.

$$v_1 - u_1 = 4, \quad v_2 - u_1 = 5, \quad v_2 - u_2 = 8,$$

$$v_3 - u_2 = 2, \quad v_3 - u_3 = 3, \quad v_4 - u_3 = 6,$$

$$v_5 - u_3 = 0,$$

Число неизвестных больше числа уравнений, поэтому можем взять, например, $u_1 = 10$ (присваивается произвольная цена единицы продукции у какого-либо поставщика или потребителя: пусть) и найти значения остальных потенциалов, $u_2 = 7$, $u_3 = 6$, $v_1 = 12$, $v_2 = 15$, $v_3 = 9$, $v_4 = 12$, $v_5 = 6$.

б) Сравнение косвенного тарифа с истинным по незаполненным клеткам. Если косвенные тарифы не превосходят истинных, для всех незаполненных клеток, то данный план оптимален, а $S = 438$ (суммарные затраты) будут минимальными.

Если хотя бы в одной незаполненной клетке косвенный тариф превышает истинный, то план не оптимален и следует перейти к этапу 5), где к новому (корректируемому) плану подключается незаполненная клетка, в которой косвенный тариф максимально превосходит истинный. Иными словами

выбираем клетку, для которой неравенство вида $v_j - u_i \leq c_{ij}$ нарушается в наибольшей степени, и находим максимальную невязку:

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{i,j} \{\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0\}.$$

Для нашего примера имеем две положительные невязки.

$$\Delta_{12} = v_1 - u_2 - c_{12} = 14 - 7 - 3 = 4 > 0 \text{ - максимальная невязка.}$$

$$\Delta_{13} = v_1 - u_3 - c_{13} = 14 - 6 - 5 = 3 > 0.$$

5) Корректировка плана перевозок.

Составляется цикл перераспределения продукции с действующих коммуникаций данного плана в выявленную пустую клетку. Цикл строится из заполненных клеток таблицы, начиная с клетки $i_0 j_0$ в любом направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке). Совершая обход по циклу, помечаем клетки, начиная с $i_0 j_0$, попеременно знаками «+» и «-». Объем корректировки Δx по построенному циклу перераспределения перевозок определяется минимальным объемом перевозок в клетках цикла, помеченных знаками «-» $\Delta x = \min \{x_{ij}^-\}$. Если минимум этот достигается в нескольких клетках, то освободить можно только одну клетку, в остальных следует оставить «0». Для нашего примера: $\min \{13, 27\} = 13 \Rightarrow \Delta x = 13$

Далее улучшаем план следующим образом: объемы перевозок в клетках, отмеченных знаком «-» уменьшаем на величину Δx , а объемы перевозок в клетках, отмеченных знаком «+» увеличиваем на Δx . Новый план таким образом вычисляется как:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^- - \Delta x, \\ x_{ij}^+ + \Delta x, \\ x_{ij}. \end{cases}$$

Новому плану соответствует таблица.

	Потребитель	$V_1=10$	$V_2=15$	$V_3=9$	$V_4=12$	$V_5=6$
Поставщик		13	37	20	10	20
$U_1=10$	23	4	5	1	7	0
$U_2=7$	27	3	8	2	6	0
$U_3=6$	50	5	10	3	6	0

Подсчитаем величину экономии: $13(4-5+8-3)=13 \cdot 4=52$

$$\Rightarrow S_1 = 438 - 52 = 386.$$

Проверка подтверждает оптимальность данного плана.

$$S_{\min} = 386; \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

К содержанию.

3.8. Задача о назначениях

Пусть имеется n работ $A_1, A_2, \dots, A_n$ и n претендентов на эти работы $B_1, B_2, \dots, B_n$, и заданы показатели эффективности c_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$) назначения претендента B_j на работу A_i . Известно также, что на одну работу может быть принят один претендент и один претендент не может выполнять несколько работ. Ставится задача определить каждому претенденту работу так, чтобы суммарная эффективность от этого назначения была максимальной. Математическая постановка этой задачи имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Эта задача является частным случаем транспортной задачи. Если число работ и претендентов не совпадает, то поступают таким же образом как и в транспортной задаче при переходе от открытой к закрытой ТЗ. Любое допустимое решение задачи о назначении является вырожденным так как содержит n ненулевых компонент решения, а для невырожденного решения необходимо иметь $2n - 1$ ненулевых компонент.

[К содержанию.](#)

3.8.1. Венгерский метод для задачи о назначениях

По-другому задачу о назначениях можно сформулировать так. Пусть дана матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необходимо выбрать последовательность элементов $\{c_{1j_1}, c_{2j_2}, \dots, c_{nj_n}\}$ из матрицы C такую, чтобы сумма $\sum_{i=1}^n c_{ij_i}$ была максимальна и при этом из каждой строки и столбца должен быть выбран только один элемент.

Определим следующие понятия, которые будут использованы при описании алгоритма венгерского метода:

1. Нулевые элементы $z_1, z_2, \dots, z_k$ матрицы C называются *независимыми нулями*, если для любого $i = 1, \dots, k$ строка и столбец, на пересечении которых расположен элемент z_i , не содержит другие элементы z_j ($j \neq i$).

2. Две квадратные матрицы C и D называются *эквивалентными*, если для всех i, j $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$. Задачи о назначениях, определяемые эквивалентными матрицами, являются эквивалентными.

3. Элементы, расположенные в выделенных строках и столбцах, называются *выделенными*.

3.8.2. Алгоритм венгерского метода

Алгоритм состоит из предварительного этапа и не более чем $(n-2)$ последовательно проводимых итераций. Каждая итерация связана с эквивалентными преобразованиями матрицы, полученной в результате проведения предыдущей итерации, и с выбором максимального числа независимых нулей. Окончательным результатом итерации является увеличение числа независимых нулей на единицу. Как только количество независимых нулей станет равным n , задача о назначении решена, а оптимальное решение определяется позициями независимых нулей в последней матрице.

Предварительный этап. В каждом столбце матрицы C определяют максимальный элемент и все элементы этого столбца вычитают из максимального. В результате получается матрица с неотрицательными элементами, у которой в каждом столбце имеется по крайней мере один нуль. После этого определяют минимальный элемент в каждой строке полученной матрицы и вычитают этот элемент из всех элементов данной строки. В результате получаем матрицу C_0 с неотрицательными элементами, у которой в каждом столбце и в каждой строке имеется по крайней мере один нуль.

Просматриваем первый столбец и отмечаем произвольный нуль, находящийся в нем, звездочкой. Затем просматриваем второй столбец, и если в нем есть нуль, расположенный в строке, где нет нуля со звездочкой, то отмечаем его звездочкой. Аналогично просматриваем все другие столбцы матрицы C_0 и отмечаем нули звездочками, если они расположены в строках, не содержащих нулей со звездочками. Нули матрицы C_0 , отмеченные звездочками, являются независимыми. На этом предварительный этап заканчивается.

Предположим, что k -я итерация уже проведена и в результате получена матрица C_k . Если в матрице C_k имеется ровно n нулей со звездочкой, то процесс решения заканчивается. Если число нулей со звездочкой меньше n , то переходим к $(k+1)$ - итерации.

Каждая итерация начинается первым и заканчивается вторым этапом. Между первым и вторым этапами может проводиться третий этап. Перед началом итерации выделяют знаком «+» столбцы матрицы C_k , которые содержат нули со звездочкой.

Первый этап. Просматривают невыделенные столбцы матрицы C_k . Если среди них не окажется нулевых элементов, то переходят к третьему этапу.

Если невыделенный нуль матрицы C_k обнаружен, то возможны два случая:

- а) строка, содержащая этот нуль, содержит нуль со звездочкой;
- б) эта строка не содержит нуль со звездочкой.

В случае а) невыделенный нуль отмечают штрихом и выделяют строку, в которой он содержится знаком «+» справа от матрицы. Затем уничтожают знак «+», обводя его кружком над тем столбцом, на пересечении которого с данной выделенной строкой находится нуль со звездочкой.

Далее просматривают этот столбец, отыскивают в нем невыделенный нуль, не отмеченный звездочкой, и выделяют строку, содержащую такой нуль. Затем просматривают эту строку, отыскивая в ней нуль со звездочкой.

Этот процесс за конечное число шагов заканчивается одним из следующих исходов:

все нули матрицы C_k выделены, т.е. находятся в выделенных строках и столбцах. При этом переходят к третьему этапу;

имеется невыделенный нуль в строке, где нет нуля со звездочкой. В этом случае переходят ко второму этапу, отметив последний по порядку нуль штрихом.

В случае б) отмечаем помеченный нуль штрихом и переходим ко второму этапу.

Второй этап. Строят следующую цепочку из элементов матрицы C_k : исходный нуль со штрихом, нуль со звездочкой, расположенный в одном столбце с первым, нуль со штрихом, расположенный в одной строке с предшествующим нулем со звездочкой, и т.д. Итак, цепочка образуется передвижением от $0'$ к 0^* по столбцу и от 0^* к $0'$ по строке и т.д. При этом цепочка всегда начинается и заканчивается нулем со штрихом. После этого удаляются звездочки над нулями в цепочке, и ставятся звездочки над нулями со штрихом в цепочке. Затем уничтожаются все штрихи над элементами матрицы C_k и знаки «+». При этом количество независимых нулей будет увеличено на единицу. $(k+1)$ -я итерация закончена.

Третий этап. К этому этапу переходят после того, если все нули матрицы C_k выделены, т.е. находятся в выделенных строках или столбцах. В таком случае среди невыделенных элементов матрицы C_k выбирают минимальный элемент и обозначают его $h > 0$. Далее вычитают h из всех элементов матрицы C_k , расположенных в невыделенных строках, и прибавляют ко всем элементам, расположенным в выделенных столбцах. Получают новую матрицу $C_k^{(1)}$, эквивалентную C_k .

После этого переходят к первому этапу, где вместо матрицы C_k рассматривают матрицу $C_k^{(1)}$.

Пример 3.8.1. Решить задачу о назначениях, которая задается матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Предварительный этап.

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Первая итерация. Первый, второй этапы

$$C_0 = \begin{array}{c} \oplus \qquad \qquad + \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0^* & 2 \\ 0^* \xrightarrow{0'} 0 & 1 & 0 & & \\ \uparrow 0' & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \end{array}$$

Вторая итерация. Первый этап.

$$C_1 = \begin{array}{c} + \quad \oplus \quad + \\ \begin{bmatrix} 1 & \xleftarrow{1} 1 & \xleftarrow{1} 0^* & 2 \\ 0 \downarrow & 0^* & 0 & 1 & 0 \\ 0^* \xrightarrow{2} 2 & & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \end{array}$$

Первый, второй этапы

$$C_1 = \begin{array}{c} + \quad \oplus \quad \oplus \\ \begin{bmatrix} 1 & 0' & 0 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 0' & 2 & 0 \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0' & 1 \end{bmatrix} + \end{array}$$

Третий этап $h=1$

Третья итерация.

Первый, второй этапы

$$C_2 = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \quad + \\ \begin{bmatrix} 1 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0^* & 2 & 0 \\ 0^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0^* \\ 3 & 1 & 1 & 0^* & 1 \end{bmatrix} . \end{array}$$

[К содержанию.](#)

3.9. УПРАЖНЕНИЯ

3.9.1. Решить транспортную задачу, начиная методом северо-западного угла

A1=20; A2= 9; A3=22;
B1=14; B2=14; B3= 3; B4=48;
C= 7 5 8 9

Ответ
Z=247

X=

0	5	0	15
0	9	0	0
0	0	3	19

8 7 4 5

14 0 0 14

3.9.2. Решить транспортную задачу, начиная методом минимального тарифа

A1= 4; A2=14; A3=16;
B1=17; B2=11; B3= 7; B4=16;
4 5 7 6
C= 7 5 4 8
3 7 5 6

Ответ
Z=130
X=

1	3	0	0
0	7	7	0
16	0	0	0
0	1	0	16

3.9.3. Решить транспортную задачу, начиная методом Фогеля

A1=33; A2=14; A3=10;
B1= 5; B2=33; B3= 8; B4=30;
6 4 6 5
C= 8 5 6 8
7 4 3 4

Ответ
Z=248
X=

0	19	0	14
0	14	0	0
0	0	8	2
5	0	0	14

3.9.4. Решить венгерским методом задачу о назначениях с заданной матрицей эффективности

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 8 & 5 & 12 \\ 7 & 3 & 9 & 11 & 10 \\ 14 & 2 & 8 & 5 & 8 \\ 10 & 4 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ответ
z = 50
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.9.5. Решить венгерским методом задачу о назначениях с заданной матрицей эффективности

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 7 & 9 & 2 \\ 14 & 2 & 12 & 5 & 7 \\ 14 & 11 & 8 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & 6 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 12 & 15 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ответ
z = 64
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.9.6. Решить венгерским методом задачу о назначениях с заданной матрицей эффективности

Ответ z = 72

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 14 & 7 & 12 \\ 5 & 11 & 14 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 12 & 10 & 6 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 5 & 7 & 12 & 7 \\ 9 & 4 & 2 & 10 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[К содержанию.](#)