Часть II Модели оптимального управления в экономике

К содержанию

7. Теория игр и игровое моделирование в экономике

7.1. Основные понятия теории игр

Теория игр – это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта. В теории игр исследуются математические модели с различными интересами участников. Столкновение противоположных интересов участников приводит к возникновению конфликтных ситуаций. Необходимость анализировать такие ситуации и находить рациональные решения для каждой из сторон привела к возникновению теории игр.

Моделями теории игр можно описывать разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование и т.д. При решении практических задач нередко приходится моделировать игровые ситуации, в которых один из участников безразличен к исходу игры. Такие игры называются *играми с природой*. При этом под термином «природа» понимается вся совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решения. Например, выбор участка для строительства предприятия, определение объема выпуска сезонной продукции новых образцов в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса.

В реальной игре каждый игрок в зависимости от опыта и квалификации стремится придерживаться такой стратегии, которая обеспечивает ему максимально возможный выигрыш.

В теории игр существует классификация игр по:

- числу игроков;

- числу ходов в игре (многошаговые, бесконечные);

- структуре математической модели игры (матричные, рекурсивные, дифференциальные и т.д.);

- числу стратегий игры (конечные, бесконечные);

- взаимоотношениям игроков (коалиционные, кооперативные, бескоалиционные);

- степени информированности игроков в игре (детерминированные, стохастические, неопределенные).

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии.

К содержанию

7.2. Матричные игры

7.2.1. Определение матричной игры

Система $\Gamma = (X, Y, K)$, где X и Y – непустые множества, K– функция $K : X \times Y \to R$,

называется *антагонистической игрой в нормальной форме*.

Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Пары стратегий (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$– ситуациями. Функция K называется *функцией выигрыша игрока* игры Γ. Выигрыш игрока 1 в ситуации (x, y) полагается равным $K(x, y)$, а выигрыш игрока 2 равен $[-K(x, y)]$. Игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков равна нулю, называется *игрой с нулевой суммой*.

Игра Γ интерпретируется следующим образом. Игроки одновременно и независимо выбирают стратегии $x \in X$, $y \in Y$. После этого игрок 1 получает выигрыш, равный $K(x, y)$, а игрок 2 – $[-K(x, y)]$.

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются *матричными*. Пусть игрок 1 в матричной игре имеет m стратегий $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, а игрок 2 – n стратегий $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Тогда игра Γ полностью определяется заданием матрицы $A = \{\alpha_{ij}\}$, где $\alpha_{ij} = K(x_i, y_j)$, где $(x_i, y_j) \in X \times Y$. Матрицу A принято называть *платежной матрицей*. При этом игра Γ реализуется следующим образом. Игрок 1 выбирает строку i, а игрок 2 – столбец j. После этого игрок 1 получает выигрыш α_{ij}, а игрок 2 – $(-\alpha_{ij})$. Если выигрыш равен отрицательному числу, то речь идет о фактическом проигрыше игрока. Заметим, что перестановка строк и столбцов в матрице A соответствует другому упорядочению стратегий игроков. Таким образом, матричная игра может быть описана различными матрицами, отличающимся друг от друга лишь порядком строк и столбцов.

К содержанию

Пример 1. Игроки 1 и 2 выбирают целые числа i и j из множества $\{1, \ldots, n\}$. При этом игрок 1 выигрывает величину $|i - j|$. Платежная матрица этой игры квадратная размера $n \times n$, где $\alpha_{ij} = |i - j|$. При $n = 4$ матрица игры имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Игроки продвигаются навстречу друг другу на n шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадет в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на k шагов, равна k/n. Стратегия игрока 1(2) заключается в принятии решения стрелять на i-м (j-м) шаге. Пусть $i<j$ и игрок 1 принимает решение стрелять на i-м шаге, а игрок 2 – на j-м шаге. В этом случае выигрыш α_{ij} игрока 1 определяется формулой

$$\alpha_{ij}=\frac{i}{n}-\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{j}{n}=\frac{n(i-j)+ij}{n^2} \quad .$$

В случае $i>j$ первым стреляет игрок 2 и $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$. Если $i=j$, то полагаем $\alpha_{ij}=0$. Пусть $n=5$, тогда платежная матрица, умноженная на 25 имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 & -11 & -15 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 7 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 11 & 2 & -7 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & -5 & -15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 3 (игра «нападение – защита»). Пусть игрок 1 намерен атаковать один из объектов $c_1,\dots,c_n$, которые имеют положительные ценности $\tau_1>0,\dots,\tau_n>0$. Игрок 2 защищает один из этих объектов. Будем считать, что если атакован незащищенный объект c_i, то он с достоверностью уничтожается (игрок 1 выигрывает τ_i), а если объект защищен, то он поражается с вероятностью $1>\beta_i>0$, т.е. игрок 1 выигрывает (в среднем) $\beta_i\tau_i$, $i=1,\dots,n$.

Тогда задача выбора объекта нападения (для игрока 1) и объекта защиты (для игрока 2) сводится к матричной игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1\tau_1 & \tau_1 & \dots & \tau_1 \\ \tau_2 & \beta_2\tau_2 & \dots & \tau_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \tau_n & \tau_n & \dots & \beta_n\tau_n \end{pmatrix}.$$

К содержанию

7.2.2. Максиминные и минимаксные стратегии

Пусть каждый из игроков 1 и 2 располагают конечным числом возможных действий – чистых стратегий. Обозначим их соответственно $x_1, x_2, ..., x_m$ и $y_1, y_2, ..., y_n$. Игрок 1 может выбрать любую чистую стратегию $x_i \ (1,...,m)$, в ответ на которую игрок 2 может выбрать любую свою чистую стратегию y_j $(1,...,n)$. Обозначим $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$ – минимально возможный выигрыш, игрока 1, применяющего стратегию $x_i \ (1,...,m)$, и $\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$ – максимально возможный проигрыш игрока 2, если он применяет стратегию y_j $(1,...,n)$. Число $\underline{v} = \max_i \min_j \alpha_{ij}$ называют *нижней чистой ценой игры* (*максимином*), а соответствующую ему чистую стратегию игрока 1 – *максиминной*. Число $\underline{v}$ показывает, какой минимальный гарантированный выигрыш может получить игрок 1, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока 2. Число $\overline{v} = \min_j \max_i \alpha_{ij}$ называется *верхней чистой ценой игры* (*минимаксом*), а соответствую ему чистую стратегию игрока 2 – минимаксной. Число β показывает какой максимальный гарантированный проигрыш может быть у игрока 2 при правильном выборе им своих чистых стратегий независимо от действий игрока 1.

Таким образом, правильно используя свои чистые стратегии, игрок 1 обеспечит себе выигрыш не меньше чем $\underline{v}$, а игрок 2 в результате правильного применения своих чистых стратегий не позволит игроку 1 выиграть больше чем $\overline{v}$.

Лемма. В матричной игре $\underline{v} \le \overline{v}$.

Доказательство. Пусть j - произвольная стратегия игрока 2. Тогда имеем $\min\limits_{j} \alpha_{ij} \le \alpha_{ij}$. Отсюда следует

$$\max_{i} \min_{j} \alpha_{ij} \le \max_{i} \alpha_{ij}. \tag{7.1}$$

Из того, что в правой части неравенства (1) стратегия j выбрана произвольно, следует

$$\max_{i} \min_{j} \alpha_{ij} \le \min_{j} \max_{i} \alpha_{ij}.$$

Если $\underline{v} = \overline{v}$, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $v = \underline{v} = \overline{v}$. Пару чистых стратегий $\left(x_{i_*}, y_{j_*}\right)$, соответствующих $\underline{v}$ и $\overline{v}$, называют *седловой точкой матричной игры,* а элемент платежной матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы.* Стратегии, образующие седловую точку, являются оптимальными. Тройку $\left(x_{i_*}, y_{j_*}, v\right)$ называют *решением игры*.

Пример 4. Первый и *второй* игроки записывают цифры 1 и 2 и, кроме того, каждый игрок записывает цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью. Если угадал один игрок, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Решение. Будем записывать в платежную матрицу чистые стратегии игроков с помощью пары цифр $\left(a_i, b_j\right)$, где a_i – цифра, записанная самим игроком, а b_j – цифра, которую, по его мнению, записал партнер. Тогда каждый игрок при любом ходе может записать либо (1,1), либо (1,2), либо (2,1), либо (2,2). Таким образом, игроки имеют по четыре чистые стратегии. Платежная матрица имеет следующий вид:

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	α_i
(1,1)	0	2	-3	0	-3
(1,2)	-2	0	0	3	-2
(2,1)	3	0	0	-4	-4
(2,2)	0	-3	4	0	-3
β_j	3	2	4	3	

В этой матрице строки соответствуют чистым стратегиям *первого игрока*, а столбцы – второго. После определения минимальных выигрышей α_i, соответствующих чистым стратегиям *первого игрока*, находим нижнюю чистую цену игры $\alpha = \max_i \alpha_i = -2$. При этом максиминной стратегией *первого игрока* является стратегия (1,2). По максимальным проигрышам β_j, соответствующим чистым стратегиям *второго игрока*, находим верхнюю чистую цену $\beta = \min_j b_j = 2$. При этом стратегия (1,2) есть минимаксная стратегия *второго игрока.* Поскольку $\alpha \neq \beta$, то данная игра не имеет седловой точки. Таким образом, при безошибочном ведении игры *первый игрок* «выиграет» не менее -2 (проиграет не более двух очков), а *второй игрок* проиграет не более 2 очков.

К содержанию

7.2.3. Понятие равновесия

Пусть дана антагонистическая игра $\Gamma = (X, Y, K)$. Рассмотрим вопрос об оптимальном поведении игроков в этой игре. Естественно считать оптимальной в игре такую ситуацию $(x^*, y^*) \in X \times Y$, от которой ни одному из игроков не выгодно отклоняться. Такая ситуация (x^*, y^*) называется равновесной, а принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, - *принципом равновесия*. Для антагонистических игр принцип равновесия эквивалентен принципам минимакса и максимина.

В антагонистической игре $\Gamma = (X, Y, K)$ ситуация (x^*, y^*) называется *ситуацией равновесия* или *седловой точкой*, если для всех $x \in X$ и $y \in Y$

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y).$$

Множество всех ситуаций равновесия в игре Γ обозначим через $Z(\Gamma)$, $Z(\Gamma) \subset X \times Y$.

Для матричной игры с платежной матрицей A ситуация равновесия совпадает с *седловой точкой матрицы* A. Под седловыми точками матрицы A мы будем понимать такие ее элементы $a_{i^*j^*}$, что для всех $i \in M$ и $j \in N$

$$a_{i^*j} \le a_{i^*j^*} \le a_{ij^*} \ .$$

В седловой точке элемент матрицы $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Например, в игре с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

элемент $a_{11} = 5$ является седловой точкой.

Множество ситуаций равновесия в антагонистической игре Γ обладает свойствами, которые позволяют говорить об оптимальности ситуации равновесия и входящих в нее стратегий.

Теорема. Пусть (x_1^*, y_1^*) и (x_2^*, y_2^*) - две произвольные ситуации равновесия в антагонистической игре Γ. Тогда

1) $K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) = K(x_1^*, y_2^*) = K(x_2^*, y_1^*)$;

2) $(x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma)$; $(x_2^*, y_1^*) \in Z(\Gamma)$.

<u>*Доказательство*</u>. Из определения ситуации равновесия для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$K(x, y_1^*) \le K(x_1^*, y_1^*) \le K(x_1^*, y), \tag{3.1}$$

$$K(x, y_2^*) \le K(x_2^*, y_2^*) \le K(x_2^*, y). \tag{3.2}$$

Подставим в левую часть неравенства (3.1) x_2^*, в правую - y_2^*, в левую часть неравенства (3.2) x_1^*, в правую - y_1^*. В результате получим равенство

$$K(x_1^*, y_1^*) = K(x_2^*, y_2^*) = K(x_2^*, y_1^*) = K(x_1^*, y_2^*).$$

(3.3)

Покажем, что второе утверждение тоже справедливо. Действительно, из (3.2) и (3.3) следует, что $\forall x \in X \quad K(x, y_2^*) \le K(x_1^*, y_2^*)$, а из (3.1) и (3.3) следует, что $\forall y \in Y \; K(x_1^*, y_2^*) \le K(x_1^*, y)$, т.е. $(x_1^*, y_2^*) \in Z(\Gamma)$. Аналогично доказывается, что $(x_2^*, y_1^*) \in Z(\Gamma)$.

Следствие. Пусть X^* и Y^* множества стратегий первого и второго игроков такие, что

$$X^* = \left\{ x^* \mid x^* \in X, \exists y^* \in Y, (x^*, y^*) \in Z(\Gamma) \right\},$$

$$Y^* = \left\{ y^* \mid y^* \in Y, \exists x^* \in X, (x^*, y^*) \in Z(\Gamma) \right\}.$$

Тогда множество $Z(\Gamma)$ удовлетворяет равенству $Z(\Gamma) = X^* \times Y^*$.

Пусть (x^*, y^*) - ситуация равновесия в игре Γ. Тогда число $v = K(x^*, y^*)$ называется *значением игры* Γ.

Пример. В матричной игре с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

пары стратегий (1,1) и (2,1) являются ситуациями равновесия. Значение игры равно 5.

Оптимальность поведения игроков не изменится, если в игре множества стратегий остаются прежними, а функция выигрыша умножается на положительную константу или к ней прибавляется константа.

Лемма (о масштабе). Пусть даны две антагонистические игры $\Gamma_1 = (X, Y, K_1)$ и $\Gamma_2 = (X, Y, K_2)$, у которых функции выигрыша удовлетворяют равенству

$$K_1 = \alpha K_2 + \beta,$$

где α и β константы и $\alpha > 0$. Тогда $Z(\Gamma_1) = Z(\Gamma_2)$ и $v_{\Gamma_1} = \alpha v_{\Gamma_2} + \beta$.

Доказательство. Пусть (x^*, y^*) - ситуация равновесия в игре Γ_2. Тогда имеем

$$K_1(x^*, y^*) = \alpha K_2(x^*, y^*) + \beta \le \alpha K_2(x^*, y) + \beta = K_1(x^*, y),$$

$$K_1(x, y^*) = \alpha K_2(x, y^*) + \beta \le \alpha K_2(x^*, y^*) + \beta = K_1(x^*, y^*)$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Поэтому $(x^*, y^*) \in Z(\Gamma_1)$ и, следовательно, $Z(\Gamma_2) \subseteq Z(\Gamma_1)$.

Доказательство в обратную сторону проводится аналогично, учитывая, что

$$K_2 = (1/\alpha) K_1 - (\beta/\alpha).$$

При этом выполняется равенство

$$v_{\Gamma_1} = K_1(x^*, y^*) = \alpha K_2(x^*, y^*) + \beta = \alpha v_{\Gamma_2} + \beta.$$

Следующая теорема устанавливает связь между принципом равновесия и принципами минимакса и максимина в антагонистической игре.

Теорема. Для того, чтобы в матричной игре с $(m \times n)$ платежной матрицей A существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} \alpha_{ij} = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} \alpha_{ij}.$$

Пример. В матричной игре из предыдущего примера для обеих равновесных ситуаций (1,1) и (2,1) выполняется равенство

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = 5 .$$

Игра с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не имеет ситуации равновесия, поскольку

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = 0 < \min_j \max_i \alpha_{ij} = 1 .$$

К содержанию

7.2.4. Смешанные стратегии

Пусть дана матричная игра Γ_A. Если в этой игре существует ситуация равновесия, то минимакс равен максимину. В этом случае, если каждый из игроков знает оптимальную стратегию противника, то от этого ни один из игроков не может получить дополнительную выгоду. Теперь предположим, что в данной игре не существует ситуации равновесия. Тогда, поскольку $\max_i \min_j \alpha_{ij} \le \min_j \max_i \alpha_{ij}$, это неравенство становится строгим, т.е. имеем

$$\min_j \max_i \alpha_{ij} - \max_i \min_j \alpha_{ij} > 0 .$$

В этом случае максиминная и минимаксная стратегии не являются оптимальными. Более того, игрокам не выгодно их придерживаться, т.к. они могут получить больший выигрыш. Однако сообщение о выборе стратегии противнику может привести к еще большим потерям, чем в случае максиминной или минимаксной стратегии.

Пример 1. Пусть платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы $\min_j \max_i \alpha_{ij} = 5$, $\max_i \min_j \alpha_{ij} = 3$, т.е. ситуации равновесия не существует. В данном случае $i^* = 1$ - максиминная стратегия игрока 1, а

$j^* = 2$ - минимаксная стратегия игрока 2. Пусть игрок 2 придерживается стратегии $j^* = 2$, а игрок 1 выберет стратегию $i = 2$. Тогда последний получит выигрыш 5, т.е. на две единицы больше чем максимин. Однако, если игрок 2 догадается о выборе игрока 1, то он выберет стратегию $j = 1$, и тогда игрок 1 получит лишь выигрыш 2 единицы, т.е. на единицу меньше, чем в случае максимина.

Оказывается, что в этом случае игрокам разумно действовать случайно, что обеспечивает наибольшую скрытость выбора стратегии.

Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*.

Таким образом, для матричной игры смешанной стратегией игрока 1 является случайная величина, значениями которой являются номера строк $i \in M$, $M = \{1, 2, ..., m\}$ платежной матрицы. Аналогично, смешанной стратегией игрока 2 является случайная величина, значениями которой являются номера столбцов платежной матрицы $j \in N$, $N = \{1, 2, ..., n\}$. Напомним, что стратегии, которые рассматривались до введения понятия смешанной стратегии, назывались *чистыми стратегиями*.

Так как случайная величина характеризуется своим распределением, то смешанная стратегия есть вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. Таким образом, смешанная стратегия x игрока 1 есть m-мерный вектор

$$x = (\xi_1, ..., \xi_m), \ \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1, \ \xi_i \geq 0, \ i = 1, ..., m.$$

Аналогично, смешанная стратегия игрока 2 есть n-мерный вектор

$$y = (\eta_1, ..., \eta_n), \ \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1, \ \eta_j \geq 0, \ j = 1, ..., n.$$

Множества смешанных стратегий игроков 1 и 2 соответственно будем обозначать как X и Y.

Рассмотрим смешанную стратегию $x_i = (\xi_1, ..., \xi_i, ..., \xi_m)$, в которой $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0$, $j \neq i$, $1 \leq i \leq m$. Стратегия предписывает выбор i-й строки платежной матрицы с вероятностью 1 и, таким образом, может быть отождествлена с чистой стратегией i. Аналогично можно отождествить с чистой стратегией j $(1 \le j \le n)$ смешанную стратегию игрока 2, в которой выбор j-го столбца происходит с вероятностью 1.

Пара (x, y) смешанных стратегий игроков в матричной игре называется *ситуацией в смешанных стратегиях*.

Выигрыш игрока 1 в ситуации (x, y) в смешанных стратегиях для $(m \times n)$- матричной игры определяется как математическое ожидание его выигрыша при условии, что игроки используют смешанные стратегии x и y соответственно. Математическое ожидание выигрыша в ситуации (x, y) в смешанных стратегиях $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$ равно

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j \ .$$

Если игрок 1 применяет чистую стратегию i, а игрок 2 смешанную стратегию $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, то его выигрыш игрока 1 определяется как

$$K(i, y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \eta_j = a_i y \, ,$$

где a_i - i-я строка платежной матрицы.

Если игрок 1 применяет смешанную стратегию $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$, а игрок 2 чистую стратегию j, то выигрыш игрока 1 определяется как

$$K(x, j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_i = x a^j \, ,$$

где a^j - j-й столбец платежной матрицы.

Ситуация в смешанных стратегиях (x^*, y^*) образует *ситуацию равновесия*, если для всех $x \in X$, $y \in Y$

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y).$$

Число $v = K\left(x^*, y^*\right)$ называется *значением игры*. Стратегии $\left(x^*, y^*\right)$, входящие в ситуацию равновесия, являются также оптимальными, а также являются соответственно максиминной и минимаксной.

К содержанию

7.2.5. Определение оптимальных смешанных стратегий с помощью линейного программирования

Пусть дана матричная игра с $(m \times n)$ платежной матрицей $A = \{\alpha_{ij}\}$. Предположим сначала, что все элементы матрицы A положительны, т.е. $\alpha_{ij} > 0$. Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i \ge 1, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_j \to \max, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (5)$$

$$y_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Так как все элементы матрицы A положительны, то существует такой вектор $x > 0$, для которого все неравенства (2) выполняются, т.е. задача (1)-(3) имеет допустимое решение. С другой стороны вектор $y = 0$ является допустимым решением задачи (4)-(6). Поэтому по теореме двойственности линейного программирования обе задачи (1)-(3) и (4)-(6) имеют оптимальные решения $\bar{x}$, $\bar{y}$ соответственно, при этом

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = \theta > 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим векторы $x^* = \overline{x}/\theta$ и $y^* = \overline{y}/\theta$, покажем, что они являются оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Действительно, из (7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1, \qquad (8)$$

отсюда и из не отрицательности x^* и y^* получаем, что x^* и y^* - смешанные стратегии. При этом выигрыш игрока 1 в ситуации $\left(x^*, y^*\right)$ определяется из равенства

$$K\left(x^*, y^*\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{x}_i \overline{y}_j / \theta^2 = 1/\theta .$$

Теперь рассмотрим игру с произвольной $(m \times n)$ платежной матрицей $A = \left\{\alpha_{ij}\right\}$. Тогда существует такая константа $\beta > 0$, что $\forall i, j \;\; \alpha_{ij} + \beta > 0$. Рассмотрим игру с платежной матрицей $A_1 = \left\{\alpha_{ij} + \beta\right\}$. Обозначим $K(x, y)$, $K_1(x, y)$ функции выигрыша в играх с матрицами A и A_1 соответственно. Поскольку все элементы матрицы A_1 положительны, то для нее существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях $\left(x^*, y^*\right)$, а значение игры равно $v_{A_1} = K_1\left(x^*, y^*\right) = 1/\theta$. Для функций выигрыша $K(x, y)$, $K_1(x, y)$ выполняется соотношение $K_1(x, y) = K(x, y) + \beta$, Отсюда, на основании леммы о масштабе, получаем, что $\left(x^*, y^*\right)$ - ситуация равновесия в игре с матрицей A, а значение игры равно $v_A = v_{A_1} - \beta = 1/\theta - \beta$.

На основании вышесказанного в данном разделе справедлива следующая теорема.

Теорема. Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

*Пример 2***.** Решить матричную игру с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, есть ли решение в чистых стратегиях. Находим: $\underline{v} = \max_i \min_j = 2$, $\overline{v} = \min_j \max_i = 3$. Так как $\underline{v} \neq \overline{v}$, то решение будем искать в смешанных стратегиях. Составим для этой игры пару двойственных задач линейного программирования.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \to \min, \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ & 3x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 \to \max, \\ & 4y_1 \leq 1, \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Решим, например, задачу (II) симплекс-методом. Для этого приведем ее к канонической форме:

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 \to \max, \\ & 4y_1 + y_3 = 1, \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 = 1, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Составим симплексную таблицу, в которой базисными переменными являются y_3, y_4

Таблица 1

Базис	$C_Б$	y_1	y_2	y_3	y_4	A_0
		1	1	0	0	
y_3	0	4	0	1	0	1
y_4	0	2	3	0	1	1
$z_j - c_j$		-1	-1	0	0	0

Поскольку в строке $z_j - c_j$ есть отрицательные элементы, то план, соответствующий табл.1, не является оптимальным. Определяем разрешающий элемент. Он находится на пересечении столбца y_1 и строки y_3. Делаем симплексные преобразования и получаем следующую таблицу

Таблица 2

Базис	$C_Б$	y_1	y_2	y_3	y_4	A_0
		1	1	0	0	
y_1	1	1	0	1/4	0	1/4
y_4	0	0	3	-1/2	1	1/2
$z_j - c_j$		0	-1	1/4	0	1/4

План не оптимальный. Находим разрешающий элемент (на пересечении столбца y_2 и строки y_4). Выполняем симплексные преобразования и приходим к следующей таблице

Таблица 3

Базис	$C_Б$	y_1	y_2	y_3	y_4	A_0
		1	1	0	0	
y_1	1	1	0	1/4	0	1/4
y_2	1	0	1	-1/6	1/3	1/6
$z_j - c_j$		0	0	1/12	1/3	5/12

Найден оптимальный план задачи линейного программирования $\overline{y}_1 = 1/4$, $\overline{y}_2 = 1/6$. Отсюда находим $\theta = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = 1/4 + 1/6 = 5/12$. Значение игры равно $1/\theta = 12/5$. Определим оптимальную смешанную стратегию игрока 2 $y_1^* = \overline{y}_1/\theta = 3/5$, $y_2^* = \overline{y}_2/\theta = 2/5$. На пересечении последней строки симплексной таблицы и столбцов y_3, y_4 находится решение двойственной задачи линейного $\overline{x}_1 = 1/12$, $\overline{x}_2 = 1/3$. Отсюда получаем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x_1^* = \overline{x}_1/\theta = 1/5$, $x_2^* = \overline{x}_2/\theta = 4/5$.

К содержанию

7.2.6. Решение матричной игры графическим методом

При поиске оптимальных стратегий в матричных играх размерностей $2\times n$ или $m\times 2$ целесообразно использовать графический метод решения задач линейного программирования и свойства оптимальных планов пары двойственных задач: если в оптимальном плане задачи переменная положительна, то соответствующее ограничение двойственной задачи ее оптимальным планом обращается в равенство; если оптимальным планом задачи ограничение обращается в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующая переменная равна нулю.

Пример 3. Найти решение игры с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

графическим методом. Легко проверить, что в данном случае не существует решение в чистых стратегиях. Поэтому для определения оптимальных смешанных стратегий игроков составляем задачи линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 9x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 \ge 1, \end{cases} \qquad (9)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

$$y_1 + y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 8y_2 \le 1, \\ 12y_1 + y_2 \le 1, \\ 9y_1 + 6y_2 \le 1, \end{cases} \qquad (10)$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Так как задача (10) содержит две переменные, то она легко решается графически (см. рис.1). Оптимум находится на пересечении 1-го и 3-го ограничений: $\bar{y}_1 = 1/27$, $\bar{y}_2 = 1/9$, $\theta = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 4/27$. Значение игры: $v = 1/\theta = 27/4$. Оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока: $y_1^* = 1/4$, $y_2^* = 3/4$.

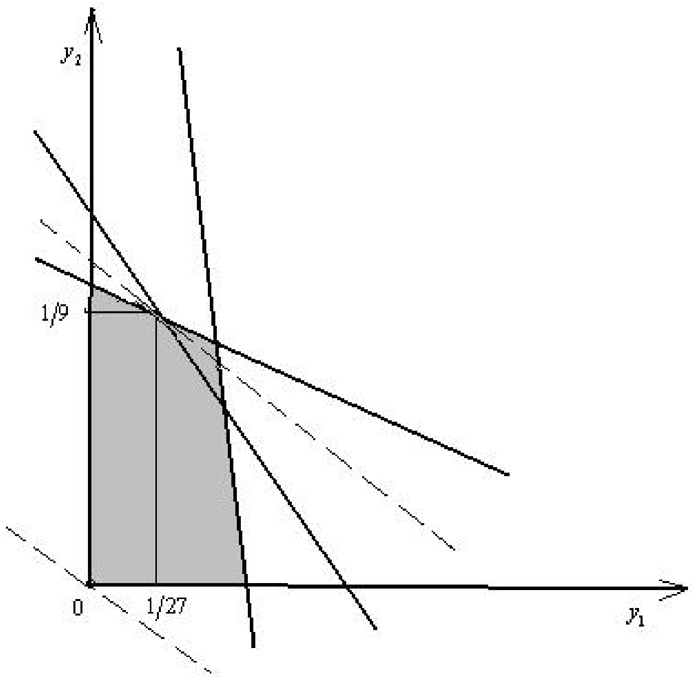

Рис. 1

Для определения оптимальной стратегии 1-го игрока найдем сначала решение двойственной задачи (9). Поскольку $\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_2 > 0$, поэтому оба ограничения двойственной задачи (9) ее оптимальным планом обращаются в равенства. При этом второе ограничение задачи (10) в оптимальной точке выполняется как строгое неравенство. Следовательно, в оптимальном плане задачи (9) вторая переменная равна нулю, т.е. $\bar{x}_2^* = 0$. Таким образом, для нахождения $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$ нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_3 = 1, \\ 8x_1 + 6x_3 = 1. \end{cases}$$

В результате решения системы получаем $\bar{x}_1 = 3/54$, $\bar{x}_3 = 5/54$. Определяем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x_1^* = \bar{x}_1/\theta = 3/8$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \bar{x}_3/\theta = 5/8$.

К содержанию

7.2.7. Свойства оптимальных стратегий и значения игры

Рассмотрим матричную игру с $(m \times n)$ платежной матрицей $A = \{\alpha_{ij}\}$. Для того, чтобы проверить (не решая матричную игру) является ли ситуация в смешанных стратегиях $(x^*, y^*) \in X \times Y$ ситуацией равновесия мы должны убедиться в справедливости неравенства

$$K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y) \qquad (1)$$

для всех смешанных стратегий $x \in X$, $y \in Y$. Поскольку множества смешанных стратегий X и Y бесконечны, то использование неравенства (1) для практического определения ситуации равновесия в общем случае не реально. Но оказывается, что для проверки равенства (1) достаточно вместо смешанных стратегий x и y рассмотреть чистые стратегии.

Теорема 1. Для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) была равновесной в матричной игре, а число $v = K(x^*, y^*)$ - значением игры, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$

$$K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j). \qquad (2)$$

Доказательство. Необходимость очевидна, т.к. любую чистую стратегию можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии.

Докажем достаточность. Пусть (x^*, y^*) - ситуация в смешанных стратегиях, для которой выполняются равенства (2). Возьмем произвольные смешанные стратегии $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Умножая первое и второе равенства (2) на ξ_i и η_j соответственно и суммируя, получаем

$$K(x, y^*) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i K(i, y^*) \le \sum_{i=1}^{m} \xi_i K(x^*, y^*) = K(x^*, y^*),$$

$$K(x^*, y) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j K(x^*, j) \ge \sum_{j=1}^{n} \eta_j K(x^*, y^*) = K(x^*, y^*).$$

Отсюда, учитывая произвольность выбора стратегий x и y, получаем доказательство теоремы.□

Следствие 1. Пусть (i^*, j^*) - ситуация равновесия в чистых стратегиях, тогда ситуация (i^*, j^*) является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях.

Пример 1. Предполагается, что игроки выбирают целые числа i и j между 1 и n, а игрок 1 выигрывает величину $\alpha_{ij} = |i-j|$.

Пусть первый игрок придерживается стратегии $x^* = \left(\frac{1}{2}, 0, ..., 0, \frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$K(x^*, j) = \tfrac{1}{2}|1-j| + \tfrac{1}{2}|n-j| = \tfrac{1}{2}(j-1) + \tfrac{1}{2}(n-j) = (n-1)/2$$

для всех $1 \le j \le n$.

Рассмотрим 2 случая:

а) $n = 2k+1$ - нечетно. Тогда игрок 2 имеет чистую стратегию $j^* = (n+1)/2 = k+1$ такую, что $\alpha_{ij^*} = |i-(n+1)/2| = |i-k-1| \le k = (n-1)/2$ для всех $i = 1, 2, ..., n$.

б) $n = 2k$ - четно. Тогда игрок 2 имеет такую стратегию $y^* = \left(0, 0, ..., \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ...0\right)$, где $\eta_k^* = \frac{1}{2}$, $\eta_{k+1}^* = \frac{1}{2}$, $\eta_j^* = 0$, $j \ne k$, $j \ne k+1$, что

$$K(i, y^*) = \tfrac{1}{2}|i-k| + \tfrac{1}{2}|i-k-1| \le \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}(k-1) = (n-1)/2$$

для всех $1 \le i \le n$.

Теорема 2. Пусть дана матричная игра с $(m \times n)$ платежной матрицей $A = \{\alpha_{ij}\}$. Для того, чтобы ситуация в смешанных стратегиях (x^*, y^*) была равновесной, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\max_{1 \le i \le m} K(i, y^*) = \min_{1 \le j \le n} K(x^*, j). \quad (3)$$

Доказательство. <u>Необходимость.</u> Если (x^*, y^*) - ситуация равновесия, то согласно теореме 1

$$K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j)$$

для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$. Поэтому $K(i, y^*) \le K(x^*, j)$ для каждого i и j. Предположим противное, т.е. равенство (3) не выполнено. Тогда

$$\max_{1\le i\le m} K\left(i, y^*\right) < \min_{1\le j\le n} K\left(x^*, j\right).$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$K\left(x^*, y^*\right) \le \sum_{i=1}^{m} \xi_i^* K\left(i, y^*\right) \le \max_{1\le i\le m} K\left(i, y^*\right) < \min_{1\le j\le n} K\left(x^*, j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* K\left(x^*, j\right) = K\left(x^*, y^*\right).$$

Получаем противоречие, из которого следует, что равенство (3) верно.

<u>Достаточность</u>. Пусть пара смешанных стратегий $(\tilde{x}, \tilde{y})$ такова, что $\max_{1\le i\le m} K\left(i, \tilde{y}\right) = \min_{1\le j\le n} K\left(\tilde{x}, j\right)$. Покажем, что в этом случае $(\tilde{x}, \tilde{y})$ - ситуация равновесия. Справедливы соотношения

$$\min_{1\le j\le n} K\left(\tilde{x}, j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \tilde{\eta}_j K\left(\tilde{x}, j\right) = K\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\xi}_i K\left(i, \tilde{y}\right) \le \max_{1\le i\le m} K\left(i, \tilde{y}\right).$$

Поэтому имеем

$$K\left(i, \tilde{y}\right) \le \max_{1\le i\le m} K\left(i, \tilde{y}\right) = K\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = \min_{1\le j\le n} K\left(\tilde{x}, j\right) \le K\left(\tilde{x}, j\right)$$

для всех $i = 1,...,m$ и $j = 1,...,n$. Отсюда по теореме 1 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ - ситуация равновесия. □

Из доказательства следует, что любое из чисел (3) равно значению игры.

Следствие. Для матричной игры справедливы следующие соотношения:

$$\max_{x} \min_{1\le j\le n} K\left(x, j\right) = v_A = \min_{y} \max_{1\le i\le m} K\left(i, y\right),$$

причем экстремумы по смешанным стратегиям x и y достигаются на оптимальных стратегиях игроков.

Для нахождения решения матричной игры может быть полезной следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $x^* = \left(\xi_1^*, ..., \xi_m^*\right)$ и $y^* = \left(\eta_1^*, ..., \eta_n^*\right)$ - оптимальные стратегии в матричной игре и v_A - значение игры. Тогда для любого i, при котором $K\left(i, y^*\right) < v_A$, имеет место равенство $\xi_i^* = 0$, а для любого j такого, что $v_A < K\left(x^*, j\right)$, имеет место равенство $\eta_j^* = 0$.

Обратно, если $\xi_i^* > 0$, то $K\left(i, y^*\right) = v_A$, а если $\eta_j^* > 0$, то $K\left(x^*, j\right) = v_A$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $1 \le i_0 \le m$ выполнено неравенство $K\left(i_0, y^*\right) < v_A$ и при этом $\xi_{i_0} \neq 0$. Тогда получаем, что $K\left(i_0, y^*\right)\xi_{i_0}^* < v_A \xi_{i_0}^*$. Для всех $i = 1,...,m$ $K\left(i, y^*\right) \le v_A$, поэтому $K\left(i, y^*\right)\xi_i^* \le v_A \xi_i^*$. Следовательно, $K\left(x^*, y^*\right) < v_A$, что противоречит тому, что v_A - значение игры. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. □

Чистая стратегия i, $1 \le i \le m$ (j, $1 \le j \le n$) игрока 1 (игрока 2) называется *существенной* или *активной стратегией*, если существует оптимальная стратегия $x^* = \left(\xi_1^*,...,\xi_m^*\right)$ ($y^* = \left(\eta_1^*,...,\eta_n^*\right)$) этого игрока, для которой $\xi_i^* > 0$ ($\eta_j^* > 0$).

Из теоремы 3 следует, что для каждой существенной стратегии i игрока 1 и любой оптимальной стратегии y^* игрока 2 выполняется равенство

$$K\left(i, y^*\right) = a_i y^* = v_A,$$

где a_i - i-я строка платежной матрицы. И, аналогично, для каждой существенной стратегии j игрока 2 и любой оптимальной стратегии $\overline{x}^* = \overline{y}^* = (0,0,3/4,1/4)3/2$ игрока 1 выполняется равенство

$$K\left(x^*, j\right) = x^* a^j = v_A,$$

где a^j - j-й столбец платежной матрицы.

Если для чистой стратегии i ($1 \le i \le m$) и смешанной стратегии y выполняется равенство $a_i y^* = v_A$, то говорят, что стратегия i *уравновешивает* смешанную стратегию y. *Спектром оптимальной стратегии* x^* (обозначение M_{x^*}) будем называть множество существенных чистых стратегий, образующих x^*.

Знание спектра оптимальной стратегии упрощает нахождение решения игры. Действительно, пусть M_{x^*} - спектр оптимальной стратегии x^* игрока 1. Тогда каждая оптимальная стратегия $y^* = \left(\eta_1^*,...,\eta_n^*\right)$ игрока 2 и значение игры v_A удовлетворяют системе неравенств:

$$a_i y^* = v_A,\ i \in M_{x^*},$$

$$a_i y^* \le v_A,\ i \in \{1,..,m\} \setminus M_{x^*},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* = 1,\ \eta_j^* \geq 0,\ j \in \{1,..,n\}.$$

К содержанию

7.2.8. Доминирование стратегий

Сложность решения матричной игры возрастает с увеличением размеров платежной матрицы. Вместе с тем в ряде случаев анализ матрицы выигрышей позволяет сделать вывод, что некоторые чистые стратегии не входят в спектр оптимальной стратегии. Это приводит к замене первоначальной матрицы на матрицу выигрышей меньшей размерности.

Пусть дана $(m \times n)$ матричная игра. Говорят, что стратегия x' игрока 1 *доминирует стратегию* x'', если для всех чистых стратегий $j \in \{1,..,n\}$ игрока 2 выполняются неравенства

$$x' a^j \geq x'' a^j. \tag{4}$$

Аналогично, стратегия y' игрока 2 доминирует стратегию y'', если для всех чистых стратегий $i \in \{1,...,m\}$ игрока 1 выполняются неравенства

$$a_i y' \leq a_i y''. \tag{5}$$

Если неравенства (4), (5) выполняются как строгие, то говорят о *строгом доминировании*.

Стратегии x', x'' называются *эквивалентными*, если для всех $j \in \{i = 1,...,n\}$ выполняются равенства $x' a^j = x'' a^j$. Эквивалентные стратегии обозначаются $x' \sim x''$.

Для двух эквивалентных стратегий выполняется равенство $K(x', y) = K(x'', y)$. Аналогично, стратегии y' и y'' игрока 2 *эквивалентны* ($y' \sim y''$), если для всех $i \in \{1,...,m\}$ выполняются равенства $a_i y' = a_i y''$. Отсюда для любой смешанной стратегии игрока 1 выполняется равенство $K(x, y') = K(x, y'')$.

Для чистых стратегий введенные определения трансформируются следующим образом. Если чистая стратегия i' игрока 1 доминирует стратегию i''

игрока 1, то для всех $j \in \{1,...,n\}$ $\alpha_{i'j} \geq \alpha_{i''j}$. Если чистая стратегия j' игрока 2 доминирует стратегию j'' игрока 2, то для всех $i \in \{1,...,m\}$ $\alpha_{ij'} \leq \alpha_{ij''}$.

Если две чистые стратегии игрока 1 (игрока 2) эквивалентны, то соответствующие строки (столбцы) платежной матрицы равны между собой.

Если для данной стратегии какого-либо игрока существует стратегия, которая ее доминирует, то первая стратегия называется *доминируемой*. В следующей теореме показывается, что игроки могут не использовать доминируемые стратегии.

Теорема 4. Если в матричной игре стратегия x' одного из игроков доминирует оптимальную стратегию x^*, то стратегия x' также является оптимальной.

Доказательство. Предположим, что x' и x^* - стратегии игрока 1. Тогда в силу доминирования для всех $j \in \{i = 1,...,n\}$ выполняются неравенства:

$$x'a^j \geq x^* a^j . \tag{6}$$

Из неравенства (6) и из оптимальности x^* следует

$$v_A = \min_j x^* a^j \geq \min_j x' a^j \geq \min_j x^* a^j = v_A$$

для всех $j \in \{i = 1,...,n\}$. Поэтому согласно следствию теоремы 2 стратегия x' также оптимальна. □

Итак, оптимальная стратегия может быть доминируема только оптимальной стратегией. С другой стороны, никакая оптимальная стратегия не может быть строго доминируемой. Поэтому игроки не должны использовать строго доминируемые стратегии.

Становится понятным, что если i-я строка (j-й столбец) платежной матрицы доминируема, то нет необходимости приписывать ей (ему) положительную вероятность. И для нахождения оптимальных стратегий вместо игры с матрицей A достаточно решить игру с матрицей A', полученной из матрицы A вычеркиванием доминируемых строк и столбцов. Отсюда можно получить алгоритм понижения размерности матрицы игры. Так, если строка (столбец) матрицы не больше (не меньше) некоторой выпуклой комбинации остальных строк (столбцов) этой матрицы, то для нахождения решения игры можно эту строку (столбец) вычеркнуть. При этом оптимальное решение исходной игры получается, если расширить полученные оптимальные стратегии путем введения нулевых компонент, соответствующих вычеркнутым строкам (столбцам).

Пример 2. Рассмотрим игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как 3-я строка превосходит 1-ю, то, вычеркивая 1-ю строку, получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 3-й столбец не превосходит 1-й, поэтому вычеркиваем 1-й столбец

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 никакая строка (столбец) не доминируется другой строкой (столбцом). Но при этом выполняется неравенство $a^1 \geq 1/2\,a^2 + 1/2\,a^3$. Поэтому вычеркиваем первый столбец

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице первая строка удовлетворяет равенству $a_1 = 1/2\,a_2 + 1/2\,a_3$. Поэтому, вычеркивая первую строку, получаем матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные стратегии x^* и y^* игроков в игре с этой матрицей равны $x^* = y^* = (3/4, 1/4)$, при этом значение игры равно $3/2$.

Матрица A_4 получена вычеркиванием первых двух строк и первых двух столбцов, поэтому оптимальными стратегиями игроков в исходной игре являются стратегии, полученные из x^* и y^* в результате их следующего расширения: $\overline{x}^* = \overline{y}^* = (0, 0, 3/4, 1/4)$.

К содержанию

7.2.9. Итеративные методы решения матричных игр

Метод решения матричных игр путем сведения к задаче линейного программирования, в общем случае, не эффективен для игр с матрицами большой размерности. В этом случае предпочтение отдается итеративным методам для получения приближенного решения.

7.2.9.1. Итеративный метод Брауна-Робинсона

Идея метода основана на многократном повторении игры с заданной матрицей выигрыша.

Пусть задана игра с $(m \times n)$-матрицей $A = \{\alpha_{ij}\}$. На первой итерации игроки выбирают совершенно произвольные чистые стратегии. На k-й итерации каждый игрок выбирает ту чистую стратегию, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш против наблюдаемого эмпирического вероятностного распределения противника за $(k-1)$ итераций.

Итак, предположим, что игрок 1 использовал i-ю стратегию p_i^k раз $(i = 1, \dots, m)$, а игрок 2 - j-ю стратегию q_j^k раз $(j = 1, \dots, n)$. Тогда на $(k+1)$-й итерации i_{k+1} стратегия игрока 1 выбирается из условия максимума

$$\overline{v}^k / k = \max_i \sum_j \alpha_{ij} \, q_j^k / k = \sum_j \alpha_{i_{k+1} j} \, q_j^k / k ,$$

а j_{k+1} стратегия игрока 2 из условия минимума

$$\underline{v}^k = \min_j \sum_i \alpha_{ij} p_i^k = \sum_i \alpha_{i j_{k+1}} p_i^k .$$

Пусть v - значение матричной игры. Рассмотрим отношения

$$\overline{v}^k / k = \max_i \sum_j \alpha_{ij} \, q_j^k / k = \sum_j \alpha_{i_{k+1} j} \, q_j^k / k \qquad \text{и} \qquad \underline{v}^k / k = \min_j \sum_i \alpha_{ij} \, p_i^k / k = \sum_i \alpha_{i j_{k+1}} \, p_i^k / k .$$

Векторы $x^k = \left(p_1^k / k, \ldots, p_m^k / k \right)$ и $y^k = \left(q_1^k / k, \ldots, q_n^k / k \right)$ являются смешанными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Поэтому по определению значения игры имеем

$$\max_k \underline{v}^k / k \le v \le \min_k \overline{v}^k / k .$$

Таким образом, получен некоторый итеративный процесс, позволяющий находить приближенное решение матричной игры. При этом точность приближения определяется длиной отрезка $\left[\max_k \underline{v}^k / k, \min_k \overline{v}^k / k \right]$. Сходимость алгоритма обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1.

$$\lim_{k \to \infty} \left(\max_k \underline{v}^k / k \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\min_k \overline{v}^k / k \right) = v .$$

*Пример 1***.** Найти приближенное решение игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>1-я итерация.</u> Пусть игроки 1 и 2 выбрали стратегию 1. Если игрок 1 выбрал стратегию 1, то игрок 2 может получить один из проигрышей (2, 1, 3). Если игрок 2 выбрал стратегию 1, то игрок 1 может получить один из выигрышей (2, 3, 1).

Тогда $\overline{v}^1 = \max(2;3;1) = 3$, $\underline{v}^1 = \min(2;1;3) = 1$ и $x^1 = (1;0;0)$, $y^1 = (1;0;0)$.

<u>2-я итерация.</u> На второй итерации игрок 1 выбирает стратегию 2, второй игрок тоже выбирает стратегию 2.

Согласно алгоритму $\overline{v}^2=\max(2+1;3+0;1+2)=3$, $\underline{v}^2=\min(2+3;1+0;3+1)=1$, $\overline{v}^2/2=3/2$, $\underline{v}^2/2=1/2$ и $x^2=(1/2;1/2;0)$, $y^2=(1/2;1/2;0)$. При этом нижняя и верхняя границы соответственно равны $\max\limits_k \underline{v}^k/k=1$, $\min\limits_k \overline{v}^k/k=3/2$.

<u>3-я итерация.</u> На третьей итерации игрок 1 может выбирать любую из трех стратегий. Предположим, что он выбрал стратегию 2. Игрок 2 выбирает стратегию 2, т.к. минимум при вычислении $\underline{v}^2$ реализуется на этой стратегии.

Тогда $\overline{v}^3=\max(2+1+1;3+0+0;1+2+2)=5$, $\underline{v}^3=\min(2+3+3;1+0+0;3+1+1)=1$, $\underline{v}^3/3=1/3$, $y^{12}=(1/12;6/12;5/12)$ и $x^3=(1/3;2/3;0)$, $y^3=(1/3;2/3;0)$. При этом нижняя и верхняя границы значения игры соответственно равны $\max\limits_k \underline{v}^k/k=1$, $\min\limits_k \overline{v}^k/k=3/2$.

Результаты расчетов первых 12 итераций приведены в табл.1. В результате – нижняя и верхняя оценки значения игры соответственно равны $\max\limits_k \underline{v}^k/k=17/12\approx 1{,}417$, $\min\limits_k \overline{v}^k/k=1{,}5$. Стратегии игроков 1 и 2 на 12-й итерации соответственно равны

$$x^{12}=(3/12;2/12;7/12) \text{ и } y^{12}=(1/12;6/12;5/12).$$

Таблица 1.

Номер итерации	Выбор игрока 1	Выбор игрока 2	Выигрыш игрока 1			Проигрыш игрока 2			$\overline{v}^k/k$	$\underline{v}^k/k$
			1	2	3	1	2	3		
1	1	1	2	3	1	2	1	3	3	1
2	2	2	3	3	3	5	1	4	3/2	1/2
3	2	2	4	3	5	8	1	5	5/3	1/3
4	3	2	5	3	7	9	3	6	7/4	3/4
5	3	2	6	3	9	10	5	7	9/5	5/5
6	3	2	7	3	11	11	7	8	11/6	7/6
7	3	2	8	3	13	12	9	9	13/7	9/7
8	3	3	11	4	14	13	11	10	14/8	10/8

9	3	3	14	5	15	14	13	11	15/9	11/9
10	3	3	17	6	16	15	15	12	17/10	12/10
11	1	3	20	7	17	17	16	15	20/11	15/11
12	1	3	23	8	18	19	17	18	23/12	17/12

К содержанию

7.2.10. Решение игр с природой

Будем предполагать, что в игре с природой сознательный игрок 1 может использовать m чистых стратегий $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, а природа (игрок 2) может реализовать n различных состояний $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$. Игроку 1 могут быть известны вероятности $q_1, q_2, ..., q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их. Если известны величины α_{ij} - оценки последствий применения игроком 1 каждой чистой стратегии α_i $(i = 1, ..., m)$ при любом состоянии природы β_j $(j = 1, ..., n)$, то игру можно задать матрицей.

Пример 1. На технологическую линию поступает сырье с малым или большим количеством примесей. Линия может работать в трех режимах. Доход предприятия от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья первого вида при различных режимах работы технологической линии, составляет соответственно 2, 5 и 6 ден. ед., а из сырья второго вида 5, 3 и 1 ден. ед. В каких режимах и сколько должна работать технологическая линия, чтобы доход от выпущено продукции был возможно большим?

Придерживаясь игровой схемы при анализе рассматриваемой в задаче ситуации, примем за игрока 1 технологическую службу предприятия, определяющую режим, в котором будет эксплуатироваться линия в конкретной обстановке. Из условия задачи следует, что у игрока 1 имеются три чистые стратегии: α_1 - использовать технологическую линию в 1-м режиме, α_2 - использовать технологическую линию во 2-м режиме, α_3 - использовать технологическую линию в 3-м режиме. Совокупность внешних обстоятельств, обуславливающих поступление на предприятие сырья того или иного качества, принимаем за игрока 2 – природу. Природа может реализовать два состояния: β_1 - поступает сырье с малым количеством примесей, β_2 - поступает сырье с большим количеством примесей. Таким образом, ситуация моделируется матричной игрой с природой с платежной матрицей размерности 3×2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Элементы платежной матрицы характеризуют доход предприятия при различных комбинациях (α_i, β_j) режимов работы технологической линии и качества поступающего на предприятие сырья.

Игры с природой являются частным видом матричных игр, однако при этом следует учитывать некоторые особенности. Например, при упрощении платежной матрицы нельзя отбрасывать чистые стратегии природы, т.к. она может реализовать любую стратегию независимо от того, выгодно это игроку 1 или нет. Другая особенность состоит в том, что решение достаточно найти только для игрока 1, т.к. природа наши рекомендации воспринять не может.

С учетом приведенных особенностей сформулируем ряд критериев, которыми пользуются при выборе оптимальных стратегий игрока 1 в ситуациях, которые моделируются играми с природой. Критерии позволяют оценить принимаемое решение последовательным численным анализом и высказать рекомендации по тому или иному образу действий. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев совпадают, принимается рекомендуемое решение. Если же рекомендации критериев противоречат друг другу, то необходимо сравнить, насколько значительно отличаются результаты по разным критериям, привлечь дополнительную информацию и сделать окончательный выбор.

При выборе оптимальной стратегии игрока 1 опираются как на платежную матрицу, так и на матрицу рисков. Риском r_{ij} игрока 1, когда он пользуется чистой стратегией α_i при состоянии природы β_j, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы достоверно знал, что природой будет реализовано состояние β_j, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию α_i в неведение о том, какое же состояние β_j природа реализует. Таким образом, элементы r_{ij} матрицы рисков определяются по формуле $r_{ij} = \max_l \alpha_{lj} - \alpha_{ij} \geq 0$. Итак, при выборе оптимальной стратегии игрока 1 следует максимизировать выигрыш игрока 1 и минимизировать неизбежный риск, сопровождающий выбор решения.

Если вероятности q_j состояний природы β_j известны, то используют *критерий Байеса*, в соответствии с которым оптимальной считается стратегия α_i, при которой средний выигрыш $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} q_j$ игрока 1 становится максимальным.

Если игроку 1 представляются в равной мере правдоподобными все состояния β_j природы, то иногда полагают $q_1 = q_2 = ... = q_n = 1/n$, и оптимальной считают чистую стратегию α_i, при которой достигается максимум $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$.

Если вероятности q_j состояний природы совсем неизвестны, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Оптимальной по критерию Вальда считается чистая стратегия α_i, при которой наименьший выигрыш игрока 1 будет максимальным, т.е. ему обеспечивается $v = \max_i \min_j \alpha_{ij}$. В соответствии с этим критерием игра ведется как с разумным партнером, противодействующим игроку 1 в достижении успеха. Критерий рекомендует игроку 1 ожидать наихудшего результата и в этом предположении искать наиболее благоприятный исход (выигрыш), который совпадает с нижней чистой ценой игры. Критерий Вальда выражает позицию крайнего пессимизма, и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер.

Оптимальной по критерию Сэвиджа считается та чистая стратегия α_i, при которой минимизируется величина r_{ij} максимального риска, т.е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Таким образом, согласно критерию Сэвиджа рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решения.

Оптимальной по критерию Гурвица считается чистая стратегия α_i, определяемая из условия

$$\max_i \left(\gamma \min_j \alpha_{ij} + (1-\gamma) \max_j \alpha_{ij} \right),$$

где γ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений. При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\gamma = 0$ - в критерий крайнего оптимизма. Чем риск для игрока 1 менее допустим, тем ближе к единице следует выбирать коэффициент γ.

*Пример 2***.** После k лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) Необходимо заменить отдельные детали и узлы; 3) дальнейшая эксплуатация возможна лишь после капитального ремонта. Накопленный на предприятии опыт свидетельствует, что вероятности указанных состояний оборудования составляют соответственно 0,3, 0,6, и 0,1. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения: 1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 или 10 ден. ед. в зависимости от состояния оборудования (в затраты включены стоимость ремонта и заменяемых деталей и узлов, убытки, связанные с ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования и др.); 2) произвести ремонт с помощью специалистов-ремонтников, что вызовет затраты, равные 10, 4 и 8 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 и 6 ден.

ед. Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

В данном примере в качестве игрока 1 выступает руководство предприятия, обладающее тремя стратегиями. Вторым игроком следует считать природу – комплекс внешних условий, в которых функционировало оборудование на протяжении k лет и которые определили три возможных состояния, указанных в условии. Составим платежную матрицу

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -10 & -4 & -8 \\ -14 & -12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Поскольку известны вероятности q_j состояний природы, пользуемся критерием Байеса. Находим средние выигрыши $\overline{a}_i$ игрока 1 при каждой его чистой стратегии:

$$\overline{a}_1 = -2\cdot 0,3 + (-6)\cdot 0,6 + (-10)\cdot 0,1 = -5,2;$$

$$\overline{a}_2 = -10\cdot 0,3 + (-4)\cdot 0,6 + (-8)\cdot 0,1 = -6,2;$$

$$\overline{a}_3 = -14\cdot 0,3 + (-12)\cdot 0,6 + (-6)\cdot 0,1 = -12.$$

Оптимальной по Байесу является чистая стратегия, согласно которой руководству предприятия следует произвести ремонт своими силами, т.к. при этом средние затраты будут минимальными.

Пример 3. Банк имеет возможность выделить 10 ден. ед. на формирование портфеля акций. Ценные бумаги можно приобрести у компаний K_1, K_2 и K_3. Номинальная стоимость акции компании K_1 составляет 3 ден. ед., компании K_2 - 2 ден. ед., компании K_3 - 5 ден. ед. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из двух состояний: C_1 или C_2. Эксперты установили, что дивиденды компании K_1 для состояния C_1 на конец года 10% номинальной стоимости акции, а для состояния C_2 - 15%; для компании K_2 - соответственно 8 и 12%; для компании K_3 - 14 и 8%. Используя игровой подход, дать рекомендации по формированию портфеля акций банка, обеспечивающие ему возможно большую сумму прибыли.

Примем за игрока 1 специалистов банка, принимающих решение о способах формирования портфеля акций, за игрока 2 – природу, т.е. совокупность внешних обстоятельств, обуславливающих то или иное состояние рынка ценных бумаг на конец года. В качестве чистых стратегий игрока 1 рассмотрим три возможности, полностью использующие выделенные банком средства в сумме 10 ден. ед. на приобретение ценных бумаг. Пусть α_1 - первая чистая стратегия игрока 1, состоящая в том, что банк приобретает по одной акции каждой из компаний $\alpha_1(1\cdot 3;\ 1\cdot 2;\ 1\cdot 5)$, α_2 - банк приобретает по две акции компаний K_1 и K_2 - $\alpha_2(2\cdot 3;\ 2\cdot 2;\ 0\cdot 5)$, α_3 - банк приобретает две акции компании K_3 - $\alpha_3(0\cdot 3;\ 0\cdot 2;\ 0\cdot 5)$. Что касается природы, то она может реализовать одно из двух состояний, характеризующихся различными размерами дивидендов, выплачиваемых компаниями владельцам акций. Обозначим состояния природы следующим образом: β_1(10%; 8%; 14%) и β_2(15%; 12%; 8%). Элементы платежной матрицы α_{ij} выражают прибыль банка при выборе стратегии α_i и реализации состояния рынка ценных бумаг β_j

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\beta_1 & \beta_2\end{array} \\ \begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{array} & \begin{bmatrix} 1{,}16 & 1{,}09 \\ 0{,}92 & 1{,}38 \\ 1{,}40 & 0{,}80 \end{bmatrix}. \end{array}$$

В платежной матрице у игрока 1 доминируемых стратегий нет. Вероятности состояний β_1, β_2 неизвестны. Поэтому воспользуемся критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Согласно критерию Вальда найдем нижнюю чистую цену игры: $\underline{v} = \max_i \min_j \alpha_{ij} = 1{,}09$. Это соответствует выбору игроком 1 стратегии α_1.

Рассмотрим применение критерия Сэвиджа, для этого составим матрицу рисков с элементами r_{ij}:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\beta_1 & \beta_2\end{array} \\ \begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}24 & 0{,}29 \\ 0{,}48 & 0 \\ 0 & 0{,}58 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Из матрицы рисков видно, что $\min_i \max_j r_{ij} = 0,29$, что соответствует стратегии α_1.

В критерии Гурвица примем $\gamma = 0,7$ (перевес в сторону пессимизма). Оптимальная стратегия по критерию Гурвица будет соответствовать выражению

$$\max_i \left(0,7 \min_j \alpha_{ij} + 0,3 \max_j \alpha_{ij}\right) = \max_i h_i .$$

Определим $h_1 = 0,7 \cdot 1,09 + 0,3 \cdot 1,16 = 1,111$; $h_2 = 0,7 \cdot 0,92 + 0,3 \cdot 1,38 = 1,058$ и $h_3 = 0,7 \cdot 0,80 + 0,3 \cdot 1,40 = 0,980$. Отсюда видно, что $h_1 = \max_i h_i = 1,111$, т.е. оптимальной по критерию Гурвица является стратегия α_1.

Таким образом, все три критерия свидетельствуют в пользу чистой стратегии α_1, т.е. банку следует приобрести по одной акции каждой компании. При этом банк получит наибольшую среднюю прибыль при любом состоянии рынка ценных бумаг.

К содержанию

7.3. Неантагонистические игры

7.3.1. Определение бескоалиционной игры

В антагонистических играх двух лиц интересы участников прямо противоположны. В реальной жизни в условиях конфликта интересы игроков могут не обязательно быть противоположными, число участников может быть больше двух. В частности возможны ситуации взаимовыгодные нескольким игрокам, что делает осмысленным кооперирование, приводящее к увеличению выигрыша этих игроков. В неантагонистических играх возможны также конфликты, когда кооперация невозможна по правилам игры. Поэтому различают неантагонистические игры кооперативные (коалиционные), когда разрешена кооперация между игроками, и бескоалиционные, когда соглашения между игроками запрещены правилами.

Рассмотрим систему $\Gamma = \left(\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{H_i\}_{i=\overline{1,n}} \right)$, в которой n - количество игроков, и каждому игроку приписан его номер $i \in \{1,...,n\}$; X_i - множество стратегий игрока i, которые будем называть чистыми стратегиями; H_i - функция выигрыша игрока i, определяемая на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Такая система называется *бескоалиционной игрой*.

Бескоалиционная игра n лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии $x_i \in X_i$, $i = 1,2,...,n$. В результате этого выбора формируется ситуация $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. После чего каждый игрок i получает выигрыш $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Если множества чистых стратегий игроков X_i конечны, то игра называется *конечной бескоалиционной игрой n лиц.*

Рассмотрим бескоалиционную игру Γ, в которой принимают участие два игрока, Эта игра определяется системой $\Gamma = \{X, Y, H_1, H_2\}$. Конечная бескоалиционная игра двух лиц *биматричной.* Это объясняется тем, что функции выигрыша игроков можно записать в виде двух матриц

$$H_1 = A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} ... \alpha_{1n} \\ .... \\ \alpha_{m1} ... \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = B = \begin{bmatrix} \beta_{11} ... \beta_{1n} \\ .... \\ \beta_{m1} ... \beta_{mn} \end{bmatrix},$$

где m - число стратегий 1 игрока; n - число стратегий 2 игрока; α_{ij} и β_{ij} - выигрыши соответственно игроков 1 и 2 в ситуации (i, j), $(i = 1,2,...,m)$, $(j = 1,...,n)$. Для биматричных игр будем использовать обозначение $\Gamma(A, B)$.

Если бескоалиционная игра двух лиц такова, что $H_1(x, y) = -H_2(x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, то эта игра оказывается антагонистической игрой.

Пример 1. **(**Игра «перекресток») Два автомобилиста, двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и встречаются на перекрестке. Каждый из них может остановиться (1-я стратегия x_1, y_1) или ехать (2-я стратегия x_2, y_2). Предполагается , что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не двигаться дальше и пострадать в аварии. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой с матрицей

$$(A,B)= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (1-\varepsilon,2) \\ (2,1-\varepsilon) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Неотрицательное число ε соответствует неудовольствию из-за того, что игрок остановился и пропустил партнера.

К содержанию

7.3.2. Равновесие по Нэшу

В неантагонистической игре также как и в антагонистической каждый из игроков стремится получить наибольший выигрыш. Однако функции выигрыша H_i зависят не только от стратегии i-го игрока, но и от стратегий, выбираемых другими игроками. Поэтому ситуации x_i, дающие большее значение выигрыша для i-го игрока, могу не быть таковыми для других игроков. Таким образом, так же как и в случае антагонистической игры, стремление игроков получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер. Сама формулировка того, какое поведение является оптимальным в игре является проблематичной. Одним из подходов, позволяющим решить эту проблему является равновесие по Нэшу. В случае, когда игра является антагонистической, равновесие по Нэшу совпадает с понятием равновесия, которое представляет собой основной принцип оптимальности а антагонистической игре.

Ситуация $x^*=\left(x_1^*,\dots,x_i^*,\dots,x_n^*\right)$ *называется ситуацией равновесия по Нэшу* , если для всех $x_i \in X_i$ $(i=1,\dots,n)$ имеет место неравенство

$$H_i\left(x_1^*,\dots,x_i^*,\dots,x_n^*\right) \ge H_i\left(x_1^*,\dots,x_i,\dots,x_n^*\right). \tag{1}$$

Пример 2. (Выбор способа передвижения по городу) Пусть число игроков равно n.

Предполагается, что число n велико. Каждое множество X_i $(i=1,...,n)$ состоит из двух элементов $X_i=\{0,1\}$, где 0 означает: воспользоваться автомобилем; 1 – использовать общественный транспорт. Функция выигрыша определяется следующим образом:

$$H_i(x_1,...,x_n)=\begin{cases} a(t) \text{ при } x_i=1, \\ b(t) \text{ при } x_i=0, \end{cases}$$

где $t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. H

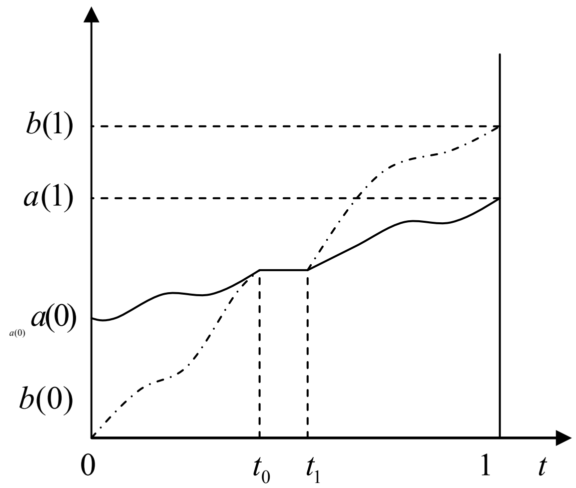

Рис. 1. Функции a(t) и b(t)

Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют вид, изображенный на рис.1. Из вида этих функций следует, что если доля игроков, выбирающих 1 (общественный транспорт) больше t_1, то уличное движение настолько свободно, что водитель себя лучше, чем пассажир в общественном транспорте. При $t<t_0$, т.е. когда доля автомобилистов больше $1-t_0$, движение настолько интенсивное, что сравнение теперь в пользу общественного транспорта.

Равновесными по Нэшу являются ситуации, для которых выполняется условие

$$H_2(x^*,y)\le H_2(x^*,y^*) x\in X y\in Y$$

$$t_0\le t^*-1/n,\ t^*+1/n\le t_1, \qquad (2)$$

где $t^* = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} x_j^*$. Из условия (2) следует, что переключение каждого отдельного игрока с одной чистой стратегии на другую при условии, что другие игроки своих стратегий не изменяют, не влияет на его выигрыш.

Покажем, что ситуации, соответствующие $t_0 \le t \le t_1$, где $t = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} x_j$ обладают, в некотором смысле, свойством устойчивости. Пусть в игре реализовалась ситуация x, которой соответствует $t_0 \le t \le t_1$, и δ - доля игроков, решивших переключиться со стратегии 0 на стратегию 1. Заметим, что если δ таково, что $b(t) = a(t) < a(t+\delta)$, то выигрыши этих игроков увеличиваются при таком переключении. Однако, если это переключение действительно произойдет, то у тех же игроков возникнет желание переключиться со стратегии 1 на стратегию 0, т.к. выполнено условие $a(t+\delta) < b(t+\delta)$. Если это желание осуществится, то значение t уменьшится и вновь попадет на отрезок $[t_0, t_1]$.

Аналогично, пусть δ - доля игроков, переключившихся по каким-либо причинам со стратегии 1 на стратегию 0, причем $t - \delta < t_0$. Тогда в силу условия $b(t-\delta) < a(t-\delta)$ у игроков появится желание переключиться обратно на стратегию 1. В случае, если это желание осуществиться, доля $\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n} x_j$ увеличится и вновь вернется на отрезок $[t_0, t_1]$.

Из определения ситуации равновесия по Нэшу следует, что ни одному из игроков i не выгодно отклоняться от стратегии x_i^*, входящей в эту ситуацию. Стратегия $x_i^* \in X_i$ называется равновесной, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.

Для бескоалиционной игры двух лиц $\Gamma = (X, Y, H_1, H_2)$ ситуация (x^*, y^*) является ситуацией равновесия, если для всех $x \in X$, $y \in Y$ выполняются неравенства

$$H_1(x, y^*) \le H_1(x^*, y^*), \quad H_2(x^*, y) \le H_2(x^*, y^*).$$

В частности, для биматричной $(m \times n)$ игры $\Gamma(A,B)$ пара (i^*, j^*) является ситуацией по Нэшу, если для всех номеров строк $i = 1, 2, ..., m$ и номеров столбцов $j = 1, ..., n$ выполняются неравенства

$$\alpha_{i,j^*} \le \alpha_{i^*,j^*} \ , \quad \beta_{i^*,j} \le \beta_{i^*,j^*} \ .$$

*Пример 3***.** В игре с матрицей

$$(A,B) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & \quad y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

равновесными являются ситуации (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если игрок 1 информирует игрока 2 о намерении выбрать стратегию x_1, то если игрок 2 уверен, что его партнер не отступит от принятого решения, то ему ничего не остается, как выбрать стратегию y_1. Аналогичные рассуждения можно сделать и за игрока 2.

Предположим, что игроки не общаются до начала игры, а делают выбор независимо друг от друга. Проведем рассуждения за игрока 1. Ему выгодно, чтобы реализовалась ситуация (x_1, y_1). Но игроку 2 выгодна ситуация (x_2, y_2). Поэтому, если игрок 1 выберет стратегию x_1, а игрок 2 – стратегию y_2, то они оба проиграют, т.к. выигрыш каждого будет равен нулю. Тогда игроку 1 имеет смысл выбрать стратегию x_2, т.к. в ситуации (x_2, y_2) он получит выигрыш 1. Но игрок 2 может рассуждать аналогично и выбрать y_1, тогда в ситуации (x_2, y_1) они опять оба проиграют. Таким образом, ситуация (x_1, y_1) выгодна для игрока 1, но она неустойчива. Аналогично можно рассмотреть ситуацию равновесия (x_2, y_2).

В данном случае мы видим, что игрокам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий. Подобная ситуация невозможна в антагонистической игре. В различных ситуациях равновесия по Нэшу векторы выигрышей игроков могут быть различны. И, таким образом, ситуация равновесия по Нэшу является множественным принципом оптимальности в том смысле, что различные ситуации равновесия могут быть в разной степени предпочтительными для разных игроков. И, на самом деле, остается не решенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять как устраивающий всех игроков принцип оптимальности. Можно показать, что возможна наилучшая для всех игроков ситуация, но которая не является ситуацией равновесия по Нэшу.

К содержанию

7.3.3 Оптимальность по Парето

Рассмотрим следующий пример

Пример 4. Пусть дана биматричная игра с матрицей

$$(A,B)= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}.$$

В данной игре имеется одна ситуация равновесия (x_2, y_2). Однако, если оба игрока сыграют (x_1, y_1), они получат вектор выигрышей (5,5), что выгодно им обоим. Таким образом, выигрыш каждого игрока становится больше при одновременном отклонении от равновесной стратегии.

Подобные примеры приводят к необходимости поиска других принципов оптимальности в бескоалиционных играх, которые определяют ситуации более выгодные всем участникам, чем равновесные ситуации. Таким принципом оптимальности является *оптимальность по Парето.*

Ситуация $\bar{x}$ в бескоалиционной игре называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеют место неравенства

$$H_i(x) \geq H_i(\bar{x}) \text{ для всех } i \in N \text{ и}$$

$$H_{i_0}(x) > H_{i_0}(\bar{x}) \text{ хотя бы для одного } i_0 \in N.$$

Обозначим X^P множество всех ситуаций, оптимальных по Парето. Таким образом, принадлежность ситуации $\bar{x}$ множеству X^P означает, что не существует другой ситуации x, которая была бы предпочтительней ситуации $\bar{x}$ для всех игроков. Основное различие ситуации равновесия и ситуации оптимальной по Парето состоит в том, что в первой ситуации ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша, во второй – все игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого. В случае ситуации равновесия, выбранной по соглашению, каждому отдельному игроку не выгодно от нее отклоняться. В оптимальной по Парето ситуации отклонившийся игрок может в некоторых случаях получить существенно больший выигрыш. В примере 4 ситуация (x_2, y_2) является равновесной, но она не является оптимальной по Парето. С другой стороны, ситуация (x_1, y_1) оптимальна по Парето, но она не является равновесной.

К содержанию

7.3.4. Смешанные стратегии в бескоалиционной игре

Рассмотрим бескоалиционную конечную игру $\Gamma = \left(\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}, \{H_i\}_{i=\overline{1,n}}\right)$. Как и в случае антагонистических игр смешанная стратегия игрока отождествляется с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий.

Обозначим μ_i произвольную смешанную стратегию игрока i, т.е. некоторое вероятностное распределение на множестве чистых стратегий X_i. Через $\mu_i(x_i)$ будем обозначать вероятность, которую стратегия μ_i приписывает конкретной чистой стратегии $x_i \in X_i$.

Пусть каждый из игроков $i \in \{1,...,n\}$ применяет свою смешанную стратегию μ_i, т.е. выбирает чистые стратегии с вероятностями $\mu_i(x_i)$. Будем предполагать, что вероятность появления ситуации $x = (x_1,...,x_n)$ равна произведению вероятностей выборов составляющих ее стратегий, т.е.

$$\mu(x) = \mu_1(x_1) \times \mu_2(x_2) \times ... \times \mu_n(x_n) \qquad (1)$$

Формула (1) определяет вероятностное распределение на множестве всех ситуаций $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, определяемое смешанными стратегиями $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Набор $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ называется *ситуацией в смешанных стратегиях*. Ситуация в смешанных стратегиях μ реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями, поэтому значение функции выигрыша каждого из игроков оказывается случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша i-го игрока в ситуации μ принимается математическое ожидание этой случайной величины:

$$K_i(\mu)=\sum_{x\in X} H_i(x)\mu(x)=\sum_{x_1\in X_1}\dots\sum_{x_n\in X_n} H_i(x_1,\dots,x_n)\times\mu_1(x_1),\dots,\mu_n(x_n)\ , \qquad (2)$$

где $i\in\{1,\dots,n\}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in X$.

Обозначим $K_i(\mu\,\|\,x'_j)$ - функцию выигрыша i-го игрока в ситуации в смешанных стратегиях μ, при условии, что чистая стратегия j-го игрока принимает фиксированное значение $x'_j\in X_j$; $H_i(x\,\|\,x'_j)$ - функцию выигрыша i-го игрока в ситуации $x=(x_1,\dots,x_n)\in X$, при условии, что чистая стратегия j-го игрока принимает фиксированное значение $x'_j\in X_j$. Тогда

$$K_i(\mu\,\|\,x'_j)=\sum_{x_1\in X_1}\dots\sum_{x_{j-1}\in X_{j-1}}\ \sum_{x_{j+1}\in X_{j+1}}\dots\sum_{x_n\in X_n} H_i(x\,\|\,x'_j)\prod_{k\neq j}\mu_k(x_k)\ . \qquad (3)$$

Пусть μ'_j - произвольная смешанная стратегия игрока j в игре Γ. Умножив (3) на $\mu'_j(x'_j)$ и просуммировав по всем $x'_j\in X_j$, получаем

$$\sum_{x'_j} K_i(\mu\,\|\,x'_j)\,\mu'_j(x'_j)=K_i(\mu\,\|\,\mu'_j)\,. \qquad (4)$$

Игра $\overline{\Gamma}=\left(\{\overline{X}_i\}_{i=\overline{1,n}},\{K_i\}_{i=\overline{1,n}}\right)$, в которой $\overline{X}_i$ - множество смешанных стратегий каждого игрока i, а функция выигрыша определяется равенством (2) называется *смешанным расширением игры* Γ.

<u>Утверждение.</u> Пусть для любой чистой стратегии $x_i\in X_i$ игрока i выполняется неравенство $K_j(\mu\,\|\,x_i)\le a$, то для любой смешанной стратегии μ'_i выполняется неравенство $K_j(\mu\,\|\,\mu'_i)\le a$.

Справедливость этого утверждения вытекает из равенства (4).

Для биматричной игры $\Gamma=(A,B)$ можно определить множества смешанных стратегий X_1, X_2 соответственно 1 и 2 игроков в виде

$$X_1=\left\{x \mid x=(\xi_1,\ldots,\xi_m),\sum_{i=1}^{m}\xi_i=1,\xi_i\geq 0\right\}\quad,$$

$$X_2=\left\{y \mid y=(\eta_1,\ldots,\eta_n),\sum_{j=1}^{n}\eta_j=1,\eta_j\geq 0\right\},$$

а также выигрыши K_1 и K_2 игроков 1 и 2 соответственно в ситуации (x,y) в смешанных стратегиях как математические ожидания выигрыша

$$K_1(x,y)=xAy,\ K_2(x,y)=xBy,\ x\in X_1,\ y\in X_2.$$

Для биматричной игры множество $M_x=\{i \mid \xi_i>0\}$ будем называть спектром смешанной стратегии $x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ игрока 1, а стратегию x, для которой $M_x=\{1,\ldots,m\}$ - *вполне смешанной*. Аналогично, $N_y=\{j \mid \eta_j>0\}$ - спектр смешанной стратегии $y=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ игрока 2. Ситуацию (x,y), в которой обе стратегии x и y вполне смешанные, будем называть *вполне смешанной.*

Пример 1. Пусть в биматричной игре с матрицей

$$(A,B)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\beta_1 & \beta_2\end{array}\\ \begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array} & \begin{bmatrix}(4,1) & (0,0)\\ (0,0) & (1,4)\end{bmatrix}\end{array}$$

игрок 1 хочет максимально увеличить свой гарантированный выигрыш. Это означает, что он намерен выбрать смешанную стратегию $x^0=(\xi^0,1-\xi^0)$, $0\leq\xi^0\leq 1$ так, чтобы максимально увеличить наименьшую из величин $K_1(x,\beta_1)$, $K_1(x,\beta_2)$ (здесь β_1, β_2 обозначены чистые стратегии игрока 2), т.е.

$$\max_x\min\{K_1(x,\beta_1),K_1(x,\beta_2)\}=\min\{K_1(x^0,\beta_1),K_1(x^0,\beta_2)\}.$$

Максиминная стратегия игрока 1 имеет вид $x^0=(1/5,4/5)$ и дает ему гарантированный выигрыш $4/5$. Если игрок 2 выберет стратегию β_1, то выигрыши игроков будут равны $(4/5,1/5)$, если же он воспользуется стратегией β_2, то $(4/5,16/5)$.

Таким образом, если игрок 2 догадается, что его партнер придерживается стратегии x^0, то он выберет β_2 и получит выигрыш $16/5$. Если игрок 1 может обосновать выбор β_2 за игрока 2, то он может улучшить свой выбор.

Аналогично, пусть игрок 2 придерживается максиминной стратегии, таковой является стратегия $y^0 = (4/5, 1/5)$. Если игрок 1 выбирает стратегию α_1, то выигрыши игроков равны $(16/5, 4/5)$, а если α_2, то $(1/5, 4/5)$. Поэтому игроку 1 выгодно против максиминной стратегии y^0 применять свою стратегию α_1.

Если оба игрока будут рассуждать таким образом, то они приходят к ситуации (α_1, β_2), в которой вектор выигрышей равен $(0,0)$.

Ситуация μ^* называется ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре Γ, если для любого игрока i и для любой его смешанной стратегии μ_i имеет место неравенство

$$K_i\left(\mu^* \parallel \mu_i\right) \le K_i\left(\mu^*\right),\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Покажем, что ситуация $\left(x^0, y^0\right)$ в примере 1 не является ситуацией равновесия по Нэшу. Действительно, $K_1\left(x^0, y^0\right) = 4/5$. Для произвольной смешанной стратегии игрока 1 $x = (\xi, 1-\xi)$ $(0 \le \xi \le 1)$ $K_1\left(x, y^0\right) = 3\xi + 1/5$ и эта величина больше $4/5$ при $\xi > 1/5$. Таким образом, ситуация в максиминных смешанных стратегиях не обязательно является ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Существование ситуации равновесия в смешанных стратегиях для биматричной игры доказывается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\Gamma(A, B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра. Тогда существуют смешанные стратегии $x^* \in X_1$ и $y^* \in X_2$ игроков 1 и 2 соответственно, такие, что пара $\left(x^*, y^*\right)$ является ситуацией равновесия по Нэшу.

Приведем свойства ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях, которые помогают находить решение биматричной игры.

Теорема 2. Пусть дана биматричная $(m \times n)$-игра $\Gamma(A, B)$. Для того, чтобы ситуация $\left(x^*, y^*\right)$ в смешанных стратегиях в игре $\Gamma(A, B)$ была ситуацией равновесия по Нэшу необходимо и достаточно, чтобы для всех $i = 1, ..., m$ и $j = 1, ..., n$ выполнялись следующие неравенства:

$$a_i y^* \le x^* A y^*, \quad x^* b^j \le x^* B y^*,$$

где a_i - i-я строка матрицы A, b^j - j-й столбец матрицы B.

Будем обозначать, как и для матричной игры, M_x, N_y - спектры смешанных стратегий x и y соответственно.

В биматричных играх, также как и в матричных, каждая существенная чистая стратегия уравновешивает любую оптимальную стратегию противника.

Теорема 3. Пусть $\Gamma(A,B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра и пусть $(x,y) \in Z(\Gamma)$ - ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Тогда выполняются равенства

$$a_i y = xAy, \quad xb^j = xBy$$

для всех $i \in M_x$, $j \in N_y$.

Данная теорема дает способ нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков в игре $\Gamma(A,B)$. Действительно, предположим, что мы ищем ситуацию равновесия (x,y), считая спектры M_x, N_y заданными. Тогда оптимальные стратегии должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$a_i y = v_1, \tag{5}$$

$$xb^j = v_2, \tag{6}$$

где $i \in M_x$, $j \in N_y$, v_1, v_2 - некоторые числа. Если же ситуация равновесия вполне смешанная ($M_x = \{1,...,m\}, N_y = \{1,...,n\}$), то система уравнений (5), (6) принимает вид

$$Ay = v_1 u,$$

$$xB = v_2 w,$$

где $u = (1,...,1)$, $w = (1,...,1)$ - векторы размерностей m и n соответственно, числа $v_1 = xAy$, $v_2 = xBy$ - выигрыши игроков в ситуации равновесия (x,y).

Теорема 4. Пусть $\Gamma(A,B)$ - биматричная $(m \times n)$-игра и матрицы A, B - невырожденные. Если игра Γ имеет вполне смешанную ситуацию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам

$$x = v_2 u B^{-1}, \tag{7}$$

$$y = v_1 A^{-1} u, \tag{8}$$

где

$$v_1 = 1/\left(uA^{-1}u\right),\ v_2 = 1/\left(uB^{-1}u\right). \tag{9}$$

Обратно, если для векторов $x, y \in R^m$, определяемых равенствами (7)-(10), справедливо $x \geq 0$, $y \geq 0$, то пара (x, y) образует ситуацию равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma(A, B)$ с вектором равновесных выигрышей (v_1, v_2).

К содержанию

7.4. Упражнения

7.1. Каждый из игроков A и B записывает одну из цифр от 1 до 5. Затем они одновременно показывают записанное. Если обе цифры оказались одинаковой четности, то игрок A получает столько очков, какова сумма этих цифр. Если цифры оказались разной четности, то очки получает игрок B. Составить платежную матрицу игры.

Ответ

	1	2	3	4	5
1	2	-3	4	-5	6
2	-3	4	-5	6	-7
3	4	-5	6	-7	8
4	-5	6	-7	8	-9
5	6	-7	8	-9	10

7.2. Участники игры A и B независимо друг от друга записывают одну из цифр 3, 5, 8. Если разность между цифрами, записанными игроками A и B окажется положительной, то игрок A получает столько число очков, равное получившейся разности; если разность будет отрицательной, то соответствующее число очков присваивается игроку B; если разность окажется равной нулю, то очки не начисляются никому. Составить платежную матрицу игры.

Ответ

	3	5	8
3	0	–2	–5
5	2	0	–3
8	5	3	0

7.3. Магазин может закупить для реализации 10, 15 или 20 ед скоропортящегося товара по цене 3 ден. ед. за единицу товара. В зависимости от уровня спроса (пониженный, умеренный или повышенный) в день реализации может быть продано 10, 15 или 20 ед. товара по цене 5 ден. ед. за единицу товара. Предполагается, что остаток товара будет реализован на следующий день по сниженной цене 2 ден. ед. за единицу товара. Придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу.

Ответ

	пониженный	умеренный	повышенный
10	20	20	20
15	15	30	30
20	10	25	40

7.4. Игрок B прячет 4 черных шара в 2-х урнах. Общее количество шаров (черных и белых) в первой урне равно 10, во второй – 8 независимо от того, как распределяет черные шары по двум урнам игрок B. Игрок A заинтересован в обнаружении максимально возможного количества черных шаров. При этом A может проверить только одну из урн. При проверке одной из урн игрок A наугад выбирает 4 шара. Выигрыш игрока A равен математическому ожиданию количества черных шаров в выборке из четырех шаров. Построить матрицу игры.

Ответ

	$(4,0)$	$(3,1)$	$(2,2)$	$(1,3)$	$(0,4)$
1	$8/5$	$6/5$	$64/105$	$2/5$	0
2	0	$1/2$	1	$3/2$	2

7.5. Для игры с заданной платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную минимаксную стратегии игроков, установить наличие седловых элементов.

Ответ

	$(4,0)$	$(3,1)$	$(2,2)$	$(1,3)$	$(0,4)$
1	$8/5$	$6/5$	$64/105$	$2/5$	0
2	0	$1/2$	1	$3/2$	2

7.6. Решить путем сведения к паре двойственных задач линейного программирования матричную игру, заданную платежной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 5 & -1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ $\underline{v} = \max_i \min_j \ \alpha_{ij} = 2$, $\overline{v} = \min_j \max_i \ \alpha_{ij} = 2$; $i^* = 4$ - максиминная чистая стратегия ; $j^* = 4$ - минимаксная чистая стратегия; $\alpha_{44} = 2$ - седловая точка.

7.7. Дана игра с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 9 & 3 \\ 10 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Доказать, не решая игры, что смешанные стратегии $x^* = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ и $y^* = \left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ образуют точку равновесия.

7.7. Отбрасывая строки и столбцы, соответствующие доминируемым стратегиям, упростить платежную матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ответ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$

7.8. Используя итерационный метод, найти приближенное решение матричной игры с приведенной ниже платежной матрицей, выполнив 7 итераций

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ

Номер итерации	Выбор игрока 1	Выбор игрока 2	Выигрыш игрока 1			Проигрыш игрока 2			$\overline{v}^k/k$	$\underline{v}^k/k$
			1	2	3	1	2	3		
1	1	2	4	2	3	1	4	6	4	1
2	1	1	5	9	8	2	8	12	9/2	2/2
3	2	1	6	16	13	9	10	12	16/3	9/3
4	2	1	7	23	18	16	12	12	23/4	12/4
5	2	2	13	25	21	23	14	12	25/5	12/5
6	2	3	19	25	23	30	16	12	25/6	12/6
7	2	3	25	25	25	37	18	12	25/7	12/7

7.9. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать картофель на трех участках: на участке A повышенной влажности, B средней влажности, C сухом.

Урожайность картофеля зависит от погодных условий, в частности от количества осадков, выпадающих в течение сезона. Если осадков выпадает меньше нормы, то средняя урожайность на участке A составляет 270 ц; при количестве осадков , близком к норме, - 220 ц; если же осадков ожидается больше нормы – 110 ц; на участке B - соответственно 210, 250 и 140 ц; на участке C - 120, 260 и 280 ц. Установить, на каком участке следует выращивать картофель в предстоящем году, если, по данным службы долгосрочного прогнозирования погоды, вероятность выпадения осадков в данном регионе меньше нормы ожидается равной 0,3, близко к норме – 0,6, больше нормы 0,1. Воспользоваться критерием Байеса.

	< нормы	норма	> нормы
A	270	220	110
B	210	250	140
C	120	260	280

Ответ   участок В.

7.10. Объем реализации товара Т за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 4 до 7 ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара Т равна 5 ден. Ед. Если заранее запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса в рассматриваемый период, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на заказ и доставку товара в размере 4 ден. ед. за одну единицу товара. При этом предполагается, что дополнительно заказанный товар доставляется и полностью реализуется в тот же период времени. Если же запасенный заранее товар полностью реализовать не удается, то расходы на содержание и хранение остатка в рассматриваемом периоде составят 3 ден. ед. за единицу товара. На основе анализа платежной матрицы по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\gamma = 0,7$) высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара Т на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом возможной прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка.

Ответ   Вальда 4ед.; Сэвиджа 6ед.; Гурвица 4ед.

7.11.Определить в следующих биматричных играх все ситуации равновесия по Нэшу и оптимальных по Парето

$$\text{а)}\ \begin{bmatrix} (1,5) & (3,2) & (4,4) \\ (0,3) & (4,1) & (7,4) \end{bmatrix};$$

$$\text{б)}\ \begin{bmatrix} (3,1) & (8,4) & (-1,2) \\ (4,2) & (0,1) & (2,3) \\ (1,2) & (2,3) & (3,4) \end{bmatrix}.$$

Ответ а) Равновесия по Нэшу : (1,1), (2,3) ; оптимальные по Парето: (1,1), (2,3).
б) Равновесия по Нэшу : (1,2), (3,3) ; оптимальные по Парето: (1,2) .

7.12. Для заданной биматричной игры определить ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях

$$\begin{pmatrix} (2,3) & (1,4) \\ (1,5) & (3,2) \end{pmatrix}.$$

Ответ $x = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right),\ y = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$