

ПРИМЕР 1.4.1.

1) Вычислить интеграл

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 4 \leq y \leq 6\}$.

Записывая интеграл в виде повторного, вычисляем его

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x} dy = \int_1^e \left(\frac{1}{x} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=4}^{y=6} \right) dx = \\ &= \int_1^e \frac{10}{x} dx = 10 \ln x \Big|_1^e = 10 \ln e = 10. \end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл

$$\iint_D x e^{xy} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$.

Если записать интеграл в виде повторного

$$\iint_D x e^{xy} dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 x e^{xy} dx,$$

то мы видим, что интеграл по x требует применения формулы интегрирования по частям, и только потом мы будем вычислять интеграл по переменной y . Запишем интеграл в виде повторного следующим образом

$$\iint_D x e^{xy} dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 x e^{xy} dy.$$

Мы видим, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух простых определенных интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_2^3 x e^{xy} dy &= \int_0^1 e^{xy} \Big|_{y=2}^{y=3} dx = \int_0^1 (e^{3x} - e^{2x}) dx = \\ &= \left(\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вычисление двойного интеграла по криволинейной области.

ПРИМЕР 1.4.2.

1) Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

В данном примере (рис. 4.4,а) замкнутая область интегрирования G задается неравенствами

$$G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y\}.$$

Мы видим, что если интегрировать сначала по y , а потом по x , то область G придется разбить на две области:

$$G_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

$$G_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

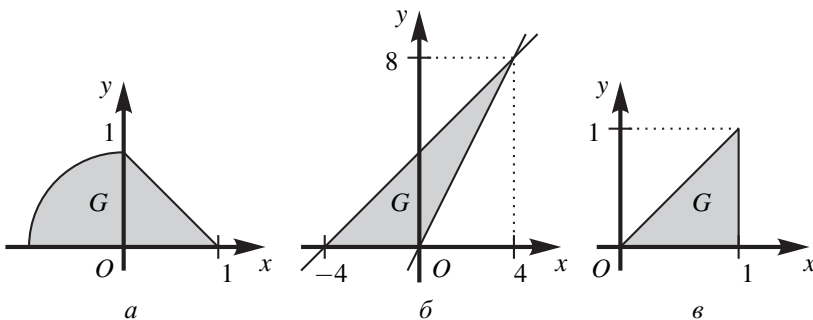


Рис. 4.4

Но тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dy &= \iint_G f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл $\iint_G xy dx dy$, где G — область, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = x + 4$, $x = 0$ (рис. 4.4,б).

Мы видим, что удобнее интегрировать сначала по y , а затем по x , так как в противном случае придется рассматривать два повторных интеграла. Имеем

$$\begin{aligned}\iint_G xy dx dy &= \int_0^4 dx \int_{2x}^{x+4} xy dy = \int_0^4 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2x}^{y=x+4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 (8x^2 + 16x - 3x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{3}{4}x^4 \right) \Big|_0^4 = \frac{160}{3}.\end{aligned}$$

3) Вычислить интеграл $\iint_G y^2 \cos xy dx dy$, где область G ограничена линиями $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 4.4,в).

В данном примере область устроена одинаково просто для перехода к повторному интегралу в любом порядке, но если вначале интегрировать по y , то придется дважды использовать формулу интегрирования по частям. В повторном интеграле удобнее вначале брать интеграл по x . Имеем

$$\begin{aligned}\iint_G y^2 \cos xy dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^1 y^2 \cos xy dx = \\ &= \int_0^1 y \sin xy \Big|_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 y \sin y dy - \int_0^1 y \sin y^2 dy.\end{aligned}$$

Первый интеграл возьмем по частям,

$$u = y, \quad du = dy, \quad dv = \sin y dy, \quad v = -\cos y.$$

Поэтому

$$\int_0^1 y \sin y dy = -y \cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos y dy = -\cos 1 + \sin 1.$$

Второй интеграл берется заменой

$$y^2 = t, \quad y dy = \frac{1}{2} dt, \quad y = 0 \rightarrow t = 0, \quad y = 1 \rightarrow t = 1.$$

Имеем

$$\int_0^1 y \sin y^2 dy = \int_0^1 \sin t dt = -\frac{\cos t}{2} \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos 1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\iint_G y^2 \cos xy dx dy = \sin 1 - \cos 1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos 1}{2} = \sin 1 - \frac{1 + \cos 1}{2}.$$

ПРИМЕР 1.5.1. Вычислить интеграл

$$\iint_G x dx dy,$$

где G — область, ограниченная прямыми $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x + y = 1$, $x + y = 2$ (рис. 4.6,а).

Перейдем к новым координатам

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = x + y.$$

Тогда $x = \frac{u}{1+v}$, $y = \frac{uv}{1+v}$.

Области $G \subset xOy$ будет соответствовать прямоугольник $\Omega = \{(u, v): 1/2 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\} \subset uOv$. Действительно, при отображении областей границы переходят в границы. Прямым $y = x/2$ и $y = 2x$ в плоскости xOy соответствуют прямые $u = 1/2$ и $u = 2$ в плоскости uOv , прямым $x + y = 1$ и $x + y = 2$ соответствуют прямые $v = 1$ и $v = 2$ (рис. 4.6,б).

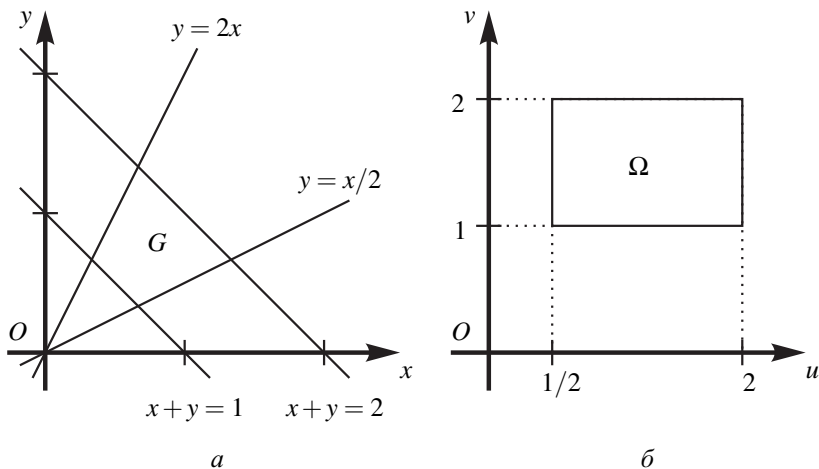


Рис. 4.6

Вычисляем якобиан.

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Применяя формулу замены переменных, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \iint_G x dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{u}{1+v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \iint_{\Omega} \frac{u^2}{(1+v)^3} du dv = \\ &= \int_1^2 dv \int_{1/2}^2 \frac{u^2}{(1+v)^3} du = \left(-\frac{1}{2(1+v)^2} \Big|_1^2 \right) \cdot \left(\frac{u^3}{3} \Big|_{1/2}^2 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{18} \right) \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{24} \right) = \frac{49}{96}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.5.2.

1) Вычислить интеграл

$$\iint_G x dx dy,$$

где $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2x\}$ — круг (рис. 4.8, а).

Имеем $G = \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ — круг, касающийся оси Oy в точке $O(0, 0)$, с центром в точке $(1, 0)$. Ясно, что при переходе к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, мы имеем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $r \leq 2 \cos \varphi$. Последнее неравенство получается из неравенства $y^2 + x^2 \leq 2x$, так как

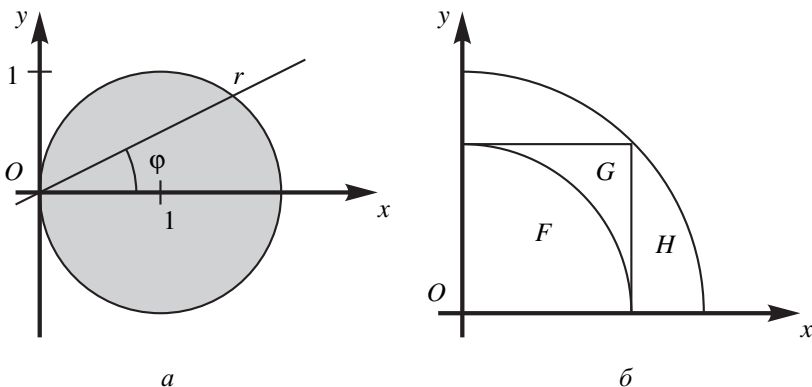


Рис. 4.8

$x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G x dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi dr = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

2) Вычислим интеграл Пуассона. Покажем, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Напомним, что интеграл по неограниченному полуинтервалу $[0, \infty)$ понимается следующим образом

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx,$$

если предел существует.

Рассмотрим области (рис. 4.8, б)

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}; \\ G &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}; \\ H &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2R^2\}. \end{aligned}$$

Ясно, что $F \subset G \subset H$ и что

$$\iint_F e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_H e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Интегралы по F и H легко (вычисляются переходом к полярным координатам)

$$\begin{aligned} \iint_F e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^R e^{-r^2} d(r^2) = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\iint_H e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

Интеграл по G запишем в виде повторного и получим

$$\begin{aligned} \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^R dx \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Подставим вычисленные интегралы в двойное неравенство для интегралов. Получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{R^2}} \leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2R^2}}.$$

Устремляя в этом двойном неравенстве R к бесконечности, получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т. е.,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) Иногда бывает удобно использовать обобщенные полярные координаты $x = a \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$, где a и b — некоторые положительные постоянные.

Якобиан для данной системы функций равен $J = abr$. (Проверьте это).

Вычислим интеграл

$$\iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}} dx dy,$$

где область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, т. е.

$$G = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}.$$

Сделаем замену переменных $x = 4r \cos \varphi$, $y = 5r \sin \varphi$, $|J| = 20r$. Тогда из $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1$ следует $r^2 \leq 1$, т. е. $r \leq 1$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2} 20r dr = \\ &= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2} d(25 - r^2) = -20\pi \cdot 2 \cdot \left. \frac{(25 - r^2)^{3/2}}{3} \right|_0^1 = \\ &= \frac{40}{3} \pi (25^{3/2} - 24^{3/2}) = \frac{40}{3} \pi (125 - \sqrt{24^3}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.6.1.

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 4.9,а)

$$y^2 = 4 + x, \quad x + 3y = 0.$$

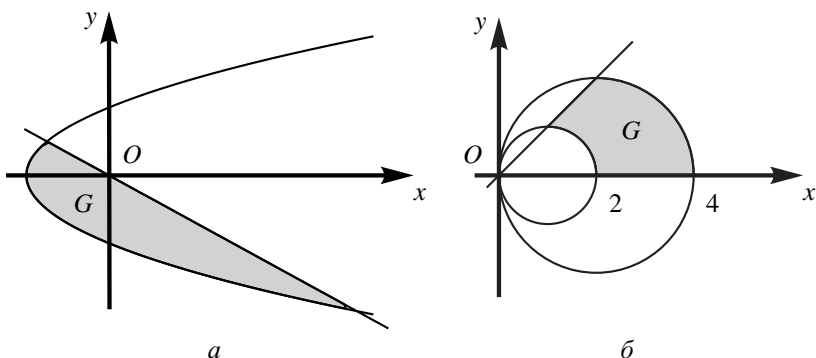


Рис. 4.9

Из рис. 4.9,а видно, что при переходе к повторному интегралу удобнее вначале интегрировать по x , а затем по y . Если же выбрать обратный порядок интегрирования, то придется рассматривать сумму двух повторных интегралов.

Вычисляем

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_G dx dy = \int_{-4}^1 dy \int_{y^2-4}^{-3y} dx = \int_{-4}^1 (4 - 3y - y^2) dy = \\
 &= \left(4y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 4.9,б)

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = 0, \quad y = x.$$

Здесь удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_G dx dy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi}{2} d\varphi = 6 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\
 &= 2 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{3(\pi + 2)}{4}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.6.2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+z=-2, \quad x+z=2, \quad x^2+y^2=1.$$

Ясно, что проекция тела на плоскость xOy есть круг

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

В этом примере $\varphi(x, y) = -2 - x$, $\psi(x, y) = 2 - x$. По формуле для вычисления объемов получаем

$$v = \iint_G [(2-x) - (-2-x)] dx dy = 4 \iint_G dx dy = 4 \cdot S = 4\pi,$$

где $S = \pi$ — площадь круга G .

ПРИМЕР 1.6.3. Найти площадь части гиперболического параболоида $xy = z$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$), вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 8$.

Для $(x, y) \in G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0\}$ имеем

$$\sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

При вычислении площади поверхности перейдем к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J| = r,$$

$$\begin{aligned} s &= \iint_G \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} d(1 + r^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.6.5. Найти координаты центра тяжести пластины из предыдущего примера.

Имеем

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad \rho(x, y) = xy.$$

Как мы уже нашли,

$$m = \frac{1}{12}.$$

Найдем статистические моменты G относительно осей координат

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_G x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2 y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left. y^2 \right|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_G xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy^2 dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \left. y^3 \right|_0^{x^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Отсюда находим координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{14} : \frac{1}{12} = \frac{6}{7}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{24} : \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, точка $C\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{2}\right)$ — центр тяжести пластины G .

ПРИМЕР 1.6.6. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластины G , ограниченной линиями

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Однородность G означает, что плотность постоянна, т. е.

$$\rho(x, y) = \rho_0$$

при всех $(x, y) \in G$, где $\rho_0 > 0$ — постоянное число. По формуле находим

$$\begin{aligned} I_x &= \rho_0 \iint_G y^2 dx dy = \rho_0 \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} y^2 dy = \\ &= \frac{\rho_0}{3} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^3 dx = -\frac{2}{9}\rho_0 \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^3 d\left(3 - \frac{3}{2}x\right) = \\ &= -\frac{2}{9}\rho_0 \frac{1}{4} \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^4 \Big|_0^2 = \frac{9}{2}\rho_0. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.7.1.

1) Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V y^2 z \sin(xyz) dv,$$

где V — параллелепипед,

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Здесь удобнее расставить порядок интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dy \int_0^1 dz \int_0^1 y^2 \sin(xyz) dx = \\ &= \int_0^2 dy \int_0^1 -y \cos(xyz) \Big|_{x=0}^{x=1} dz = \int_0^2 dy \int_0^1 (y - y \cos(yz)) dz = \\ &= \int_0^2 (yz - \sin(yz)) \Big|_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^2 (y - \sin y) dy = \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \cos y \right) \Big|_0^2 = 1 + \cos 2. \end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V y \cos(x+z) dv,$$

где V — область, ограниченная цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Сведем интеграл I к двойному согласно теореме.

$$I = \iint_G \left(\int_0^{\pi/2-x} y \cos(x+z) dz \right) dx dy,$$

где

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

— проекция тела V на плоскость xOy . Вычисляем интеграл по z , а затем —

двойной интеграл по G .

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_G y \left(\sin(x+z) \Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} \right) dx dy = \iint_G y(1 - \sin x) dx dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} dy \int_{y^2}^{\pi/2} y(1 - \sin x) dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \left[(x + \cos x) \Big|_{y^2}^{\pi/2} \right] dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(\frac{\pi}{2} y - y^3 - y \cos y^2 \right) dy = \left(\frac{\pi}{4} y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos y^2 dy^2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.7.2. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Переходим к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$|J| = r$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Поясним последнее неравенство. Проекцией V на плоскость xOy будет круг

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Область V задается неравенствами $\frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2$ при $(x, y) \in G$. Подставляя в неравенства цилиндрические координаты, мы и получаем $\frac{r^2}{2} \leq z \leq 2$. Итак,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^2 r^2 \cdot r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 d\varphi = 2\pi \cdot \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{16}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.7.3. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

где V — это шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$.

Выделяя полный квадрат по y , видим, что V — это шар

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$$

радиуса $R = 1/2$ с центром в точке $C(0, 1/2, 0)$. Подставим выражение x, y, z через сферические координаты в неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$. Получим $r^2 \leq r \sin \varphi \sin \theta$, или, $r \leq \sin \varphi \sin \theta$. Мы получили задание нашего шара в сферических координатах. Ясно, что $0 \leq r \leq \sin \varphi \sin \theta$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Вычисляем интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \varphi \sin \theta} r \cdot r^2 \sin \theta dr = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{\sin \varphi \sin \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cdot \sin^5 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \int_0^\pi [-(1 - \cos \theta)^2] d\cos \theta = \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1 + \cos 4\varphi}{8} \right) d\varphi \times \\ &\quad \times \int_0^\pi (1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\cos \theta = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\varphi}{4} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{8} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Big|_0^\pi \times \\ &\quad \times \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{\cos^5 \theta}{5} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{40}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.7.4. Вычислить объем тела V , ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тело V ограничено снизу конусом $x = \sqrt{x^2 + y^2}$, а сверху — параболоидом $z = 6 - x^2 - y^2$. Вычислять объем здесь удобнее с использованием цилиндрических координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad |J| = r,$$

$$v = \left(\iiint_V dx dy dz = \iiint_{\Omega} r dr d\varphi dz. \right.$$

Из $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ следует, что $6 - r^2 = r$, или $r^2 + r - 6 = 0$. Отсюда находим $r = 2$ — уравнение окружности ($x^2 + y^2 = 4$) — границы области G — проекции V на плоскость xOy . Переходим к повторному интегралу в цилиндрических координатах и вычисляем объем

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr =$$

$$= 2\pi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi.$$

ПРИМЕР 1.7.5.

1) Вычислить массу тела V , ограниченного поверхностями $2x + z = 4$, $x + z = 2$, $y^2 = 2x$ ($y > 0$), если плотность $\rho(x, y, z) = y$.

Вычисляем

$$m = \iiint_V y dx dy dz = \iint_G \left(\int_{2-x}^{4-2x} y dz \right) dx dy = \iint_G y(2-x) dx dy,$$

где G — проекция V на плоскость xOy . Вычисляем двойной интеграл

$$m = \iint_G y(2-x) dx dy = \int_0^2 f dy \int_{y^2/2}^2 y(2-x) dx =$$

$$= \int_0^2 y \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{y^2/2}^2 dy = \int_0^2 y \left(2 - y^2 + \frac{y^4}{8} \right) dy =$$

$$= \left(y^2 - \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{48} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

2) Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 4x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Однородность означает, что плотность $\rho(x, y, z) = \rho_0$ — постоянная величина.

Для вычисления интеграла $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy dz$ используем цилиндрические координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $|J| = r$. Тогда

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr \int_0^{2\sqrt{r\cos\varphi}} r^2 \rho_0 dz = \\
 &= 2\rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^{2/7} \sqrt{\cos\varphi} dr = \\
 &= \frac{4}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos\varphi} \left(r^{9/2} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{2^{13/2}}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2^{13}}}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^2 d\sin \varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{2^{13}}}{9} \rho_0 \left(\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi + \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2^{21}}}{135} \rho_0.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.1.2. Вычислим интеграл

$$\int_{\Gamma} xy dl,$$

где $\Gamma: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

Найдем сначала dl .

$$dl = \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

По теореме 2.1.3 имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} xy dl &= \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \left| \begin{array}{l} 1 + 4t^2 = s^2 \\ 4t dt = s ds \\ t = 0 \rightarrow s = 1 \\ t = 1 \rightarrow s = \sqrt{5} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{5}} \frac{s^2 - 1}{4} s^2 ds = \frac{1}{16} \int_1^{\sqrt{5}} (s^4 - s^2) ds = \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{35\sqrt{5} + 1}{120}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим различные способы задания кривой на плоскости xOy и получающиеся соответствующие формулы для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода.

Если кривая Γ есть график функции $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, то за параметр можно взять переменную x . Тогда $dl = \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$ и мы получаем

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

ПРИМЕР 2.1.3. *Вычислить интеграл*

$$\int_{\Gamma} y dl,$$

где $\Gamma: y = e^x$, $0 \leq x \leq \ln \sqrt{3}$.

Вычисляем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dl &= \int_0^{\ln \sqrt{3}} e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = \operatorname{tg} t \\ e^x dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \ln \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} t \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt = - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^{-4} t d \cos t = \\ &= \frac{1}{3 \cos^3 t} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^3 \pi/3} - \frac{1}{\cos^3 \pi/4} \right) = \\ &= \frac{1}{3} (8 - 2\sqrt{2}) = \frac{2(4 - \sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.1.4. *Вычислить интеграл*

$$\int_{\Gamma} x dl,$$

где $\Gamma: r = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Вычисляем dl

$$dl = \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi.$$

Поскольку $0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \frac{\varphi}{2} \geq 0$ и, следовательно, $dl = 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$. По-

этому

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} x dl &= \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \cos \varphi \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) d\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin \frac{\varphi}{2} = t \\ \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2 dt \\ \varphi = 0 \rightarrow t = 0 \\ \varphi = \pi \rightarrow t = 1 \end{array} \right| = 8 \int_0^1 (1 - t^2)(2 - 2t^2 - 1) dt = \\ &= 8 \int_0^1 (1 - 3t^2 + 2t^4) dt = \frac{16}{5} = 3, 2.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.1.6. Длина одного витка витой линии $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, как следует из предыдущего примера, есть величина

$$\int_{\Gamma} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 1} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + 1}.$$

ПРИМЕР 2.1.7. Найти массу кривой

$$\Gamma : y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8},$$

если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Если $M(x, y)$ — точка на кривой Γ , то $\rho(x, y) = x^2$. Поэтому

$$\begin{aligned}m &= \int_{\Gamma} x^2 dl = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + x^2} x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 \\ x dx = t dt \\ x = \sqrt{3} \rightarrow t = 2 \\ x = \sqrt{8} \rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{27 - 8}{3} = \frac{19}{3} \text{ кг}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.2.1. 1) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} x dx - y dy,$$

где $\Gamma : x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, точка $A(a, 0)$ — начало Γ .

Используя теорему 2.2.2, вычисляем

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} x dx - y dy &= \int_0^{\pi/2} [a \cos t (-a \sin t) - b \sin t \cdot b \cos t] dt = \\ &= -(a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = -(a^2 + b^2) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^2 + b^2}{2}.\end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} y dx - x dy,$$

где $\Gamma: y = \ln x, 1 \leq x \leq e$. Начало Γ — точка $A(1,0)$. Здесь за параметр удобно взять x и тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dx - x dy &= \int_1^e \left[\ln x - x \cdot \frac{1}{x} \right] dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx - (e-1) = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} - (e-1) = \\ &= e - e + 1 - e + 1 = 2 - e. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.2.6. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} xy dx + y^2 dy + (x-z) dz,$$

где $\Gamma: x=t, y=t^2, z=t^3, 0 \leq t \leq 1$, и точка $A(0,0,0)$ — начало кривой Γ , а $B(1,1,1)$ — конец. Согласно формуле получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy dx + y^2 dy + (x-z) dz &= \int_0^1 [t^3 + t^4 \cdot 2t + (t-t^3) \cdot 3t^2] dt = \\ &= \int_0^1 (4t^3 - t^5) dt = \left(t^4 - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.2.10. 1. Найти работу, совершаемую силой

$$\vec{F} = \{\cos^3 x, y\}$$

вдоль дуги линии $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ от точки $A(0,0)$ до точки

$B(\frac{\pi}{2}, 1)$. Согласно формуле, вычисляем

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma} \cos^3 x dx + y dy = \int_0^{\pi/2} [\cos^3 x + \sin x \cdot \cos x] dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x + \sin x) d \sin x = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

2. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F} = \{x^2, y, z^2\}$ вдоль дуги Γ : $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$, от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(1, 1, 1)$. Применяя формулу для вычисления работы, находим

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma} x^2 dx + y dy + z^2 dz = \int_0^1 (t^2 + t^2 \cdot 2t + t^6 \cdot 3t^2) dt = \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^3 + 3t^8) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$