

№ 3782

**53
М 55**

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Лабораторный практикум

**НОВОСИБИРСК
2009**

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Лабораторный практикум по физике для студентов
1-го и 2-го курсов всех факультетов и форм обучения

УДК 531+536](076.5)
М 55

Составители:

д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Г. Дубровский*,
д-р тех. наук, проф. *А.А. Корнилович*,
канд. физ.-мат. наук, доц. *И.И. Суханов*,
канд. физ.-мат. наук, доц. *И.Б. Формусатик*

Рецензент канд. пед. наук, доц. *Л.П. Панасенко*

Работа подготовлена на кафедре прикладной и теоретической физики

МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Лабораторный практикум

Редактор *Т.П. Петроченко*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Подписано в печать 30.12.2009. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 500 экз.
Уч.-изд. л. 4,41. Печ. л. 4,75. Изд. № 193. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

© Новосибирский государственный
технический университет, 2009

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

1. Лабораторная установка

В лабораторной работе измеряется время соударения τ двух одинаковых стальных шаров, подвешенных на проводящих нитях.

Цель лабораторной работы: провести многократные измерения времени соударения шаров, исследовать статистическое распределение времени соударения (построить гистограмму, описать её).

Измерительная установка включает кнопку «Сеть» на передней панели цифрового микросекундомера *МС*. Кнопку «Выбор работы» необходимо переключить в положение «Соударение шаров». Кнопка «Пуск» стирает предыдущее показание на индикаторе микросекундомера и переводит его в готовность к следующему измерению. Шар 1 (рис. 1) отводят в сторону до соприкосновения с ограничителем 2, при этом шар поднимается. Затем шар 1 отпускают. При движении шар соударяется со вторым, свободно висевшим шаром 3, через шары электрическая цепь замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряют микросекундомером.

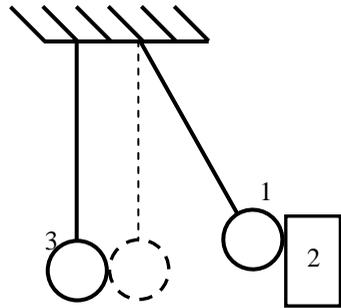


Рис. 1

Таблица измерений. Результаты многократных измерений следует представить в виде табл. 1. Здесь № – порядковый номер измерения, τ – измеренное время соударения в микросекундах. При полном числе измерений $N = 50$, как в данной работе, результаты удобно расположить в виде пяти столбцов по 10 измерений.

Таблица 1

№	τ (10^{-6} с)	№	τ (10^{-6} с)	
1		11		...
2		12		
3		⋮		
⋮		⋮		
9		19		
10		20		

В последующих лабораторных работах студент может самостоятельно выбрать форму таблицы измерений, например, записывать результаты по строкам или по столбцам, добавлять ячейки в таблицу для записи промежуточных и окончательных расчётов.

2. Математическая обработка результатов измерений

В данной лабораторной работе измеряемая величина обозначается двояко: τ (собственно время соударения) и x (всякая измеряемая величина).

Многократные измерения проводятся одно за другим, последовательно. Поэтому в табл. 1 результаты упорядочены по моменту измерения (не путать с длительностью соударения τ !). Нашей следующей задачей будет показать распределение результатов *по величине*. Однако привычный графический способ сравнения величин – нанести точки на числовую ось – становится не слишком наглядным, когда точек много.

Гистограмма (пример) – графический способ представления распределения большого числа данных. Предположим, что произведено N измерений времени соударения шаров, как говорят, получена *выборка* N измерений (из *генеральной совокупности* бесконечного числа измерений). Среди измеренных значений есть τ_{\min} и τ_{\max} . Пусть, например, $\tau_{\min} = 110,6$ мкс, $\tau_{\max} = 112,0$ мкс. Разобьем промежуток $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ на $k \approx \sqrt{N}$ интервалов. При $N = 50$ возможные значения $k = 6, 7$ или 8 . Рекомендуется выбирать нечётное число. Выберем $k = 7$. Ширина интервала

$$b = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{k}.$$

В нашем случае $b = (112,0 - 110,6)/7 = 0,2$ мкс. Нарисуем таблицу расчётов гистограммы (табл. 2). Здесь первый столбец – порядковый номер m интервала от 1 до $k = 7$. Второй столбец – границы интервалов, левая и правая.

Таблица 2

m	Границы интервалов	N_m	Относительная частота $P_m = N_m/N$
1	$\tau_{\min} = 110,60, \tau_{\min} + b = 110,80$	4	0,08
2	$\tau_{\min} + b, \tau_{\min} + 2b$	10	0,2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$\tau_{\min} + 6b, \tau_{\max}$	2	0,04

В промежуточных расчётах необходимо брать 1–2 запасные значащие цифры по отношению к цене деления прибора. Цена деления микросекундомера 0,1 мкс, поэтому величину b следует округлять до 0,001 мкс, а границы интервалов – до 0,01 мкс. Именно так в табл. 2 записаны численные значения границ первого интервала.

Подсчитаем число измерений N_m , попавших в m -й интервал ($1 \leq m \leq 7$), т. е. выберем в табл. 1 значения τ , лежащие между левой и правой границами данного интервала. Если результат измерения попал точно на границу, его следует относить всегда к левому либо всегда к правому интервалу.

Пусть, например, в 1-й интервал, между τ_{\min} и $\tau_{\min} + b$ попало 4 измерения, во 2-й – 10 и т. д. Запишем значения N_m в 3-й столбец табл. 2. При этом необходимо проверить, что сумма всех N_m равна полному числу измерений N . Подсчитаем относительную частоту попадания в m -й интервал $P_m = N_m/N$ для каждого интервала и запишем все их в четвертый столбец таблицы. Сумма всех частот равна единице:

$$P_1 + \dots + P_7 = \frac{N_1}{N} + \dots + \frac{N_7}{N} = \frac{N_1 + \dots + N_7}{N} = 1.$$

Мы все результаты измерений распределили по интервалам. Можно сказать, что вероятность попадания результата измерений в какой угодно интервал промежутка $\tau_{\min}; \tau_{\max}$ равна единице. Поэтому относительную частоту P_m называют эмпирической, т. е. опытной, вероятностью попадания результата измерений в m -й интервал.

Построим гистограмму. По горизонтали – ось измеряемой величины τ , по вертикали – ось эмпирической вероятности $P_m = N_m/N$ (рис. 2). Над каждым интервалом строим прямоугольник высотой P_m (ширина прямоугольника равна b). Гистограмма, представляющая собой ступенчатый график относительной частоты, наглядно показывает распределение результатов измерений.

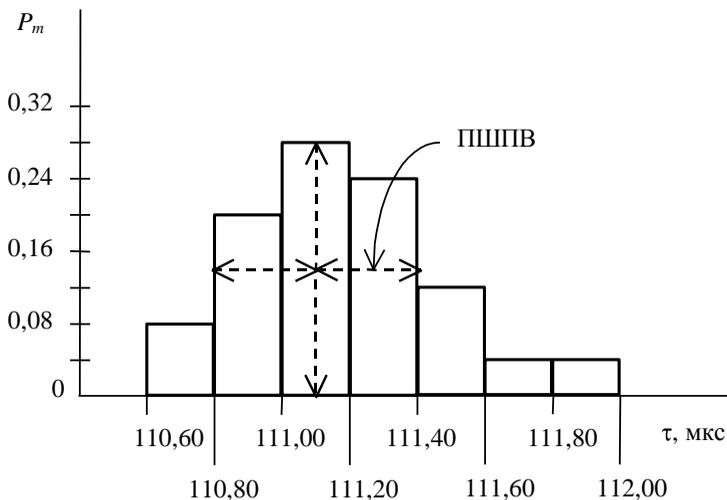


Рис. 2

Основные понятия теории измерений. Целью измерений является получение количественной информации об измеряемой физической величине, об её истинном значении $x_{ист}$. В метрологической практике истинным для данного измерительного прибора считают значение, измеренное более точным прибором.

Из-за множества причин измеренное значение x может не совпадать с $x_{ист}$. Следовательно, любые результаты измерений дают нам не точное значение $x_{ист}$, а лишь его оценку.

Меры погрешности. Абсолютная погрешность Δ (другие обозначения – Δx или Δ_x) – это отклонение измеренного значения от истинного:

$$\Delta = x - x_{ист}.$$

В единичном измерении Δ может иметь произвольный знак. *Относительная погрешность* δ (другие обозначения – δx или δ_x) – это отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} \approx \frac{\Delta}{x} \quad \text{или} \quad \delta \% = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} 100 \% . \quad (1)$$

Виды погрешностей. По характеру изменения и причинам возникновения погрешности можно разбить на три класса: *систематические, случайные и грубые (промахи, выбросы)*.

Систематические погрешности Δ_C (causal – причинный) постоянны для всей серии измерений или определённым образом зависят от условий измерения (времени, координаты, силы тока и т. п.). Причинами возникновения систематических погрешностей являются:

- отклонение параметров реального средства измерений от расчётных значений, например погрешность калибровки микросекундомера, постоянная разность в высоте подвеса шаров, сдвиг шкалы стрелочного прибора (в других лабораторных работах);
- влияние не учитываемых факторов, например посторонней засветки при фотометрических измерениях в оптике.

Обнаружение и учёт систематических погрешностей, устранение причин их возникновения – сложная метрологическая задача.

Случайные погрешности Δ_O (occasional – случайный), непредсказуемо изменяющиеся по величине и знаку от измерения к измерению, возникают в результате действия большого числа независимых неконтролируемых или недостаточно изученных причин. Вследствие этого при постоянных условиях многократных наблюдений одной и той же величины обнаруживается разброс результатов наблюдений. Случайную погрешность, вызванную микроскопическими явлениями, например тепловым движением молекул, можно в какой-то степени уменьшить, но полностью устранить нельзя. К случайному разбросу также приводит и действие большого числа независимо изменяющихся макроскопических причин. Такой разброс, аналогично систематическим погрешностям, можно уменьшить или устранить, расширяя число контролируемых условий и стабилизируя их.

Теоретически столкновение шаров изучается в приближении центрального удара, когда шары движутся вдоль линии, соединяющей их центры масс. *Поэтому в данной лабораторной работе необходимо*

обеспечить стабильность положения и относительной скорости шаров в момент удара. Для этого следует:

- отрегулировать длину проводов так, чтобы центры свободно висящих шаров располагались на одной высоте;
- зафиксировать положение ограничителя 3 (см. рис. 1);
- следить за тем, чтобы шар касался ограничителя в одной и той же точке. Если этого не сделать, то точка контакта шаров будет от удара к удару случайным образом смещаться по горизонтали;
- свободно висящий шар должен быть перед ударом неподвижным.

Одним из основных признаков, по которому изменения измеряемой величины относят к систематическим или случайным, является скорость изменения. Если причина, вызывающая погрешность, изменяется медленно или тем более постоянна, её закономерность может быть выявлена измерениями. Быстрые изменения, не измеримые данным прибором, приводят к непредсказуемым отклонениям результатов измерений. С ростом быстродействия средств измерения переменные погрешности из случайных переходят в разряд систематических.

Грубые погрешности (промахи, выбросы) – аномально большие отклонения результата измерения, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Грубые погрешности возникают при резком однократном кратковременном изменении условий измерения (скачок напряжения в сети), а также из-за однократной ошибки экспериментатора в расчётах или при считывании показаний прибора.

Грубые погрешности обнаруживают с помощью статистических критериев. Результаты, содержащие грубые погрешности, отбрасывают. Такой пример будет рассмотрен ниже.

Теоретическая плотность вероятности. В этом разделе измеряемая величина обозначена буквой x . Эмпирические вероятности $P_m = N_m/N$ зависят от ширины интервала b , что может вызывать затруднения при сравнении гистограмм. Поэтому в математической статистике чаще используют вероятность, приходящуюся на единичный интервал изменения x , называемую *плотностью распределения вероятностей* или просто *плотностью вероятностей*:

$$p = \frac{N_m}{Nb}.$$

Если все ординаты на рис. 2 разделить на ширину интервала b , изменится только вертикальный масштаб гистограммы.

Рассмотрим поведение гистограммы, когда число измерений неограниченно возрастает, следовательно, увеличивается плотность расположения точек на числовой оси x . Поэтому величину b можно уменьшать, всё равно точки в каждый интервал попадут. Огибающая такой преобразованной гистограммы при $N \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0$ (обозначим $b = dx \rightarrow 0$) перейдет в плавную кривую $p(x)$:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ b \rightarrow 0}} \frac{N_m / N}{b} = p(x) = \frac{p(x) dx}{dx}.$$

Отсюда видно, что относительная частота или эмпирическая вероятность $P_m = N_m / N$ переходит в $p(x)dx$ – вероятность попадания результата в интервал $x, x + dx$. Графически это площадь бесконечно узкого прямоугольника со сторонами $p(x)$ и dx (заштрихован на рис. 3). Термин «площадь» в теории функций понимается шире, чем в геометрии: стороны прямоугольника не обязательно измеряются в метрах. Так, в нашем случае величина x , а также dx , τ и b измеряются в секундах, а размерность $[p(x)] = 1/x$, поэтому площадь $p(x) dx$ безразмерна.

Вероятность $P(x_1, x_2)$ попадания результата в конечный интервал $[x_1, x_2]$ находят интегрированием плотности распределения:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Она численно равна площади под кривой $p(x)$ на соответствующем интервале $[x_1, x_2]$. Полная площадь под кривой $p(x)$ равна единице как вероятность достоверного события: в какой-то из интервалов результат измерения обязательно попадёт.

В реальных физических экспериментах результат измерений часто определяется суммой не зависящих друг от друга факторов, каждый из которых вносит в сумму незначительный вклад. В пределе сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых принимает зна-

чения, распределённые по так называемому *нормальному закону (распределению Гаусса)*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2)$$

Это замечательное распределение обладает следующими свойствами (рис. 3):

1) существует наиболее вероятное значение x – *мода* распределения:

$$x = p = p_{\max} = \mu;$$

2) отклонения x от μ в обе стороны встречаются одинаково часто: гауссово распределение симметрично относительно μ , поэтому среднее значение \bar{x} равно μ ;

3) чем больше отклонение x от μ , тем реже оно встречается;

4) мерой случайной погрешности, т. е. мерой отклонения x от центра распределения μ , является «сигма» σ – *стандартное* или *средне-квадратичное отклонение* (СКО), которое примерно равно полуширине на полувысоте (ПШПВ) гауссова распределения: $\text{ПШПВ} \approx 1,18\sigma$. (Англоязычный аналог этого термина – *HWHH* – half width on half height);

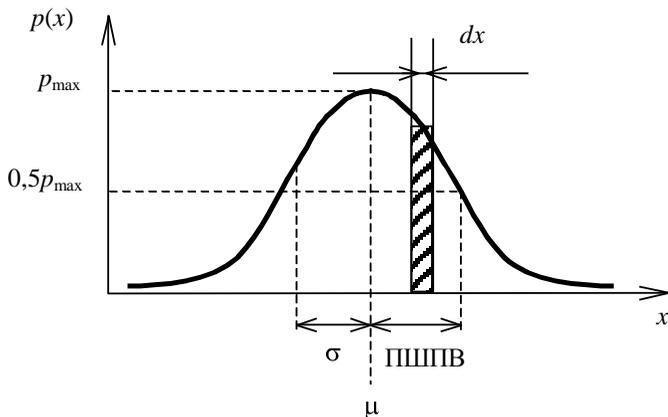


Рис. 3

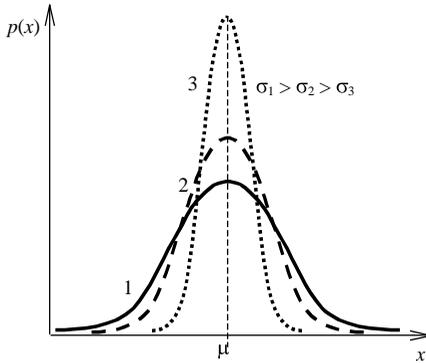


Рис. 4

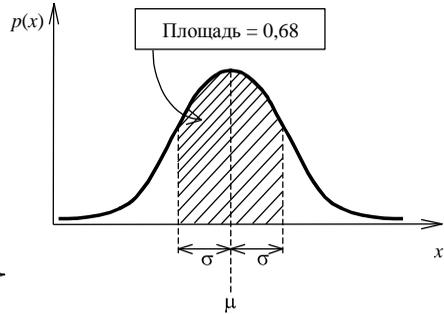


Рис. 5

5) при $\sigma \rightarrow 0$ всё распределение «стягивается» к одному значению $x = \mu$ (рис. 4), которое в отсутствие систематической погрешности и принимается за истинное значение $x_{\text{ист}}$. Следовательно, с точки зрения математической статистики *целью измерений является определение координаты центра распределения $\mu = x_{\text{ист}}$* ;

6) в интервал $\pm\sigma$ вокруг μ попадает примерно 68 % всех результатов измерений (рис. 5), т. е. расстояние между неизвестным центром распределения μ и любым результатом измерений x_k ($k=1\dots N$) не превышает σ с вероятностью $P=0,68$:

$$|x_k - \mu| \leq \sigma, \quad P \approx 0,68. \quad (3)$$

В интервал $\pm 2\sigma$ вокруг центра попадает примерно 95 % всех результатов измерений, а в интервале $\pm 3\sigma$ (его также называют *шестисигмовым интервалом*) заключено 99,73 % всех результатов.

Анализ гистограммы. На рис. 6 показана последовательность получения общего результата измерений. Этапы «Построение гистограммы» и «Расчёт среднего и СКО» независимы, могут выполняться параллельно. Их результаты используются при проверке нормальности распределения.

Возможно удаление грубых погрешностей из выборки с повторением первых этапов.

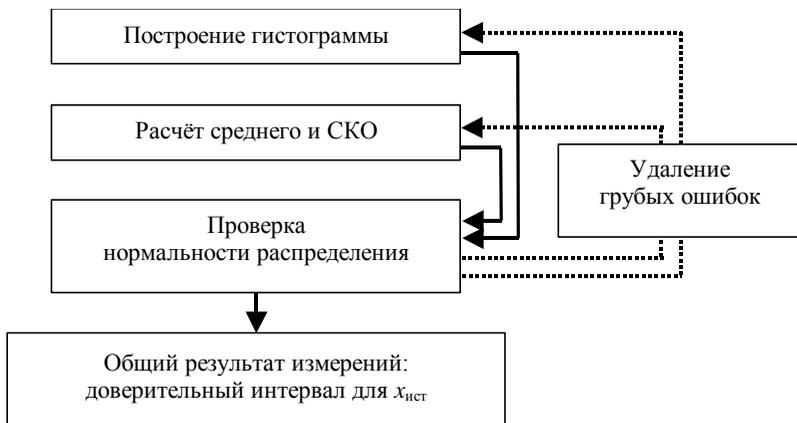


Рис. 6

Расчёт среднего и СКО. Расчётной оценкой центра функции плотности вероятности μ является *выборочное среднее* \bar{x} (т. е. среднее арифметическое значение выборки):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4)$$

Оценкой случайной погрешности σ является *выборочное среднеквадратичное отклонение* s (СКО):

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i - \bar{x}^2}. \quad (5)$$

Многие из инженерных калькуляторов имеют режим статистических вычислений STAT (другие обозначения – SD или σ), существенно упрощающий вычисления по формулам (4), (5). Обозначения используемых функций в этом режиме: *DATA* («ДАННЫЕ») – ввод данных одного за другим; после введения всех данных достаточно нажать кнопку \bar{x} – вывод на индикатор искомого среднего и кнопку σ (другие обозначения – σ_{n-1} , s или s_{n-1}) – вывод на индикатор искомого СКО.

Проверка нормальности распределения – важный этап статистического анализа данных. Формулы (4), (5) применимы только к нормальному распределению. Если выборка не принадлежит нормальной

генеральной совокупности, то, вообще говоря, использовать (4), (5) некорректно.

Мы проведём простейшую оценку нормальности распределения по двум критериям:

- форме гистограммы;
- отношению ПШПВ гистограммы к выборочной СКО.

Форма гистограммы: если огибающая гистограммы симметрична и колоколообразна, пусть даже приближённо, как на рис. 2, – это один из признаков нормального распределения результатов измерений.

Определим ПШПВ гистограммы (штриховые линии на рис. 2). Разделим пополам максимальную высоту гистограммы и обозначим на этом уровне её ширину. Половина этого отрезка и есть полуширина на полувывоте ПШПВ.

Отношение ПШПВ/ σ : если отношение близко к единице, а именно лежит в пределах $0,7 \dots 1,5$, это тоже признак нормального распределения.

Если выполняются оба признака, то результаты измерений подчиняются нормальному закону. Как говорят, нормальное распределение не отвергается. Можно переходить к расчёту общего результата измерений – доверительного интервала.

Если один из признаков отсутствует – нормальное распределение сомнительно. Если не выполняются оба признака – нормальное распределение, как говорят, отвергается. Следует искать причину аномальности результатов.

Например, если гистограмма имеет два максимума (рис. 7), то наиболее вероятная причина – однократное постоянное по величине изменение условий измерения, например, сдвинули ограничитель для шара («один раз уронили микроскоп и продолжили измерения, не проверив его настройку»). В подобной ситуации, вообще говоря, следует повторить серию измерений.

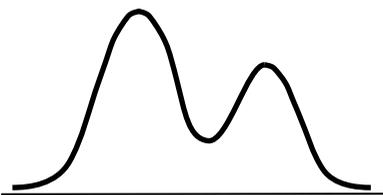


Рис. 7

Наши критерии просты, но приближённые. Математически более сложный, но и более достоверный анализ (например, по критерию χ^2 – «хи-квадрат») в случаях, признанных нами сомнительными, может как подтвердить нормальность, так и отвергнуть [4, 5].

Грубая погрешность. Иногда на гистограмме есть крайний изолированный прямоугольник, содержащий всего одно значение, обязательно минимальное или максимальное (рис. 8).

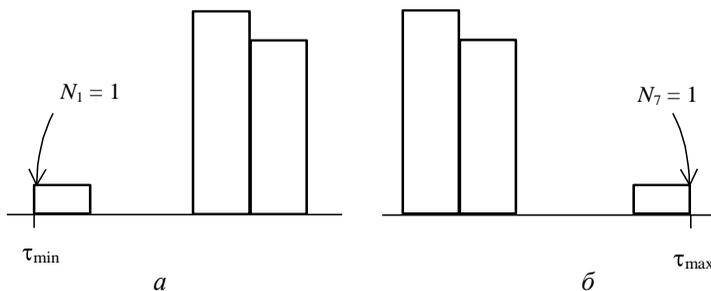


Рис. 8

Возможно, anomalно отклоняющееся значение является грубой ошибкой. Проверить это можно с помощью *правила трёх сигм*. По свойствам нормального распределения в шестисигмовый интервал попадает 99,73 % всех нормально распределённых результатов. На долю отклонений от центра распределения, превышающих 3σ , приходится всего 0,27 % $< 1/300$ от общего числа измерений. Поэтому достоверные сильно отклоняющиеся значения могут появиться при $N > 300 \dots 1000$, а при $N = 50$ они крайне маловероятны. Зато велика вероятность ошибочной записи одного из 50 многозначных чисел или сбоя микросекундомера.

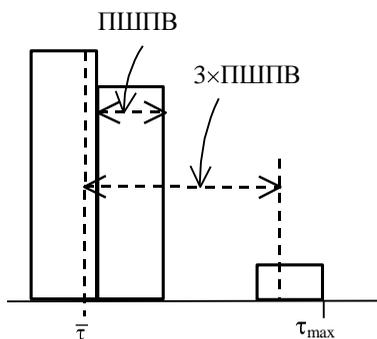


Рис. 9

На горизонтальной оси гистограммы отмечаем среднее значение $\bar{\tau}$ и откладываем от него интервал $3 \times \text{ПШПВ}$ (рис. 9). Если anomalное значение отклоняется от $\bar{\tau}$ больше чем на $3 \times \text{ПШПВ}$, как на рис. 9, его следует считать грубой ошибкой, удалить из выборки в табл. 1 (*зачеркнуть, а не замазать!*) и, найдя новое крайнее значение τ , повторить построение гистограммы. Такая операция называется *цензурированием выборки* и может выполняться в цикле несколько раз, пока не останутся значения, лежащие в пределах $3 \times \text{ПШПВ}$.

3. Общий результат измерений – доверительный интервал

Расчёт общего результата измерений зависит от вида измерений, которые подразделяют на прямые и косвенные, однократные и многократные (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

Измерения	
прямые	однократные
косвенные	многократные

Прямое измерение — это измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных, как, например, при измерении массы на циферблатных весах, температуры термометром, электрического напряжения стрелочным или цифровым вольтметром. С помощью цифрового микросекундомера в данной работе осуществляется прямое измерение интервала времени.

! **Прямое однократное измерение.** *Сведения, изложенные в этом разделе, необходимы для записи результатов всех последующих лабораторных работ.*

Возможна оценка истинного значения $x_{\text{ист}}$ по результату однократного измерения x_1 , если предварительно на данной измерительной установке в одинаковых условиях проведены многократные измерения ($N > 30$), в результате чего СКО σ определено с высокой точностью.

Используем шестое свойство нормального распределения (см. рис. 5): чем шире интервал вокруг центра распределения μ , тем больше результатов измерений в этом интервале. Формулу (3) можно обратить относительно неизвестного центра μ : с вероятностью $P = 0,68$ центр распределения удалён от любого единичного результата измерений x_1 на расстояние, не превышающее σ . Это условие записывают в виде *доверительного интервала* для истинного значения измеряемой величины:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm \sigma; \quad P = 0,68. \quad (6)$$

Аналогично можно записать доверительные интервалы $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 2\sigma, \quad P \approx 0,95; \quad (7)$$

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 3\sigma, \quad P \approx 0,9973. \quad (8)$$

Все три варианта доверительного интервала показаны на рис. 10, причём отрезки σ и кратные ему изображены в масштабе числовой оси измеряемой величины x .

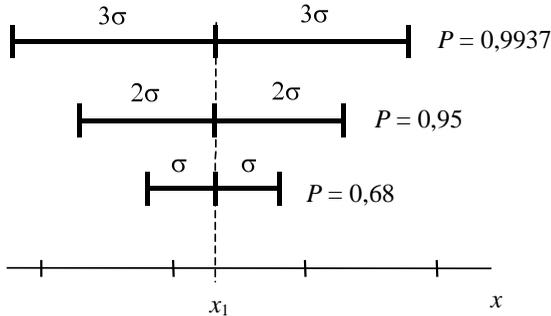


Рис. 10

Вероятность P , с какой истинное значение измеряемой величины может находиться в выбранном доверительном интервале, называется *доверительной вероятностью*. Запись доверительного интервала без указания доверительной вероятности неполна.

Доверительные интервалы (6)–(8) можно объединить в общую формулу с коэффициентом $t(P)$ при σ :

$x_{\text{ист}} = x_1 \pm t(P)\sigma, \quad P = \dots$ $P = 0,68, \quad t = 1,$ $P = 0,95, \quad t = 2,$ $P = 0,9973, \quad t = 3$	(9)
--	-----

Чем больше доверительная вероятность, тем шире должен быть доверительный интервал вокруг измеренного значения, тем больше коэффициент $t(P)$. По таблицам в [2, 3] можно выбрать значения P , отличающиеся от приведённых в (9), и соответствующие им значения $t(P)$.

Метрологические нормативные документы рекомендуют записывать результат измерений для $P \geq 0,9$. Поэтому проще всего выбрать доверительный интервал $\pm 2\sigma$ для $P = 0,95$.

Допустима форма записи доверительного интервала в виде

$$x_1 - t(P)\sigma \leq x_{\text{ист}} \leq x_1 + t(P)\sigma, \quad P = \dots$$

Трёхкратное измерение. Единичное измерение может оказаться грубой погрешностью. Поэтому для повышения достоверности измерений рекомендуется провести не одно, а три измерения в неизменных условиях и в качестве центра доверительного интервала (9) взять среднее трёх измерений:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{\text{ист}} &= \bar{x} \pm t(P)\sigma, \quad P = \dots \\ \bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \end{aligned}} \quad (10)$$

Среднеквадратичные отклонения измеряемых величин и исходных данных указаны на пояснительных табличках к каждой лабораторной работе.

Если погрешность прямого измерения не указана, она определяется исходя из погрешностей измерительных приборов.

1. Прибор с штриховой шкалой. Принято считать, что для шкалы с интервалом между штрихами 1 мм, рассматриваемой с расстояния наилучшего зрения 250 мм, погрешность отсчета равна 0,3...0,5 цены деления $C_{\text{дел}}$, т. е. в единицах измеряемой величины $\sigma = (0,3...0,5) C_{\text{дел}}$.

2. Погрешность цифрового прибора принимаем равной единице последнего разряда.

Прямые многократные измерения (дополнение *). *Сведения, изложенные в этом разделе, могут быть использованы в данной лабораторной работе для уменьшения погрешности измерений – в дополнительном задании.*

Если СКО измеряемой величины неизвестно, то его можно определить многократными, т. е. повторяющимися в одной и той же неизменной экспериментальной обстановке, измерениями. Этот метод и используется на вводном лабораторном занятии.

С увеличением числа измерений выборочное среднее (4) приближается к моде нормального распределения, а выборочное СКО (5)

стремится к σ . Поэтому, казалось бы, можно по аналогии с (10) записать доверительный интервал

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm t(P)s, \quad P = \dots$$

Однако при любом конечном числе измерений выборочное СКО может оказаться как больше, так и меньше неизвестного σ . Второй случай – самый опасный: при подстановке s вместо σ преуменьшается ширина доверительного интервала, расчётная погрешность оказывается меньше истинной. Заданную доверительную вероятность обеспечивают, расширяя интервал путём замены коэффициентов $t(P)$ на коэффициенты Стьюдента (табл. 4) $t(P, N) > t(P)$.

Таблица 4

N	P				
	0,68	0,9	0,95	0,99	0,997
	t(P, N)				
2	1,84	6,3	12,7	63,6	212,3
3	1,32	2,9	4,3	9,9	182
4	1,20	2,4	3,2	5,8	9,0
5	1,14	2,1	2,8	4,6	6,4
6	1,11	2,0	2,6	4,0	5,4
7	1,09	1,9	2,4	3,7	4,8
8	1,08	1,9	2,4	3,5	4,4
9	1,07	1,9	2,3	3,4	4,2
10	1,06	1,8	2,3	3,2	4,0
15	1,04	1,8	2,1	3,0	3,6
20	1,03	1,7	2,1	2,9	3,4
30	1,02	1,7	2,0	2,8	3,2
50	1,01	1,7	2,0	2,7	3,1

Из таблицы видно, что, например, $t(P=0,95; N) \approx t(P)$ только при $N \geq 30$, т. е. при таком большом числе измерений выборочное СКО s незначительно отличается от σ – СКО генеральной совокупности с бесконечным числом измерений.

С другой стороны, для сужения интервала, т. е. для уточнения оценки $x_{\text{ист}}$, используют свойство среднего значения: выборочное среднее \bar{x} в (4) зависит от суммы случайных нормально распределённых результатов измерений x_k и потому само является случайной нормально распределённой величиной со среднеквадратичным отклонением среднего $\sigma_{\bar{x}}$.

В математической статистике доказывается, что если результаты измерений не зависят друг от друга, то СКО выборочного среднего

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Точное значение σ неизвестно, однако при большом числе измерений $\sigma \approx s$, поэтому

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Видно, что отклонение \bar{x} от μ при больших N уменьшается как $1/\sqrt{N}$. Это означает, что, хотя от измерения к измерению единичные результаты «прыгают» в среднем на σ , разброс выборочных средних от выборки к выборке по N случайных измерений уменьшается с ростом N , что и позволяет сузить доверительный интервал, проводя многократные измерения. Уменьшение случайного разброса путём усреднения многократных измерений широко используется в цифровых приборах.

Используя коэффициенты Стьюдента и переходя к выборочному СКО среднего значения, окончательно запишем доверительный интервал для результата многократных измерений;

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \frac{t(P, N)s}{\sqrt{N}}, \quad P = \dots \quad (11)$$

Важным свойством нормального распределения является вложенность доверительных интервалов: интервал для большего числа измерений целиком вложен в доверительный интервал для меньшего числа измерений (рис. 11). Для аномально распределённых результатов, как, например, на рис. 7, вложенность может нарушаться. Это обстоятельство можно использовать в качестве дополнительной проверки нормальности распределения.

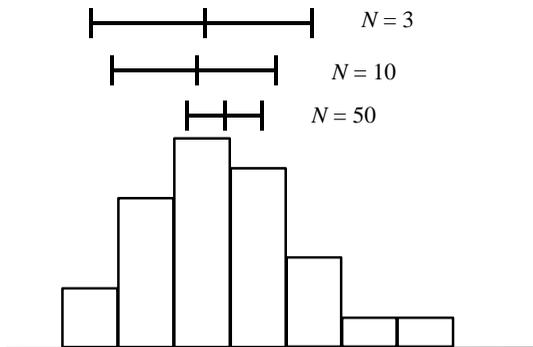


Рис. 11

Косвенное измерение — измерение, при котором значение искомой величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными в прямых измерениях. Если измеряемая величина F связана с непосредственно измеряемыми величинами x, y, z, \dots уравнением $F = F(x, y, z, \dots)$, то величину F вычисляют по указанному уравнению. Примерами косвенных измерений можно назвать определение плотности однородного тела по его массе

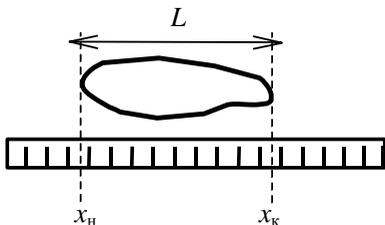


Рис. 12

и геометрическим размерам, определение скорости по длине пройденного пути за некоторый промежуток времени, определение электрического сопротивления проводника по разности потенциалов и силе электрического тока. Даже простое измерение длины тела с помощью линейки является, вообще говоря, косвенным, так как измеряемый размер L вычисляется как разность двух координат —

начальной x_n и конечной x_k , каждая из которых и является непосредственно измеряемой величиной.

Среднее значение косвенно измеряемой величины вычисляется подстановкой средних значений величин, измеренных непосредственно, в уравнение

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (12)$$

Например, средняя длина тела равна $\bar{L} = \bar{x}_k - \bar{x}_n$. В погрешность длины дают вклад погрешности измерения обеих координат, начальной и конечной. Квадрат СКО σ^2 в математической статистике имеет особое название — дисперсия. Для погрешностей нормально распределённых величин справедливо правило суммирования дисперсий:

$$\sigma_L^2 = \sigma_k^2 + \sigma_n^2 \quad (13)$$

Дисперсия сложной функции складывается из частных дисперсий, соответствующих изменению статистически независимых аргументов, подобно тому, как дифференциал сложной функции складывается из частных дифференциалов:

$$\sigma_F^2 = \sigma_{F_x}^2 + \sigma_{F_y}^2 + \sigma_{F_z}^2 + \dots = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots$$

Отсюда СКО функции F

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right)^2 + \dots} \Bigg|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}, \dots} \quad (14)$$

В лабораторных работах часто встречаются рациональные функции

$$F(x, y, z) = \frac{x^\alpha y^\beta}{z^\gamma}.$$

Для них формула (14) упрощается: относительное СКО функции складывается из относительных СКО аргументов с соответствующими показателями степени:

$$\frac{\sigma_F}{F} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \right)^2 + \left(\gamma \frac{\sigma_z}{\bar{z}} \right)^2} \quad (15)$$

В *однократном косвенном измерении* проводят прямые однократные (*лучше трёхкратные*) измерения аргументов функции F . Доверительный интервал для однократного косвенного измерения записывается по формуле (10):

$$F_{\text{ист}} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \pm t P \sigma_F, \quad P = \dots \quad (16)$$

4. Предварительная подготовка к выполнению лабораторных работ

1. Ознакомьтесь с теорией вопроса, изложенной в описании лабораторной работы и в указанной к ней литературе.

2. Найдите ответы на контрольные вопросы: каковы цель эксперимента, принцип действия измерительной установки; какие величины непосредственно измеряются, какие вычисляются, какую зависимость вы должны получить теоретически и исследовать практически в процессе эксперимента.

3. Заготовьте титульный лист отчета о лабораторной работе, второй и третий листы отчёта. Второй лист обычно содержит цель работы, таблицу приборов, исходные данные и рабочие формулы. Рабочие формулы содержат два основных принципиально различных блока: теоретические зависимости, подлежащие исследованию в процессе эксперимента, и расчётные формулы, используемые при косвенных измерениях физических величин, входящих в исследуемые зависимости. Расчётные формулы содержат также формулы для определения погрешностей измеряемых величин. Теоретические зависимости изобразите на небольших эскизах. На третьем листе расположите таблицу измерений.

4. На лабораторном занятии получите у преподавателя разрешение выполнять работу (допуск). Для этого необходимо:

- а) ответить на контрольные вопросы;
- б) уточнить объем измерений и форму таблицы измерений.

5. Оформление результатов лабораторных работ

1. В таблицу приборов для каждого прибора должны быть записаны наименование (например, вольтметр), тип, предел измерений (в единицах измеряемой величины), цена деления (видимая – для цифрового прибора, расчётная – для стрелочного), класс точности прибора и максимальная приборная погрешность.

2. В таблицу результатов измерений первичные данные следует заносить «как вижу», например, в виде числа делений без пересчета в другие единицы, чтобы исключить ошибки при снятии первичных данных. Для последующих промежуточных расчетов рекомендуется предусмотреть в таблице одну или несколько позиций (столбцов).

3. С целью сохранения точности рекомендуется в промежуточных результатах оставлять на 1–2 значащих цифры больше, чем в первичных данных. Значащими цифрами являются все цифры, кроме нулей впереди целой части числа.

4. Окончательное значение измеряемой величины записывают в виде доверительного интервала (10), (11) или (16).

5. Числовой результат следует представлять в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где целое число n – порядок числа a , а основа числа a_0 находится в промежутке $[1, 10]$, например, $e = 1,6021 \cdot 10^{19}$ Кл; $c = 2,9979 \cdot 10^8$ мс⁻¹.

Округление чисел. Известно правило округления: если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю оставляемую цифру не изменяют; если же первая отбрасываемая цифра равна или больше 5, то оставляемую цифру увеличивают на единицу. Однако относительная погрешность округления при этом меняется в слишком широких пределах. Например, округление числа 1,49 до одной значащей цифры [1] даст потерю точности вследствие большой ошибки округления $(1,49 - 1) / 1,49 = 0,33 = 33 \%$. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т. е. указание 0,94 вместо 0,9 может, наоборот, явиться превышением точности, т. е. дезинформацией, так как исходные данные могут и не обеспечивать погрешность расчёта, равную $(0,9 - 0,94)/0,94 \approx 0,043 \approx 4 \%$. Для уменьшения относительной погрешности округления вышеуказанное общее правило дополняют таким: если полученное число начинается с цифры, равной или большей 3, то в нём сохраняется лишь один знак, если же оно начинается с цифр, меньших 3, т. е. с цифр 1 и 2, то в нём сохраняют два знака.

В итоге можно сформулировать три *правила округления* рассчитанного значения погрешности и полученного экспериментального результата измерения.

1. *Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, если первая есть 3 и более.* Тогда погрешность округления не превышает 3,5 %. В соответствии с этим правилом установлены и нормируемые значения относительных погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 % указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6 % указывается лишь один знак.

2. *Значение центра доверительного интервала округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.* Например, результат расчета: $x_1 = 62,7$ с; $\sigma = 4,5$ с. Тогда после округления x_1 до одной значащей цифры получаем $\sigma = 5$, а после округления x_1 до единиц получаем $x_1 = 63$. Окончательная запись результата измерения имеет вид $x = (63 \pm 5)$ с.

3. *Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним-двумя лишними знаками.*

6. Построение графиков

1. График строится на миллиметровой бумаге.

2. По горизонтальной оси обычно откладывают аргумент, а по вертикальной – его функцию. Для проверки теоретических зависимостей подбирают такие переменные, чтобы получить график в виде прямой линии, *линеаризуют* график. Например, график функции $y = ax^2$ можно построить в переменных y, x^2 или \sqrt{y}, x .

3. У осей должны быть проставлены обозначения и единицы размерности соответствующих величин. Масштабы по осям следует выбирать:

а) простыми (0,1 ед/см; 0,5 ед/см и т. д.), чтобы при построении не производить сложных вычислений;

б) масштабы и начала отсчёта по каждой оси должны быть такими, чтобы график занимал как можно большую часть всего листа.

4. Размеры графика (гистограммы) по вертикали и по горизонтали должны относиться друг к другу примерно как 1:1 или 1:1,5, а экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.

5. По осям откладываются только масштабные единицы, а точки с координатами (x, y) , полученными в эксперименте, наносятся на график. Более детально о построении графиков см. в [1].

6. К каждой экспериментальной точке x, y пристраивается доверительный интервал $\pm t\sigma_y$ вдоль оси y . Рекомендуется все доверительные интервалы вычислять при одном и том же значении доверительной вероятности.

7. Если экспериментальных кривых несколько, то возле каждой из них указать условия измерений и доверительную вероятность.

7. Задание к вводу занятию

1. Измерить время столкновения шаров $N = 50$ раз.

2. Построить гистограмму результатов измерений.

3. Графически оценить полуширину на полувисоте (ПШПВ) гистограммы.

4. По формулам (4) и (5) рассчитать выборочные среднее $\bar{\tau}$ и СКО σ_{τ} :

а) для $N = 50$;

б) * дополнительное задание – для любых трёх и десяти результатов измерений.

5. Обозначить среднее \bar{t} на горизонтальной оси времени.

6. Провести, если необходимо, цензурирование выборки.

7. Найти отношение ПШПВ и СКО (для $N = 50$).

8. Сделать вывод, подтверждается или нет нормальное распределение результатов измерений.

9*. Дополнительное задание. Записать доверительный интервал для математического ожидания многократных измерений времени соударения шаров по формуле (11):

а) для $N = 3$; б) для $N = 10$; в) для $N = 50$.

10*. Изобразить на гистограмме полученные доверительные интервалы в виде отрезков, «привязав» их к оси времени.

11*. Сделать вывод о связи числа измерений с точностью определения истинного значения измеряемой величины.

8. Контрольные вопросы к вводному занятию

1. Объясните принцип построения гистограммы.

2. Как относительная частота отображается на гистограмме? Чему равна сумма всех частот?

3. Как по функции плотности вероятности графически определить вероятность попадания результата измерений в интервал $x, x + dx$?

4. Чему равна полная площадь под кривой функции плотности вероятности?

5. Запишите функцию нормального распределения, нарисуйте её график и укажите на графике её характерные параметры: а) моду случайной величины; б) математическое ожидание случайной величины; в) ПШПВ и СКО.

6. Как изменится график функции нормального распределения, если случайная погрешность измерений уменьшится?

7. Чему равна площадь под графиком нормального распределения в пределах: а) $\pm\sigma$ вокруг моды; б) в пределах $\pm 2\sigma$; в) в пределах $\pm 3\sigma$?

8. Что такое правило трёх сигм?

9. Какая выборочная величина является наилучшей оценкой: а) математического ожидания случайной величины; б) среднеквадратичного отклонения?

10. В прямом однократном измерении получен результат x . СКО измерительного прибора σ . Напишите формулу доверительного ин-

тервала для истинного значения измеряемой величины при: а) $P=0,68$; б) $P=0,95$. Что означает равенство $P=0,68$ или $P=0,95$?

11. Напишите формулу для СКО длины σ_L , если СКО начальной и конечной координат размера по шкале равны σ_n и σ_k .

12*. Что такое среднеквадратичное отклонение среднего значения многократных измерений и как оно изменяется с увеличением числа измерений?

13*. Запишите формулу доверительного интервала прямых многократных измерений при: а) $P=0,68$; б) $P=0,95$.

9. Список литературы

1. Холявко В.Н. и др. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

2. ГОСТ 8.207–76 Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. – М., 1977.

3. ГОСТ Р 50779.21–96 Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. – М., 1996. – Ч. 1. Нормальное распределение.

4. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М., 2002.

5. P50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 1. Критерии типа хи-квадрат. – М., 2002.

6. СТ СЭВ 543–77. Числа. Правила записи и округления. – М., 1977.

7. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.

8. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

9. Дополнительная литература: Джиджи К., Де Карло Н., Вильямс Б. Шесть сигм для «чайников». – М.: Вильямс, 2008.

Лабораторная работа № 1

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

В данной работе проводится измерение времени упругого соударения двух одинаковых стальных шаров для нескольких пар шаров различного диаметра.

Цель работы: сравнение экспериментально полученной зависимости времени соударения τ от диаметра шара D с теоретической зависимостью.

1. Описание установки и эксперимента

Два одинаковых металлических шара подвешены на проводящих нитях (см. рис. 1 Вводного занятия). Шар 1 отводят в сторону до соприкосновения с упором и при этом поднимают на высоту h . Затем шар отпускают. При движении шар соударяется со вторым, свободно висевшим шаром, вследствие чего через шары электрическая цепь замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряют микросекундомером и показывают на его индикаторе.

2. Зависимость времени соударения от размера шаров

Упругий удар двух тел. В лабораторной системе отсчета (Л-системе) шар 1, начиная двигаться с высоты $h \approx 0,1$ м, к моменту соударения приобретает скорость \vec{V}_0 . На шар действуют две силы – сила тяжести и сила упругости подвеса. Шар движется по дуге окружности, сила упругости всегда перпендикулярна вектору скорости шара, поэтому её работа равна нулю. Работой сил трения в подвесе можно пренебречь. Поэтому кинетическая энергия шара изменяется только за счёт работы силы тяжести: $|\vec{V}_0| = \sqrt{2gh} \approx 1,4$ м/с.

Из второго закона Ньютона $d\vec{p} / dt = \vec{F}$ получаем определение времени соударения τ :

$$\tau = \frac{|\Delta \vec{p}|}{|\vec{F}_{1,2}|}, \quad (1)$$

где $\left| \overline{\vec{F}}_{1,2} \right|$ – среднее за время соударения значение модуля упругой силы, с которой первый шар действует на второй. По третьему закону Ньютона 2-й шар действует на первый с такой по величине силой, направленной противоположно. Обозначим для краткости это среднее значение буквой $F \equiv \left| \overline{\vec{F}}_{1,2} \right|$.

Из вводного занятия известно, что длительность удара – сотни микросекунд, $\tau \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$ с. Импульс силы тяжести за время удара $|\Delta \vec{p}_G| = mg\tau$ намного меньше импульса первого шара:

$$\frac{mg\tau}{mV_0} = \frac{g\tau}{V_0} \leq \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1,4} \leq 10^{-2}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для силы упругости. Таким образом, импульс внешних сил намного меньше суммарного импульса шаров mV_0 до удара. Силы взаимодействия шаров, внутренние силы этой системы тел, не меняют суммарного импульса шаров в соответствии с третьим законом Ньютона. Следовательно, с погрешностью порядка 1 % суммарный импульс пары шаров при ударе можно считать постоянным. В приближении «мгновенного» ($\tau \rightarrow 0$) удара суммарный импульс группы тел сохраняется, даже если результирующая внешних сил отлична от нуля.

Скорость центра инерции группы тел определяется как суммарный импульс, отнесённый к суммарной массе:

$$\vec{V}_{\text{ц}} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \vec{V}_0 + 0}{2m} = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

Так как суммарный импульс шаров при ударе сохраняется, то сохраняется и скорость центра инерции. Следовательно, систему отсчёта, связанную с центром инерции (СЦИ или Ц-систему), можно в течение удара считать инерциальной. В нерелятивистских инерциальных системах отсчёта приращения скоростей (импульсов), промежутки времени и силы являются инвариантами, поэтому при переходе в Ц-систему все величины в (1) не изменятся. Однако в Ц-системе соударение шаров математически выглядит проще, чем в Л-системе.

Радиусы-векторы материальной точки m в Л- и Ц-системах отсчёта $\vec{r}_Л$ и $\vec{r}_Ц$ связаны через радиус-вектор переноса начала отсчёта $\vec{r}_Ц$, определяющий положение «нового» начала отсчёта в «старой» системе (рис. 1): $\vec{r}_Л = \vec{r}_Ц + \vec{r}_Ц$. Продифференцировав это равенство по времени, получаем преобразование скоростей Галилея: скорость точки $\vec{V}_Ц$ в движущейся Ц-системе равна разности скорости $\vec{V}_Л$ этой точки в неподвижной Л-системе отсчёта и скорости переносного движения $\vec{V}_Ц$ движущейся системы отсчёта относительно неподвижной:

$$\vec{V}_Ц = \vec{V}_Л - \vec{V}_Ц, \quad \vec{V}_Ц = \vec{V}_Ц = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

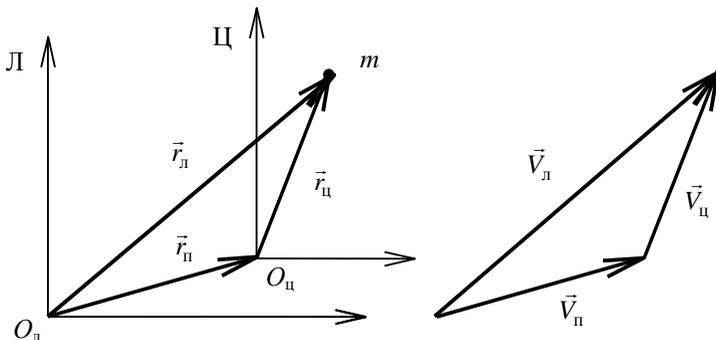


Рис. 1

Применим эту формулу к каждому из шаров. Для первого шара до удара скорость в Ц-системе равна $\vec{V}_{1Ц} = \vec{V}_0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = \frac{\vec{V}_0}{2}$, а для второго шара $\vec{V}_{2Ц} = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$. Обозначим импульсы первого и второго шаров в СЦИ до удара $\vec{p}_{1Ц}$ и $\vec{p}_{2Ц}$, а после соударения $\vec{p}'_{1Ц}$ и $\vec{p}'_{2Ц}$.

$$\vec{p}_{1Ц} = m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \vec{p}_{2Ц} = -m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \text{т. е. } \vec{p}_{1Ц} = -\vec{p}_{2Ц}, \quad p_{1Ц} = p_{2Ц}.$$

Следовательно, закон сохранения импульса в СЦИ имеет вид

$$\vec{p}_{1ц} + \vec{p}_{2ц} = \vec{p}'_{1ц} + \vec{p}'_{2ц} = 0. \quad (2)$$

Отсюда $\vec{p}_{1ц} = -\vec{p}_{2ц}$; $p'_{1ц} = p'_{2ц}$. Соотношение (2) можно доказать и в более общем случае неравных масс шаров. Оно имеет простой физический смысл: в системе отсчёта, связанной с центром инерции, сам центр инерции покоится.

Соударение называется упругим, если суммарная кинетическая энергия шаров не меняется. Реальное соударение можно считать упругим приближённо: часть энергии перейдёт в энергию необратимой деформации, затем в тепло. Для шаров из закалённого стекла потери кинетической энергии при ударе достигают 10 %, для бильярдных шаров из слоновой кости – 20 %, для стальных шаров могут превышать 50 %.

Запишем закон сохранения кинетической энергии в СЦИ в приближении абсолютно упругого удара:

$$\frac{p_{1ц}^2}{2m} + \frac{p_{2ц}^2}{2m} = 2 \frac{p_{1ц}^2}{2m} = \frac{p_{1ц}'^2}{2m} + \frac{p_{2ц}'^2}{2m} = 2 \frac{p_{1ц}'^2}{2m}, \quad (3)$$

где были использованы связи длин векторов импульсов до и после удара. Из (2) и (3) следует, что длины всех векторов одинаковы:

$$p_{1ц} = p_{2ц} = p'_{1ц} = p'_{2ц}.$$

При ударе меняются только направления векторов. На рис. 2 показана диаграмма импульсов в СЦИ при абсолютно упругом центральном ударе и изменения импульсов шаров при ударе. Изменение импульса первого шара $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_{1ц} - \vec{p}_{2ц} = -m\vec{V}_0 = -\Delta \vec{p}_2$.

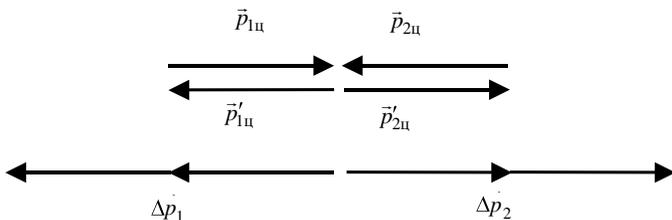


Рис. 2

Процесс упругого соударения шаров в СЦИ можно представить в виде следующих двух этапов:

1) на первом этапе оба шара одновременно тормозятся и упруго деформируются, пока кинетическая энергия шаров полностью не превратится в энергию упругой деформации;

2) на втором этапе величина упругой деформации X уменьшается до нуля, энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров.

Закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров имеет вид

$$2 \frac{m(V_0/2)^2}{2} = 2 \frac{mV_0^2}{8} = 2FX_{\max}, \quad (4)$$

где X_{\max} – максимальная величина продольной деформации, одинаковая для каждого из шаров. Отсюда средняя величина упругой силы

$$F = \frac{mV_0^2}{8X_{\max}}. \quad (5)$$

Подставляя в (1) это выражение, получаем, что время соударения шаров

$$\tau = \frac{8X_{\max}}{V_0}. \quad (6)$$

Столкновение кубиков. Из (6) следует, что τ пропорционально X_{\max} . Для определения зависимости τ от диаметра D необходимо найти зависимость X_{\max} от D . Для этого рассмотрим сначала грубую физическую модель, в которой шар диаметром D заменен телом кубической формы с ребром D (рис. 3).

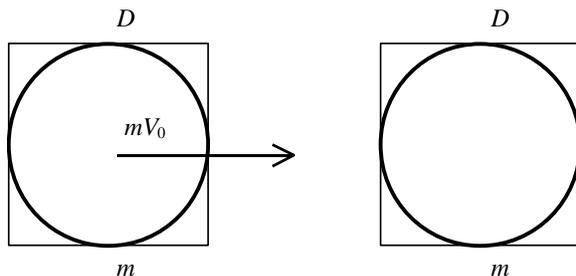


Рис. 3

Считаем, что при упругом соударении двух стальных кубов, когда при соударении соприкасающиеся грани идеально совпадают, справедлив закон Гука:

$$\left| \bar{F}_{1,2}(X) \right| = E \frac{X}{D} \quad (7)$$

– относительная продольная деформация X/D пропорциональна механическому напряжению $\left| \bar{F}_{1,2} \right|/S$. Здесь E – модуль Юнга; $S = D^2$ – площадь поперечного сечения деформируемого тела.

Как известно, среднее линейной функции совпадает с центром её области изменения (рис. 4), т. е.

$$F = \left| \bar{F}_{1,2} \left(\frac{X_{\max}}{2} \right) \right| = SE \frac{X_{\max}}{2D} = ED \frac{X_{\max}}{2}.$$

Подставим F в (4):

$$2 \frac{mV_0^2}{8} = 2ED \frac{X_{\max}^2}{2}.$$

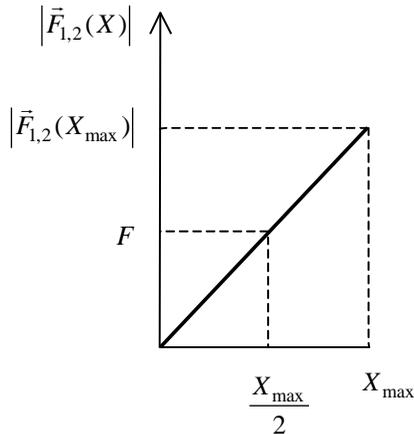


Рис. 4

Отсюда $X_{\max} = \sqrt{\frac{mV_0^2}{4ED}}$. Так как $m = \rho V = \rho D^3$, где ρ – плотность тела, а $V = D^3$ – его объём, получаем

$$X_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} V_0 D, \quad (8)$$

где ρ – плотность стального куба. Подставляя найденное выражение для X_{\max} в формулу (5), для времени соударения кубических тел получаем

$$\tau = 4 \left(\frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} D \quad (9)$$

Столкновение шаров. Закон Гука в виде (7) справедлив лишь для равномерно сжатого вдоль одного из рёбер прямоугольного параллелепипеда (или цилиндра). Для шара картина принципиально другая. В этом случае зависимость силы упругости от величины продольной деформации является нелинейной, потому что вместе с деформацией возрастает площадь контакта:

$$F_{\text{упр}} \approx 1,04ED^2 X^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Из (11) следует, что $F_{\text{упр}}$ растёт быстрее, чем величина деформации; это случай так называемой системы с жесткой характеристикой.

В этом случае закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров можно записать так:

$$\begin{aligned} 2 \frac{mV_0^2}{8} &= 2 \int_0^{X_{\max}} F_{\text{упр}} dX = 2 \int_0^{X_{\max}} 1,04ED^2 X^{\frac{3}{2}} dX = \\ &= 0,83ED^2 X_{\max}^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$, для X_{\max} получаем

$$X_{\max} = 0,95 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{\frac{4}{5}} \frac{D}{2}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), получаем время соударения шаров:

$$\tau = 3,80 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{-\frac{1}{5}} D. \quad (12)$$

Получается, что для стальных шаров в рамках модели системы с жёсткой характеристикой, так же как и для тел кубической и цилиндрической формы, максимальная величина продольной деформации X_{\max} пропорциональна размерам тел – диаметру D . То есть обе модели приводят к линейной зависимости времени соударения стальных шаров от их диаметра:

$$\tau = AD, \quad (13)$$

где A – коэффициент пропорциональности, зависящий от ρ, E и V_0 и формы сталкивающихся тел.

Именно эту теоретически полученную зависимость τ от D необходимо подтвердить (или опровергнуть) экспериментально, измеряя время соударения шаров микросекундомером. Значения диаметров шаров приведены в паспорте установки.

3. Задания

1. Произведите измерения времени соударения для четырех пар шаров (по три измерения для каждой пары).

2. Результаты измерений и расчетов представьте в виде таблицы (показана часть таблицы для одного диаметра). В последнем столбце таблицы для каждого диаметра запишите доверительный интервал для времени соударения. Рекомендуемые значения $t = 2$, $P = 0,95$. Значение $\bar{\tau}$ округляется до младшего разряда значения величины σ_{τ} .

D	№	τ	$\bar{\tau}$	σ_{τ}	$\bar{\tau} \pm t P \sigma_{\tau}, P = \dots$
мм	п/п	мкс	мкс	мкс	мкс
	1			Рассчитано на вводном занятии	
	2				
	3				

3. Представьте зависимость времени соударения шаров τ от их диаметра D в виде графика. К каждому из четырёх средних значений $\bar{\tau}$ пристроить доверительный интервал $\pm t P \sigma_{\tau}$ (пример на рис. 5). Провести из начала координат *регрессионную*, т. е. сглаживающую, прямую через все доверительные интервалы. Существует ли такая прямая?

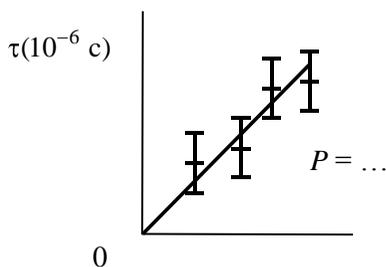


Рис. 5

4. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?
2. Как определяется время соударения шаров на основе второго закона Ньютона?
3. Какие силы изменяют суммарный импульс группы тел?
4. Как упругие силы взаимодействия шаров влияют на суммарный импульс шаров?
5. Когда можно применять закон сохранения импульса приближённо?
6. Почему при расчёте времени соударения мы можем перейти в другую инерциальную систему отсчёта?
7. Что такое система центра инерции?

8. Что такое упругий удар? Какой закон выполняется при упругом ударе?

9. Изобразите диаграмму импульсов шаров в СЦИ. Покажите векторы изменения импульса каждого шара при ударе.

10. Какие этапы можно выделить в процессе упругого соударения?

11. Перечислите основные допущения, используемые при анализе соударения в системе центра инерции.

12. Исходя из начальных условий соударения в лабораторной системе отсчёта выведите формулу для изменения импульсов шаров при ударе в СЦИ.

13. Исходя из закономерностей упругого удара в СЦИ выведите зависимость τ от D при соударении кубиков.

14. Получите зависимость τ от D при упругом соударении двух сплошных цилиндров, радиусы которых равны радиусу шара, а длина – диаметру шара, в случае, если цилиндры ударяются торцевыми поверхностями.

15. Получили ли вы ожидаемую зависимость времени соударения шаров от их диаметров? Что это означает?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука (год издания любой).

Лабораторная работа № 2

ИЗМЕРЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

В данной работе с помощью баллистического маятника определяются скорости пуль различных масс. Скорость пули и теоретическая зависимость скорости от массы рассчитываются на основе законов сохранения импульса и энергии.

Цель работы: сравнить экспериментально полученную зависимость скорости пули от массы с теоретической.

1. Описание установки и эксперимента

Определение начальной скорости снаряда методом баллистического маятника является одним из примеров использования на практике процесса неупругого удара.

Баллистический маятник (рис. 1) представляет собой подвешенный на длинных тонких нитях (или лёгком стержне) массивный цилиндр массы M , заполненный пластилином. В цилиндр в горизонтальном направлении стреляют пулей массы m из пружинного пистолета Π , неподвижно закрепленного вблизи маятника. Пуля входит в пластилин на расстояние b (длина острия) и дальше продолжает двигаться вместе с маятником. В результате маятник отклоняется от положения равновесия. Максимальное отклонение регистрируется механизмом измерения перемещения (подвижной измерительной линейкой L).

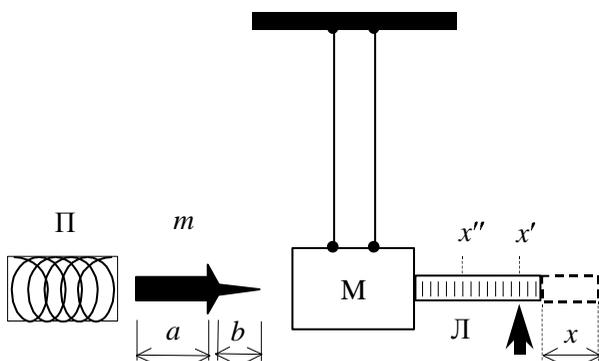


Рис. 1

2. Измерение скорости пули

Длина острия пули $b = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$, минимальная скорость пули на выходе из пружинного пистолета примерно 2 м/с . Считая, что пуля, внедряясь остриём в пластилин, движется равнозамедленно, примем среднюю скорость движения пули относительно пластилина равной 1 м/с . Тогда пуля проникает в пластилин на 2 см за $0,02 \text{ с} = 1/50 \text{ с}$. Такой промежуток времени глазом не воспринимается. В то же время отклонение маятника вполне обозримо, т.е. происходит за время порядка 1 с . Следовательно, весь процесс взаимодействия пули с маятником можно представить в виде двух этапов:

1) очень короткого промежутка времени, когда пуля внедряется в пластилин, но маятник ещё неподвижен относительно линейки Л;

2) медленного (в сравнении с пулей) движения маятника вместе с застрявшей в нём пулей.

Эти качественные соображения ещё необходимо подтвердить количественными результатами измерений.

Первый этап удара. Пока маятник ещё неподвижен, внешние силы, действующие на пулю и маятник (назовите их), направлены вертикально, т. е. перпендикулярно направлению движения пули к маятнику. Более того, сумма этих внешних сил равна нулю: вертикальное ускорение пули и маятника ещё отсутствует (какой закон связывает ускорение и силы?). Следовательно, горизонтальная компонента суммарного импульса пули и маятника на этом этапе сохраняется, так как взаимные силы трения пули и маятника, без сомнения, весьма значительные, являются внутренними силами системы этих тел и суммарного импульса не изменяют (на основании какого закона?). Закон сохранения горизонтальной компоненты импульса маятника и пули в лабораторной системе отсчёта можно записать так:

$$mV_0 = (m + M)V_1, \quad (1)$$

где V_0 – проекция начальной скорости пули на горизонтальную ось; V_1 – проекция на горизонтальную ось скорости маятника сразу после того, как пуля застряла в пластине; m и M – массы пули и маятника соответственно. Левая часть равенства – импульс пули после вылета из пистолета, правая – импульс маятника с пулей после удара.

Второй этап удара. Маятник с пулей отклоняется от положения равновесия. Поскольку пуля уже остановилась в пластине, действие сил трения скольжения прекратилось. Поэтому, если пренебречь слабыми потерями энергии (преодоление сопротивления воздуха, трение в подвесе, трение в механизме, измеряющем отклонение), можно считать, что выполняется закон сохранения механической энергии при движении маятника с пулей в поле силы тяжести (из точки B в точку C на рис. 2).

Закон сохранения энергии записываем в виде

$$\frac{(m + M)V_1^2}{2} = m + M gh, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения; h – высота максимального подъема маятника (рис. 2). Заметим, что на рис. 2 отрезки AO и OB по построению лежат на одной прямой и равны по величине длине подвеса маятника l . Точка O – точка закрепления подвеса.

Исключив из выражений (1) и (2) скорость маятника V_1 , можно по высоте максимального подъема маятника h определить начальную скорость пули V_0 . Однако практически гораздо проще, чем высоту подъема, измерить горизонтальное смещение маятника x при помощи простейшего измерительного «механизма» (см. рис. 1): $x = |x' - x''|$. Здесь x' , x'' – координаты, отсчитанные по линейке при двух её положениях, начальном и конечном.

На рис. 2 видно, что прямоугольные треугольники ABC , ACD и BCD подобны. (Угол ABC опирается на диаметр описанной окружности и поэтому является прямым.) Из подобия треугольников ACD и BCD следует, что

$$\frac{h}{x} = \frac{x}{2l - h}. \quad (3)$$

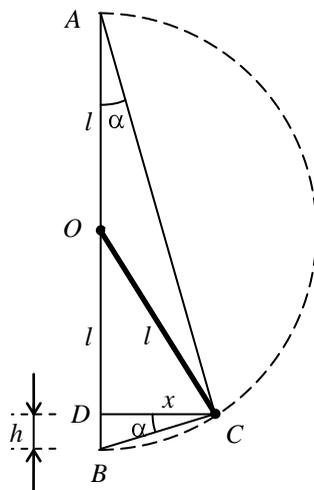


Рис. 2

При малых углах отклонения маятника $h \ll l$. Пренебрегая h в разности $2l - h$, из (3) получаем

$$h = \frac{x^2}{2l}. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1), (2), (4), получаем, что начальная скорость пули

$$V_0 = \frac{m + M}{m} \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} x.$$

Введём обозначение:

$$\frac{m + M}{m} \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} = K, \quad (5)$$

тогда

$$V_0 = Kx.$$

Таким образом, измерение скорости в этой работе – косвенное измерение. Вычислив значение K по формуле (5) и измерив несколько раз смещение x (т. е. получив выборку случайной величины x), можно вычислить среднее значение смещения \bar{x} и среднее значение начальной скорости \bar{V}_0 для каждой пули:

$$\boxed{\bar{V}_0 = K \bar{x}} \quad (6)$$

Проверка разделения удара на два этапа. Время внедрения пули в пластилин $\tau_1 = b / V_0/2$, где $V_0/2$ – средняя скорость равнозамедленного движения пули в пластине до остановки.

Из (1) – проекция на горизонтальную ось скорости маятника с застрявшей в нём пулей сразу после удара:

$$V_1 = \frac{mV_0}{m + M}.$$

Считаем горизонтальное движение маятника с пулей равнозамедленным со средней скоростью $V_1/2$. Тогда длительность второго этапа удара $\tau_2 = x / V_1/2$. Отсюда отношение длительностей первого и второго этапов:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{b / V_0/2}{x / V_1/2} = \frac{b}{x} \frac{m}{m + M}. \quad (7)$$

Если это соотношение меньше 0,1, считаем разбиение удара на два этапа допустимым. Оценку достаточно провести для самой тяжёлой пули. Масса маятника $M \geq 2$ кг.

3. Зависимость скорости пули от ее массы

Полученная для расчета скорости формула (5) не характеризует явную зависимость скорости пули от ее массы, так как от массы зависит еще и горизонтальное смещение x .

Явную зависимость скорости пули от массы можно получить, применяя закон сохранения энергии. Потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию пули и пружины (пружина тоже движется вплоть до момента отрыва пули). Потерями энергии на преодоление сил трения в системе пренебрегаем. Тогда для момента времени перед самым отрывом пули от пружины, когда скорость пули и скорость конца пружины практически равны V_0 , закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{ca^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + E_{\text{кин пр}}, \quad (8)$$

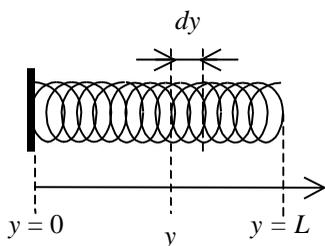


Рис. 3

где c – коэффициент жесткости пружины; a – деформация пружины при сжатии, равная длине хвостовика пружины (см. рис. 1). При расчете $E_{\text{кин пр}}$, кинетической энергии пружины в момент вылета пули, предположим: во-первых, что пружина однородна; во-вторых, что один конец пружины всегда покоится в лабораторной системе отсчёта, а скорость второго конца равна скорости пули

V_0 . Тогда скорость элемента пружины, расположенного на расстоянии y от неподвижного конца, в любой момент времени линейно зависит от y , и в момент отрыва пули равна $V_y = \frac{y}{L} V_0$ (здесь L – длина деформированной пружины). Введем линейную плотность пружины $\rho = \frac{m_{\text{пр}}}{L}$. Тогда кинетическая энергия бесконечно малого элемента пружины длиной dy , находящегося на расстоянии y от неподвижного конца (рис. 3), равна

$$dE = \frac{\rho dy V^2(y)}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}}}{L} \left(\frac{y}{L} V_0 \right)^2 dy = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{пр}} V_0^2}{L^3} y^2 dy. \quad (9)$$

Чтобы получить кинетическую энергию всех элементов пружины, проинтегрируем выражение (9) от нуля до L : $E_{\text{кин пр}} = \int_0^L dE$. Проинтегрировав, получим

$$E_{\text{кин пр}} = \frac{1}{6} m_{\text{пр}} V_0^2. \quad (10)$$

Подставив это выражение в (8), получаем

$$\frac{ca^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{1}{6} m_{\text{пр}} V_0^2. \quad (11)$$

Видно, что зависимость скорости V_0 от массы m не является линейной.

После несложных преобразований зависимость (11) можно *линеаризовать*, т. е. привести к линейной:

$$V_0^{-2} = \frac{1}{ca^2} m + \frac{1}{ca^2} \frac{m_{\text{пр}}}{3} \quad (12)$$

Исследуем формулу (12). Функция V_0^{-2} линейно зависит от массы пули, графиком зависимости V_0^{-2} от m является прямая линия (рис. 4).

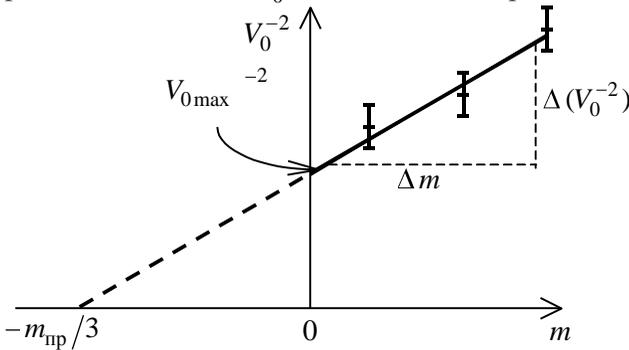


Рис. 4

При $m = 0$ имеем $V_0^{-2} = \frac{1}{ca^2} \frac{m_{\text{пр}}}{3}$. Эта точка соответствует теоретически максимальной скорости «невесомой» пули с данной пружиной.

На графике зависимости V_0^{-2} от m угловой коэффициент наклона k прямой к оси абсцисс равен

$$k = \frac{\Delta V_0^{-2}}{\Delta m} = \frac{1}{ca^2}.$$

Величина V_0^{-2} была бы равна нулю при $m = -m_{\text{пр}}/3$.

4. Оценка стандартного отклонения величины V^{-2}

Из формулы (6) следует, что экспериментальное значение величины V_0^{-2} находится по формуле

$$V_0^{-2} = K^{-2}x^{-2}. \quad (13)$$

Величина V_0^{-2} вычисляется по измеряемому значению x . Следовательно, оценка стандартного отклонения величины V_0^{-2} может быть произведена по формулам (14), (15) вводного занятия, которые применяются при косвенных измерениях:

$$\sigma_{V_0^{-2}} = \overline{V_0^{-2}} \sqrt{\left(\frac{2\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2} \quad (14)$$

5. Задания

1. Проведите измерения смещения при попадании в маятник пули различной массы (для каждой пули измерения повторите три раза). При каждом измерении после выстрела и перемещения измерительной линейки следует, не трогая линейку, выстрелить ещё раз (произвести «контрольный выстрел»). Возможно, при повторном выстреле линейка переместится ещё немного дальше, так как работа сил трения линейки в механизме при повторном, гораздо меньшем перемещении линейки существенно уменьшается по сравнению с первым выстрелом и не вносит заметной погрешности (иными словами, при повторном выстреле линейка почти не тормозит маятник). Поэтому результат, полученный после «достреливания» фактически совпадает с результатом, который получили бы «при отсутствии трения».

2. Рассчитайте значения величин V_0 , V_0^{-2} и $\sigma_{V_0^{-2}}$.

3. Постройте график зависимости V_0^{-2} от m с учетом $\sigma_{V_0^{-2}}$ и сравните с теоретической зависимостью (12) (см. рис. 4).

4. Оцените по графику массу пружины и максимально возможную скорость пули.

5. Измерьте линейкой хвостовик пули a (см. рис. 1) и оцените по графику коэффициент жёсткости пружины c .

6. По экспериментальным данным для самой тяжёлой пули по формуле (7) оцените допустимость разбиения удара на два этапа.

6. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной лабораторной работы?
2. Как в данной работе измеряется скорость пули?
3. На какие этапы можно условно разделить процесс соударения пули с маятником?
4. Нарисуйте векторы внешних сил, действующих на пулю и маятник: а) на первом этапе соударения; б) на втором этапе.
5. Влияют ли взаимные силы трения пули и маятника на суммарный импульс маятника и пули?
6. На каком этапе (этапах) удара выполняется закон сохранения импульса системы маятник – пуля?
7. На каком этапе (этапах) удара выполняется закон сохранения механической энергии при выводе теоретической зависимости (12) и какие при этом делаются допущения?
8. Как от высоты подъема маятника перейти к величине его горизонтального смещения и какие допущения при этом необходимо сделать?
9. Выведите зависимость скорости пули от горизонтального смещения маятника.
10. Выведите зависимость скорости пули от её массы.
11. В каких осях следует строить зависимость скорости пули от её массы, чтобы выяснить, подтвердилась ли теоретическая зависимость (12)?
12. Какие характеристики пружины можно определить по этому графику?
13. Получили ли вы ожидаемую зависимость скорости пули от её массы? Что это означает?

Рекомендуемая литература

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука (любой год издания).

Лабораторная работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

В данной работе на примере движения маятника Обербека изучается динамика вращательного движения твердого тела.

Целью работы является сравнение экспериментально полученной зависимости углового ускорения маятника Обербека от массы груза, приводящего маятник во вращение, с теоретической.

1. Описание установки и эксперимента

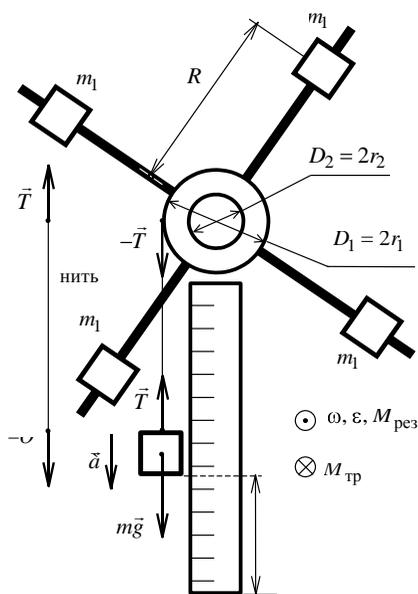


Рис. 1

Маятник Обербека представляет собой крестовину, имеющую общую ось с двумя шкивами разных диаметров D_1 и D_2 (рис. 1). Крестовина и шкивы соединены между собой жестко. Контакт крестовины со шкивом и осью, на которую они насажены, осуществляется с помощью шарикоподшипника. На стержни крестовины надевают одинаковые тела массы m_1 , которые могут быть закреплены на различных расстояниях R от оси вращения. На шкив наматывается нить, к свободному концу которой подвешен груз массы m . Начальное положение груза отмечается на вертикальной шкале (рис. 1). Под действием опускающегося груза нить разматывается и приводит маятник в ускоренное вращение. Время движения груза измеряется электросекундомером.

В момент начала движения груза необходимо нажать кнопку «Пуск» секундомера, начинается отсчёт времени движения. Когда груз, пройдя расстояние x , опустится на контактную площадку, отсчёт прекращается, время опускания груза t фиксируется секундомером.

2. Зависимость углового ускорения маятника от массы m ускоряющего груза

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси вращения в приближении невесомой нити имеет вид

$$I\varepsilon = M_{\text{рез}} = T \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Уравнение выписано в проекции на ось вращения; I – момент инерции маятника Обербека относительно неподвижной оси; ε – проекция углового ускорения маятника на ось вращения; $M_{\text{рез}}$ – проекция результирующего момента всех сил на ось вращения, складывающаяся из момента силы натяжения нити T и момента силы трения $M_{\text{тр}}$, тормозящего вращение шкива.

Силу натяжения нити T можно определить из второго закона Ньютона для массы m , его проекция на направление движения груза m имеет вид

$$ma = mg - T, \quad (2)$$

где a – ускорение движения массы m .

В приближении нерастяжимой нити по рис. 2 получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} = \varphi, \quad V = \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} r = \omega r, \\ a = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r = \varepsilon \frac{D}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

связывающие поступательное движение массы m с вращением шкива. Здесь φ (рад) – угол поворота шкива радиусом r при опускании груза на расстояние x ; V и ω – соответствующие линейная и угловая скорости; D – диаметр шкива, равный D_1 или D_2 .

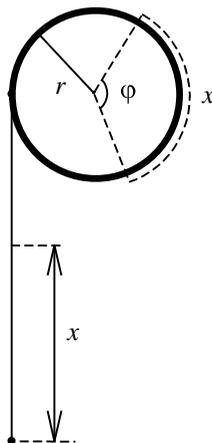


Рис. 2

С учетом уравнений (2) и (3) из уравнения (1) находим угловое ускорение маятника Обербека:

$$\varepsilon = \frac{mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I + m \frac{D^2}{4}}. \quad (4)$$

Очевидно, что при $M_{\text{тр}} = \text{const}$ (момент сил трения постоянен) вращение маятника является равноускоренным.

Из полученной формулы видно, что маятник будет вращаться с $\varepsilon > 0$ лишь при выполнении условия

$$m > m_0 = \frac{2M_{\text{тр}}}{gD}, \quad (5)$$

т. е. при массе груза m , достаточной для того чтобы был преодолен момент сил трения, препятствующий вращению маятника Обербека. Формула (4) упрощается при выполнении неравенства

$$I \gg m \frac{D^2}{4}, \quad (6)$$

зависимость углового ускорения ε от массы опускающегося груза при этом становится линейной:

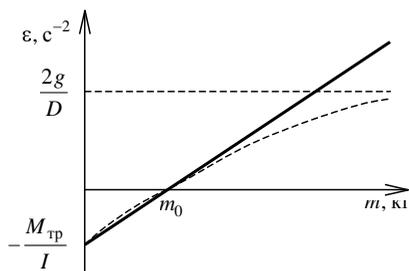


Рис. 3

$$\varepsilon = \frac{mgD}{2I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}. \quad (7)$$

График зависимости $\varepsilon(m)$ при выполнении неравенства (6) приведён сплошной линией на рис. 3. Штриховой линией показана точная зависимость (4). Штриховая горизонтальная прямая — асимптота при $m \rightarrow \infty$.

Примечание. Если момент сил трения зависит от времени, то вращение маятника не будет равноускоренным. Возможен случай, когда момент сил трения пропорционален угловой скорости:

$$M_{\text{тр}} = M_0 + A\omega, \quad (8)$$

где A – коэффициент пропорциональности; $M_0 = m_0 g \frac{D}{2}$ – момент сил трения покоя при $\omega = 0$. Заметим, что при $m < m_0 = \frac{2M_0}{gD}$ (сравните с формулой (5)) вращение маятника не происходит. Решая дифференциальное уравнение (4) с учетом (8), можно показать, что угловое ускорение ε в момент времени t дается формулой

$$\varepsilon = \frac{(m - m_0)gD}{2 \left(I + m \frac{D^2}{4} \right)} e^{-\frac{A}{I + m \frac{D^2}{4}} t}. \quad (9)$$

3. Измерение углового ускорения

Движение маятника можно принять равноускоренным, если считать, что момент силы трения постоянен ($M_{\text{тр}} = \text{const}$) и что нить нерастяжима и не проскальзывает по шкиву. Используя известную формулу для координаты тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$x = a \frac{t^2}{2}, \quad (10)$$

с учетом соотношения $a = \varepsilon \frac{D}{2}$ получаем формулу для косвенного измерения углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2}, \quad (11)$$

где x – высота, с которой опускается груз; D – диаметр шкива, на который намотана нить; t – время движения груза. Для расчетов удобно представить (11) в виде

$$\varepsilon = \frac{K}{t^2}, \quad (12)$$

где $K = \frac{4x}{D}$ и указывается в паспорте установки.

Угловое ускорение ε рассчитывается по формуле (11), т. е. по измеренному времени t и заданному значению константы K . В данном случае мы имеем косвенное измерение. Оценка стандартного отклонения σ_ε производится по формуле

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\bar{K}}{t^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2}. \quad (13)$$

4. Задания

1. Произведите трехкратное измерение времени опускания грузов массы $m=100, 200, 300, 400$ г с одинаковой высоты x при двух различных расстояниях R грузов m_1 до оси крестовины. Расстояния R задаются преподавателем.

2. Вычислите значения ε для всех значений m и R предыдущего пункта.

3. Вычислите оценки стандартных отклонений σ_ε только для двух значений ε – наибольшего и наименьшего при обоих расстояниях R .

4. Постройте зависимость ε от m при двух значениях R на одном и том же графике с учетом оценок стандартных отклонений. По полученным графикам сделайте оценки момента сил трения и момента инерции маятника Обербека.

5. Проверьте, используя оценку момента инерции I в п. 4, выполнение неравенства $I \gg m \frac{D^2}{4}$, при котором справедлива линейная зависимость углового ускорения от массы m ускоряющего груза, для различных значений массы m из п. 1.

5. Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы? Какие величины в работе измеряются непосредственно?
2. Как направлены векторы угловой скорости $\vec{\omega}$, углового ускорения $\vec{\epsilon}$, результирующего момента сил и момента сил трения в случае ускоренного вращения?
3. Как вы записываете уравнение динамики вращательного движения маятника в данной работе?
4. Какова модель нити? Как свойства идеальной нити влияют на вид кинематических и динамических уравнений?
5. Покажите на рисунке все силы, действующие на крестовину маятника. Почему в уравнении динамики вращательного движения (1) не учтены моменты некоторых из этих сил?
6. Перечислите все допущения, при которых получается линейная зависимость углового ускорения ϵ от массы m .
7. Как по графику линейной зависимости (7) ϵ от m оценить момент инерции маятника Обербека и момент сил трения?
8. Выведите зависимость углового ускорения ϵ от массы опускающегося груза m в приближении линейной зависимости $\epsilon(m)$.
9. Как в данной работе рассчитать оценку стандартного отклонения величины ϵ ?
10. Подтверждается ли измерениями линейная теоретическая зависимость углового ускорения ϵ от массы ускоряющего груза m ?

Литература

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука (любой год издания).
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).

Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Целью работы является экспериментальное исследование зависимости момента инерции маятника Обербека от расстояния R между осью вращения и центром инерции каждого из четырёх грузов маятника. Теоретически эта зависимость легко находится с использованием: 1) свойства аддитивности момента инерции и 2) теоремы Штейнера. Таким образом, при сравнении экспериментально полученной зависимости с теоретической фактически проверяется, является ли момент инерции аддитивной величиной и справедлива ли в данном случае теорема Штейнера.

Описание установки – маятника Обербека и секундомера – уже приводилось в описании лабораторной работы № 3.

1. Зависимость момента инерции маятника от расстояния грузов до оси вращения

Момент инерции – величина аддитивная, поэтому момент инерции маятника Обербека относительно его оси можно представить в виде суммы моментов инерции пяти тел: одной крестовины, состоящей из шкивов, подшипников и стержней и четырех тел (грузов), закрепленных на стержнях крестовины на одинаковом расстоянии R от оси вращения.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции тела I относительно произвольной оси l равен сумме его момента инерции I_0 относительно оси l_0 , параллельной l и проходящей через центр инерции тела и величины mR^2 , равной произведению массы тела m на квадрат расстояния между параллельными осями l и l_0 , т. е.

$$I = I_0 + mR^2.$$

Поэтому для каждого из четырёх грузов, представляющих собой одинаковые цилиндры массы m_1 и радиуса r_1 , момент инерции относительно оси маятника I_1 есть

$$I_1 = I_0 + m_1 a^2 = \frac{m_1 r_1^2}{2} + m_1 R^2 = m_1 R^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{R} \right)^2 \right).$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой фактических значений r_1 и R , что второе слагаемое в скобках достаточно мало по сравнению с единицей и им можно пренебречь (строго говоря, максимальную величину этого члена нужно сравнить с оценкой относительной погрешности эксперимента и только после этого решать вопрос о целесообразности его учёта или отбрасывания). Заметим, что пренебрежение вторым членом в скобках соответствует модели, в которой четыре груза считаются точечными массами (материальными точками).

В рамках этой модели момент инерции всего маятника является суммой моментов инерции крестовины $I_{кр}$ и четырёх материальных точек массы m_1 , расположенных на расстоянии R от оси:

$$I = I_{кр} + 4m_1 R^2. \quad (1)$$

Именно эту теоретическую зависимость следует подтвердить (или опровергнуть) экспериментально в данной лабораторной работе.

2. Измерение момента инерции маятника

При опускании ускоряющего груза m изменение полной механической энергии системы равно работе сил трения. Полная механическая энергия системы есть сумма её кинетической и потенциальной энергий. Изменение (уменьшение) потенциальной энергии при опускании груза массы m с высоты x равно $(-mgx)$, а изменение (увеличение) кинетической энергии состоит из кинетической энергии вращательного движения маятника Обербека $\frac{I\omega^2}{2}$, где ω – угловая скорость маятника, и кинетической энергии поступательного движения груза m , равной $\frac{mV^2}{2}$ (V – линейная скорость опускаемого груза). Работа сил трения при вращательном движении равна $-M_{тр}\varphi$, где

$M_{\text{тр}} = \text{const}$ – момент сил трения; φ – угол поворота (угловой путь) маятника, соответствующий перемещению груза x при его опускании.

Таким образом, получаем, что при опускании груза

$$-mgx + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = -M_{\text{тр}}\varphi. \quad (2)$$

Если $M_{\text{тр}} = \text{const}$, нить нерастяжима и нет проскальзывания между нитью и шкивом, то движение системы тел можно считать равноускоренным. Если начальная скорость равна нулю, то для равноускоренного движения справедливы следующие соотношения:

$$V^2 = 2ax, \quad \omega^2 = 2\varepsilon\varphi. \quad (3)$$

Пусть $r = \frac{x}{\varphi}$ – радиус шкива, тогда $a = \varepsilon r$, $V = \omega r$. Подставим выражения (3) в соотношение (2), затем разделив левую и правую часть равенства на φ , получаем

$$mgr = I\varepsilon + mar + M_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Заметим, что в лабораторной работе № 3 практически это же соотношение было получено из основного закона динамики вращательного движения для маятника и второго закона Ньютона для опускающегося груза (см. формулы (1)–(3) из описания лабораторной работы № 3).

Выражая ускорение груза a через угловое ускорение шкива ε и решая полученное уравнение относительно I , определим момент инерции маятника:

$$I = \frac{mgr - M_{\text{тр}}}{\varepsilon} - mr^2. \quad (5)$$

Для равноускоренного движения $x = \frac{at^2}{2}$. Так как $a = \varepsilon \frac{D}{2}$, где D – диаметр шкива, получаем

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2} \quad (6)$$

Подставляя в (5) это выражение, вместо ε получаем

$$I = Kt^2 - m \frac{D^2}{4}, \quad (7)$$

где

$$K = \frac{\left(mg \frac{D}{2} - M_{\text{тр}} \right) D}{4x}.$$

Для нашей установки $M_{\text{тр}} \ll mgD/2$, поэтому можно считать, что

$$K = \frac{mgD^2}{8x}. \quad (8)$$

Кроме того, для нашей установки

$$I \gg m \frac{D^2}{4} = mr^2. \quad (9)$$

Это неравенство может быть проверено непосредственно подстановкой конкретных величин. С учётом (9) из (7) для момента инерции получаем

$$\boxed{I = Kt^2} \quad (10)$$

Для определения момента инерции маятника необходимо провести прямое измерение времени прохождения грузом массы m расстояния x (см. рисунок в описании лабораторной работы № 3).

3. Оценка стандартного отклонения момента инерции

Из формулы (10) следует, что значение величины I находится в процессе косвенного измерения. Следовательно, оценка стандартного отклонения величины I может быть произведена по формуле (12) вводного занятия, которая применяется при косвенных измерениях:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial K} \sigma_K \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t} \sigma_t \right)^2} = \sqrt{t^2 \sigma_K^2 + K \cdot 2t \sigma_t^2} =$$

$$= Kt^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2}. \quad (13)$$

Таким образом,

$$\sigma_I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2}. \quad (14)$$

4. Задания

1. Закрепив цилиндры m_1 на равных расстояниях R от оси вращения, измерьте это расстояние R .

2. Намотав нить на шкив большего диаметра, произведите трехкратное измерение времени опускания груза t .

3. Повторите опыт при четырех различных расстояниях цилиндров от оси вращения.

4. Подставив в (8) массу m опускающегося груза, вычислите коэффициент K по формуле (8).

5. Вычислите моменты инерции маятника для всех измерений по п. 2 и 3.

6. Рассчитайте оценки стандартных отклонений для всех полученных значений момента инерции.

7. Постройте график зависимости момента инерции I от расстояния масс до оси вращения R с учетом вычисленных оценок стандартных отклонений. Выберите переменные по осям, в каких целесообразно строить этот график, чтобы выяснить, подтвердилась ли теоретическая зависимость (1).

8. Определите по графику момент инерции крестовины $I_{кр}$.

5. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?

2. Что называется моментом инерции тела?

3. При каких допущениях получена формула (1)? Что необходимо учесть при проведении эксперимента, чтобы эта формула была справедлива?

4. При каких допущениях движение маятника и груза можно считать равноускоренным?
5. При каких допущениях получена формула (8)?
6. Как измерить расстояние от оси вращения до центра массы тела, закрепленного на стержне?
7. Как рассчитать оценку стандартного отклонения момента инерции маятника Обербека?
8. Какую таблицу удобно заполнять при записи результатов прямых измерений и подготовке к построению экспериментальной зависимости?
9. Как по графику экспериментальной зависимости $I(R)$ определить момент инерции крестовины?

Литература

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука (любой год издания).
2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ МЕТОДОМ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Целью работы является экспериментальное определение показателя адиабаты воздуха γ , равного отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме: $\gamma = C_P/C_V$.

1. Теоретическое значение γ

Абсолютная температура T является мерой средней кинетической энергии $\bar{\varepsilon}$ хаотического поступательного движения атомов и/или молекул газа:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T,$$

где k_B – постоянная Больцмана; чертой обозначено усреднение энергии по всем движущимся частицам газа.

В термодинамически равновесном состоянии молекулярного хаоса все направления движения атомов равновероятны, поэтому на каждое из трёх независимых направлений поступательного движения приходится 1/3 полной средней энергии:

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = \frac{1}{3}\bar{\varepsilon} = \frac{k_B T}{2}.$$

Молекулы помимо поступательного могут участвовать во вращательном и колебательном движениях. Независимые возможные перемещения системы в классической механике называются *степенями свободы*. В статистическом описании тепловых свойств макросистем доказывается теорема о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы. На каждую степень свободы поступательного или вращательного движения атомов и молекул приходится энергия $k_B T/2$. Каждой колебательной степени свободы соответствует удвоенная тепловая энергия, поскольку полная энергия колебаний склады-

вается из кинетической и потенциальной энергий, имеющих равные средние значения:

$$\bar{\epsilon}_{\text{кол}} = \bar{\epsilon}_{\text{кин}} + \bar{\epsilon}_{\text{пот}} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} = k_B T.$$

Поэтому полная внутренняя энергия системы N невзаимодействующих атомов или молекул (такая модель применима только к идеальному газу) равна

$$U = N i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}} \frac{k_B T}{2} = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} N_A k_B T = \nu \frac{i}{2} RT, \quad (1)$$

где $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$, $i_{\text{кол}}$ – число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы; N_A – число Авогадро; R – универсальная газовая постоянная; $\nu = m / M$ – число молей вещества; m и M – соответственно его полная и молярная массы.

Подсчёт поступательных и вращательных степеней свободы атомов и различных молекул иллюстрирует рис. 1.

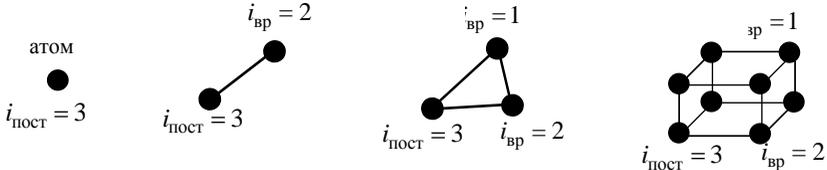


Рис. 1

Для расчёта теплоёмкости используют *первый закон термодинамики*:

$$Q = \Delta U + A \quad (2)$$

или, при бесконечно малом изменении состояния газа,

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV, \quad (3)$$

где $Q, \delta Q$ – количество теплоты, переданной рабочему телу (газу); $\Delta U, dU$ – изменение внутренней энергии газа; $A, \delta A$ – работа, совершённая газом; dV – изменение объёма. Внутренняя энергия является

однозначной функцией состояния газа, тогда как теплота и работа зависят от процесса перехода из одного состояния газа в другое. Поэтому с математической точки зрения dU – полный дифференциал функции U , тогда как $\delta Q, \delta A$ – бесконечно малые количества (иногда обозначаемые как $d'Q, d'A$).

Теплоёмкость – количество теплоты, поглощаемой макросистемой при нагревании на 1 градус (1°C или 1°K):

$$C_{\text{сист}} = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (4)$$

Различают молярную (одного моля), удельную (единицы массы) и полную теплоёмкость системы. Как и количество тепла δQ , теплоёмкость зависит от теплового процесса. Например, $C_{\text{адиаб}} = 0$, $C_{\text{изотерм}} = \infty$.

В изохорном процессе $\Delta V = 0$, $A = 0$, $Q = \Delta U$, поэтому молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (5)$$

Для изобарного процесса из (1) и (3), используя уравнение Клапейрона–Менделеева

$$PV = \nu RT,$$

получаем

$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + PdV}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + \nu R dT}{dT} = \frac{i+2}{2} R.$$

Отсюда получаем связь C_P и C_V (уравнение Майера):

$$C_P = C_V + R.$$

Тогда показатель адиабаты равен:

$$\boxed{\gamma_{\text{теор}} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}} \quad (6)$$

Вышеизложенная классическая теория не смогла правильно описать некоторые явления. Например, независимость теплоёмкости C_V в (5) от температуры опровергается опытом. Согласовать классическую теорию с экспериментом удалось, только предположив, что некоторые степени свободы в определённом диапазоне температур не возбуждаются, «вымораживаются». Например, согласие с опытом при $T \sim 300$ К достигается, если считать, что не возбуждаются колебания молекул. Это явление было объяснено только в квантовой теории.

Учитывая для двухатомных молекул с жёсткой связью атомов только поступательные и вращательные степени свободы, получаем $i = 5$, а из (6) $\gamma_{\text{теор}} = 1,4$.

С теоретическим значением γ для двухатомного газа (воздух на 90 % состоит из двухатомных молекул) следует сравнить значение, полученное в эксперименте.

2. Метод Клемана и Дезорма

Одним из самых простых и остроумных методов определения γ является метод Клемана и Дезорма, основанный на использовании адиабатических и изохорических процессов в воздухе, находящемся в сосуде (рис. 2).

В процессе эксперимента мы будем накачивать воздух в стеклянный сосуд и выпускать его из сосуда. Объём сосуда V_c , естественно, постоянен, а количество воздуха в нём, т. е. число молей газа ν , будет изменяться. Это означает, что уравнение Клапейрона–Менделеева можно переписать в виде

$$P \frac{V_c}{\nu} = RT$$

и в дальнейшем рассматривать молярный объём $V_c/\nu = V$, занимаемый 1 молем газа при данных условиях T и P .

На рис. 2 такой объём показан штриховой линией внутри сосуда. Естественно, воображаемую границу объёма V непрерывно пересекают мо-

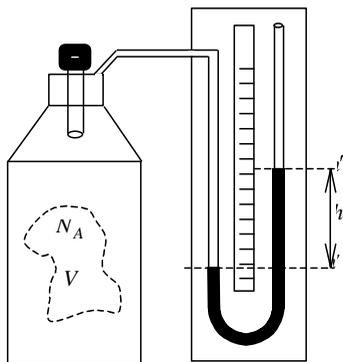


Рис. 2

лекулы газа. Однако в условиях теплового равновесия среднее число молекул внутри объёма не меняется. Можно рассматривать объём, занимаемый и другим количеством газа, лишь бы во всех процессах этот объём не превышал V_c .

Суть метода, согласно замыслу Клемана и Дезорма, иллюстрирует рис. 3, на котором в координатах $P - V$ приведены графики всех процессов эксперимента.

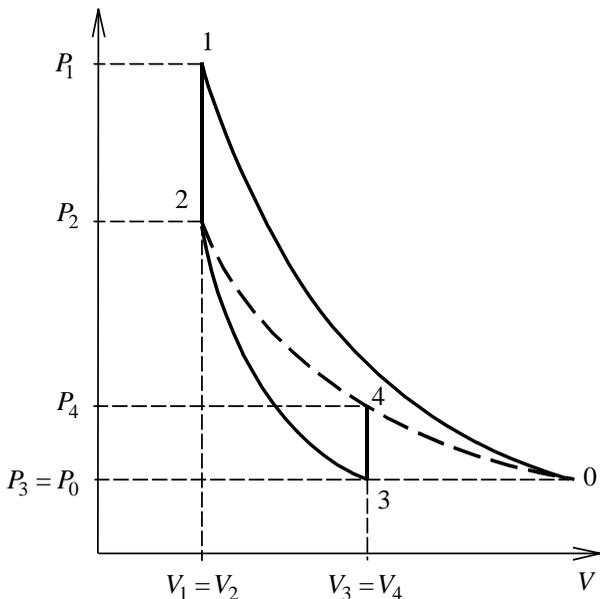


Рис. 3

Итак, перечислим процессы, происходящие с воздухом.

1. Кривая 0 – 1 соответствует подготовительному этапу – накачиванию воздуха в баллон. Число молей газа внутри баллона при этом возрастает. Отношение объёма к числу молей в баллоне уменьшается, что и отражает кривая 0 – 1. Давление газа в баллоне увеличивается от атмосферного P_0 до некоторого давления P_1 . При сжатии работа газа $A \sim \Delta V < 0$. Согласно (2), изменение внутренней энергии $\Delta E = Q - A$. В адиабатическом процессе ($Q = 0$) повышение температуры $\Delta T \sim \Delta E > 0$ будет максимальным. Реальный процесс сжатия, вообще

говоря, сопровождается отдачей тепла во внешнюю среду ($Q < 0$), которую можно уменьшить, проводя накачивание достаточно быстро.

2. Как только накачивание прекращается, давление в баллоне начинает падать при неизменном объёме, что является следствием остывания газа (закон Шарля). На участке 1 – 2 температура снижается до комнатной за счет теплообмена с окружающей средой. Давление при этом уменьшается от P_1 до P_2 .

3. Когда давление перестает изменяться (точка 2), резко выпускаем воздух из баллона. Будем считать, что это адиабатическое расширение (кривая 2 – 3). В результате приведённый объем рассматриваемой массы газа увеличивается от $V_2 = V_1$ до $V_3 = V_4$, температура должна понизиться. Давление воздуха уменьшается от P_2 до атмосферного $P_3 = P_0$.

4. Затем на участке 3 – 4 объем газа выдерживаем постоянным – ещё один изохорический процесс. В точке 3 температура была ниже комнатной и теперь она повышается до комнатной за счет теплообмена с окружающей средой.

5. Заметим, что в точках 0, 4, 2 газ имеет одинаковую температуру – комнатную, т. е. эти точки лежат на одной изотерме 0 – 4 – 2 (которую иногда называют «мысленной» или «гипотетической», подчёркивая, что реально изотермического процесса 0 – 4 – 2 не происходило). Это обстоятельство позволило Клеману и Дезорму обойтись без измерения начального и конечного объемов газа. Именно в этом и заключается «изюминка» предложенного метода.

Рассмотрим систему уравнений, соответствующих процессам 2 – 3, 3 – 4 и 4 – 2. Для точек 2 и 3, лежащих на одной адиабате, $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$, или, так как $P_3 = P_0$,

$$P_2 V_2^\gamma = P_0 V_3^\gamma. \quad (5)$$

Для точек 2 и 4, лежащих на одной мысленно проведенной изотерме, по закону Бойля–Мариотта

$$P_2 V_2 = P_4 V_4. \quad (6)$$

Кроме того, прямая 3 – 4 изображает изохорический процесс, для которого

$$V_3 = V_4. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем

$$V_2 = \frac{P_4}{P_2} V_3. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получаем уравнение

$$\left(\frac{P_4}{P_2} \right)^\gamma = \frac{P_0}{P_2}. \quad (9)$$

Логарифмируя (9), выражаем γ через атмосферное давление P_0 и давления в состояниях 2 и 4, которые требуется измерить в процессе эксперимента:

$$\gamma = \frac{\ln P_0 - \ln P_2}{\ln P_4 - \ln P_2} = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4}. \quad (10)$$

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка состоит из стеклянного сосуда, закрытого пробкой, в которую вмонтированы две трубки и быстродействующий клапан для выпуска воздуха из сосуда (см. рис. 1). Одна трубка соединяет полость сосуда с манометром. Манометром служит U-образная трубка, наполненная подкрашенной водой. Давление измеряется по разности уровней в коленях трубки. Вторая трубка через клапан соединяет полость баллона с насосом (не показана на рис. 1).

Процесс 2–3, строго говоря, не является адиабатическим, так как стеклянный сосуд, используемый в лабораторной работе, не теплоизолирован. Поэтому расширение воздуха, чтобы уменьшить потери тепла, следует производить быстро, нажимая на клапан в течение двух секунд. Однако следует обратить внимание на другую сторону «быстроты» выполнения процесса. Уравнение, описывающее адиабатический процесс, $PV^\gamma = \text{const}$, справедливо лишь для равновесных, квазистатических, процессов. На вопрос, можно ли считать столь быстрое адиабатическое расширение квазистатическим (равновесным) процессом, видимо, можно дать положительный ответ на основании двух следующих оценок.

1. При выпуске воздуха из баллона давление внутри баллона уменьшается примерно на 10 см водяного столба. Атмосферное давление составляет примерно 10 м водяного столба. Следовательно, отно-

сительное отклонение давления от равновесного атмосферного невелико – порядка 1 %.

2. При выпуске воздуха из баллона внутри него около выпускного крана создаётся некоторое разрежение. Это возмущение распространяется внутрь баллона со скоростью звука в воздухе. Если принять характерный размер баллона равным 0,7 м, а скорость звука равной 330 м/с, то указанное возмущение распространится на весь объём за время около 0,002 с. В результате многократных отражений от различных участков стенок баллона первоначальное возмущение равномерно распределяется по всему объёму. За две секунды в нашем баллоне должно произойти около тысячи отражений. Этого, надо полагать, вполне достаточно для установления равновесия.

Измерение. Для величины давления воздуха в баллоне в состоянии, соответствующем точке 2 на рис. 2, имеем

$$P_2 = P_0 + \rho gh_1 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right),$$

где P_0 – атмосферное давление; ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; h_1 – разность уровней в U-образной трубке, а ρgh_1 , таким образом, – разность между атмосферным давлением и давлением воздуха в баллоне после первоначального накачивания воздуха и охлаждения его до комнатной температуры. Аналогично для давления воздуха в баллоне после адиабатического расширения и нагревания до комнатной температуры (т. е. в состоянии, обозначенном на рис. 2 точкой 4) получаем

$$P_4 = P_0 + \rho gh_2 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right),$$

где h_2 – разность уровней в U-образной трубке при втором измерении давления (в точке 4). Подставив эти выражения в формулу (9), получим выражение для определения γ :

$$\gamma = \frac{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right)} =$$

$$= \frac{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0} \right) - \ln P_0 - \ln \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0} \right)}. \quad (11)$$

В нашем случае, как уже отмечалось выше, $\frac{\rho g h_1}{P_0} \ll 1$ и $\frac{\rho g h_2}{P_0} \ll 1$. Используя известное свойство логарифмов $\ln 1 + x \approx x$ при $|x| \ll 1$, из формулы (11) получаем

$$\gamma = \frac{\frac{\rho g h_1}{P_0}}{\frac{\rho g h_1}{P_0} - \frac{\rho g h_2}{P_0}}.$$

Итак,

$$\boxed{\gamma_{\text{эксп}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}} \quad (12)$$

Таким образом, эксперимент сводится к измерениям h_1 и h_2 , которые являются косвенными измерениями, поскольку фактически h_1 и h_2 вычисляются как разности уровней воды в U-образной трубке. Прямыми в данной работе являются измерения уровней воды в U-образной трубке слева и справа: h'_1 , h'_2 и h''_1 , h''_2 – координаты уровней воды в левой и правой трубках при измерении соответствующих давлений $h_1 = h''_1 - h'_1$ и $h_2 = h''_2 - h'_2$.

Оценка погрешности измерения γ . Доверительный интервал по многократным измерениям величины γ (формула (11) вводного занятия) при $N = 3$, $P = 0,95$:

$$\gamma = \bar{\gamma} \pm \frac{t(P, N) s_\gamma}{\sqrt{N}} = \bar{\gamma} \pm \frac{4,3 s_\gamma}{\sqrt{3}} = \bar{\gamma} \pm 2,48 s_\gamma, \quad (12)$$

где выборочное СКО величины γ :

$$s_\gamma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i^N \gamma_i - \gamma^2}. \quad (13)$$

4. Задание

1. Измерьте γ три раза.
2. Рассчитайте выборочное СКО s_γ по формуле (13).

Сравните значение γ , полученное экспериментально, с теоретическим значением для жёстких двухатомных молекул.

5. Контрольные вопросы

1. Какие бывают теплоёмкости, почему они зависят от типа процесса?
2. Что такое молярная и удельная теплоёмкости, какова их связь?
3. Что такое степени свободы в молекулярно-кинетической теории газов? Чему равно число степеней свободы двухатомной или трёхатомной молекулы, жёсткой или с упругими связями между атомами?
4. Что такое γ ? Как эта величина связана с числом степеней свободы молекулы? Выведите эту связь на основе первого начала термодинамики.
5. Нарисуйте на $P - V$ -диаграмме все процессы, используемые для измерения γ (исходное состояние обозначьте нулевым номером). Запишите уравнения этих процессов.
6. Какой объём изображается на $P - V$ -диаграмме по одной из координатных осей?
7. Какому процессу принадлежат состояния в точках 0, 4, 2?
8. Объясните, почему в некоторых из рассматриваемых процессов возникает отклонение температуры от комнатной?
9. Выведите формулу, выражающую связь γ с измеряемыми давлениями.
10. Что измеряет U-образный манометр? Как соотносятся давления, измеряемые манометром, с атмосферным давлением?

11. Выведите формулу, выражающую γ через показания манометра.

12. Сопоставятся ли полученное вами значение γ с теоретическим? Чем может быть объяснено расхождение $\gamma_{\text{теор}}$ и $\gamma_{\text{эксп}}$?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1 (любой год издания).

Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).

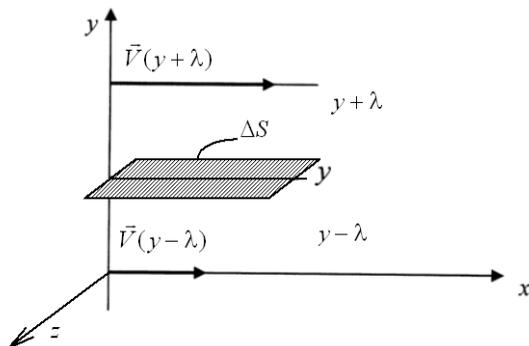
Лабораторная работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТИ) ЖИДКОСТИ ПО МЕТОДУ СТОКСА

Цель работы: определение коэффициента внутреннего трения η жидкостей и сравнение найденных его экспериментальных значений с табличными значениями.

1. Вывод формулы для коэффициента вязкости

Возникновение внутреннего трения в газах и жидкостях связано с переносом импульса в направлении, перпендикулярном скорости жидкости. Если скорость направленного движения $\vec{V}(y) = (V(y), 0, 0)$ в потоке жидкости изменяется от слоя к слою (см. рисунок), то на границе между слоями возникает сила, связанная с тем, что молекулы, переходящие из быстрого слоя в медленный, ускоряют медленный слой, а молекулы, переходящие из медленного слоя в быстрый, тормозят быстрый слой. Для случая плоского течения жидкости (газа) силу трения между слоями можно оценить, используя приведенный ниже рисунок, следующим образом [1–3].



Пусть в направлении оси x течет жидкость, причем существует градиент скоростей направленного движения жидкости $d\vec{V}/dy \neq 0$ вдоль оси y . Такой градиент скоростей можно осуществить в аква-

риуме в слоях жидкости между дном и поверхностью, двигая с постоянной скоростью параллельно оси x доску, лежащую на поверхности жидкости. Верхние слои жидкости, прилегающие к доске, вследствие трения между жидкостью и доской, будут двигаться с максимальной скоростью, нижние слои из-за внутреннего трения в жидкости также придут в движение, скорость направленного движения жидкости с приближением ко дну аквариума будет уменьшаться.

Для силы трения, приходящейся на единицу площади площадки ΔS , расположенной параллельно оси x (касательного «натяжения» σ_x внутри жидкости в направлении оси x), исходя из второго закона Ньютона можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\Delta F_x}{\Delta S} = \frac{(1/6)(mn\bar{V}_{\text{тепл}}) V(y-\lambda) - V(y+\lambda) \Delta S}{\Delta S} \cong \\ &\cong -\frac{1}{3} mn\bar{V}_{\text{тепл}} \lambda \frac{dV}{dy} = -\eta \frac{dV}{dy}, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\eta = \frac{1}{3} nm\bar{V}_{\text{тепл}} \lambda$ – коэффициент внутреннего трения жидкости, выражающийся через массу молекулы m , концентрацию n , среднюю скорость теплового движения $\bar{V}_{\text{тепл}}$ и длину свободного пробега λ молекул. При получении формулы (1) учтено, что число молекул жидкости, пересекающих единичную площадку, расположенную посередине между слоями жидкости с координатами $y-\lambda$ и $y+\lambda$ за секунду в положительном и отрицательном направлениях оси y , из-за теплового их движения, равно $(1/6)n\bar{V}_{\text{тепл}}$. Молекулы, переходящие через слой с координатой y из слоев с координатами $y \pm \lambda$, переносят импульс $\mp mV(y \pm \lambda)$ направленного движения, это и приводит к возникновению внутреннего трения между слоями жидкости, характеризуемого выражением (1).

Стокс установил, что сила трения, действующая на медленно движущийся в жидкости шар, равна

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta rV, \quad (2)$$

где V – скорость и r – радиус шара. Условием «медленности» является малость безразмерного числа Рейнольдса

$$\text{Re} = 2\rho_0 V r / \eta \ll 1, \quad (3)$$

где ρ_0 – плотность жидкости. Для практического использования формулы Стокса отметим, что при значениях числа Рейнольдса $\text{Re} \cong 0,01$ экспериментально измеренная сила сопротивления и сила, вычисленная по формуле (2), отличаются не более чем на 1 %, в случаях же $\text{Re} \cong 1$ экспериментальные значения силы трения больше расчетных примерно на 20 %.

При движении шара в жидкости кроме силы трения (2) на него действуют сила Архимеда

$$F_A = (4/3)\pi r^3 \rho_0 g \quad (4)$$

и сила тяжести

$$F_T = (4/3)\pi r^3 \rho g, \quad (5)$$

где ρ – плотность материала шара; g – ускорение свободного падения. Скорость свободно падающего в жидкости шара возрастает до момента, когда сила тяжести уравнивается силой Архимеда и силой сопротивления. Затем шар движется равномерно. Условие равномерного движения шара имеет вид

$$(4/3)\pi r^3 (\rho - \rho_0) g - 6\pi \eta r V = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что при равномерном падении шара в жидкости время t движения шара связано с высотой его падения h формулой $h = Vt$, из (6) получаем формулу для расчета коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{2r^2 (\rho - \rho_0) g t}{9h}. \quad (7)$$

2. Задания

1. Бросая стальные шарики известного диаметра в первую жидкость (глицерин), измерьте время их падения на участке равномерного движения.

2. Вычислите η для глицерина по формуле (7) и оцените среднеквадратичную погрешность σ_η по формуле для прямых измерений. (Опыт проделайте не менее чем с четырьмя-пятью шарами.)

3. Повторите измерения и расчеты для второй жидкости.

4. Используя полученные значения η , оцените величину числа Рейнольдса по формуле (3) для каждой жидкости и использованных в эксперименте шаров.

3. Контрольные вопросы

1. Какая величина измеряется в работе? Дайте ее определение.

2. Поясните смысл коэффициента внутреннего трения η . Какова его размерность?

3. Объясните природу сил внутреннего трения и выведите формулу (1).

4. При каких условиях шар движется равномерно?

5. Используя табличные значения η , оцените, какой путь должен пройти шар, прежде чем его скорость станет постоянной.

6. Согласуются ли найденные значения η с табличными?

7. Выполняется ли условие (3) в вашей работе?

Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – Т. 1. – М.: Наука (любое издание).

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высшая школа (любое издание).

3. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1981. (§ 13, с. 50–52).

Лабораторная работа № 7

ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Цель работы: проверка применимости распределения Больцмана к газу электронов, эмитированных из нагретого металлического катода, и определение температуры электронного газа.

1. Теория

В результате термоэлектронной эмиссии вблизи нагретого катода электронной лампы возникает «облако» электронов или электронный газ с температурой T , равной температуре катода. При включении между катодом и анодом некоторой задерживающей разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_K = U$ электронный газ оказывается во внешнем силовом электрическом поле типа гравитационного поля притяжения.

В состоянии термодинамического равновесия в электронном газе при температуре T устанавливается распределение Больцмана по координатам микрочастиц:

$$dP(\vec{r}) = \frac{n(\vec{r})}{N} d^3\vec{r} = A e^{-\frac{W(\vec{r})}{k_B T}} d^3\vec{r} = A e^{-\frac{q\varphi(\vec{r})}{k_B T}} d^3\vec{r}. \quad (1)$$

Здесь $dP(\vec{r})$ – вероятность найти электрон в объеме $d^3\vec{r}$ в окрестности точки с радиусом-вектором \vec{r} ; N – полное число электронов в газе; A – нормировочная постоянная; $n(\vec{r})$ – концентрация электронов и $W(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$ – потенциальная энергия электрона с зарядом q во внешнем поле в точке с радиусом-вектором \vec{r} ; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Из распределения Больцмана получаем следующее выражение для концентрации электронов n вблизи анода:

$$n = n_0 e^{-\frac{q(\varphi_A - \varphi_K)}{k_B T}} = n_0 e^{-\frac{qU}{k_B T}}. \quad (2)$$

Концентрация n_0 электронов вблизи поверхности катода определяется температурой катода. В эксперименте сила тока накала сохраняется постоянной, поэтому постоянны температура катода и температура «электронного облака». Вследствие этого можно считать, что

$n_0 = \text{const}$. Если внешний участок анодной цепи замкнуть, то в ней возникнет электрический ток.

Используя выражение $I = qn\langle V \rangle S$ для силы установившегося анодного тока через концентрацию n , среднюю скорость $\langle V \rangle$ движения электронов и площадь поверхности S анода, учитывая зависимость (2), выводим зависимость анодного тока лампы от анодного напряжения U :

$$I = I_0 e^{-\frac{qU}{k_B T}}. \quad (3)$$

Логарифмируя последнее выражение, получим

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{qU}{k_B T} = \ln I_0 + \frac{|q|U}{k_B T}. \quad (4)$$

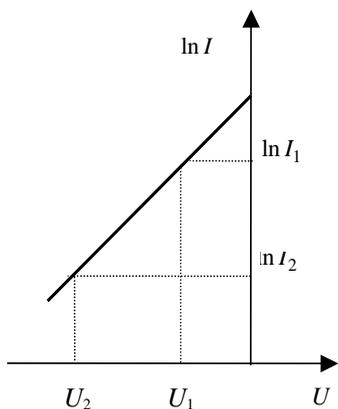


Рис. 1

Таким образом, если после обработки результатов эксперимента получится, что зависимость $\ln I$ от U окажется линейной, то это будет свидетельствовать о распределении электронов в постоянном электрическом поле в соответствии с законом Больцмана (1).

График зависимости (4) анодного тока от задерживающего напряжения $U = \varphi_A - \varphi_K < 0$ представлен на рис. 1. В эксперименте наблюдается отклонение от линейной зависимости при малых задерживающих потенциалах, которое можно объяснить влиянием пространственного заряда, образующегося вблизи

катода.

Температуру катода можно в соответствии с формулой (4) определить по угловому коэффициенту прямолинейного участка графика, а именно

$$T = \frac{|q|}{k_B} \frac{\Delta U}{\Delta(\ln I)} = \frac{|q|}{k_B} \frac{U_1 - U_2}{\ln I_1 - \ln I_2} = \frac{|q|}{k_B} \frac{U_1 - U_2}{\ln I_1 / I_2} = \frac{|q|}{k_B} \frac{|U_2| - |U_1|}{\ln I_1 / I_2}. \quad (5)$$

2. Описание эксперимента

Схема установки показана на рис. 2. В ней используется электровакуумный диод с катодом и анодом цилиндрической формы. Анодный ток измеряется микроамперметром, а напряжение на аноде – вольтметром. При этом нужно учитывать падение напряжения на амперметре:

$$U = U_I - IR. \quad (6)$$

Здесь U – напряжение между анодом и катодом; U_I – напряжение, показываемое вольтметром; I – анодный ток; R – внутреннее сопротивление микроамперметра.

Изменяя напряжение на аноде и измеряя ток, можно построить график экспериментальной зависимости $\ln I$ от U (см. рис. 1) и по нему определить температуру электронного газа.

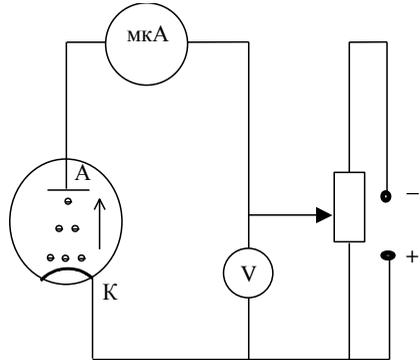


Рис. 2

3. Задание

1. Меняя анодное напряжение от $-1,2$ до 0 В через $0,05$ В, измерьте соответствующие значения анодного тока.

1. Постройте зависимость $\ln I$ от U , где U вычислите по формуле (3).

2. Вычислите и отложите на графике значения погрешностей σ_U и $\sigma_{\ln I}$.

3. Определите по графику температуру электронов, используя формулу (5).

4. Контрольные вопросы

1. Что такое распределение Больцмана?

2. Используя (1), вычисляя отношение концентраций электронов вблизи анода и катода, получите формулу (2) для концентрации электронов вблизи поверхности анода.

3. Получите зависимость анодного тока (3) от задерживающего напряжения.

4. В каких координатах нужно строить график зависимости анодного тока от задерживающего напряжения? Почему?

5. Как по графику можно определить температуру электронов?

6. Получилась ли ожидаемая зависимость анодного тока от задерживающего напряжения?

7. Как соотносятся температуры электронного газа в электронной лампе и молекул воздуха при нормальных условиях? Сравните средние скорости теплового движения электронов и молекул воздуха.

Литература

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Наука. Т. 1 (любое издание).

2. Электричество и магнетизм. Физический практикум / Под ред. В.И. Ивероной. – М.: Наука, 1968. (с. 72–78).