PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

1. Лабораторная установка

В лабораторной работе измеряется время соударения τ двух одинаковых стальных шаров, подвешенных на проводящих нитях.

Цель лабораторной работы: провести многократные измерения времени соударения шаров, исследовать статистическое распределение времени соударения (построить гистограмму, описать её).

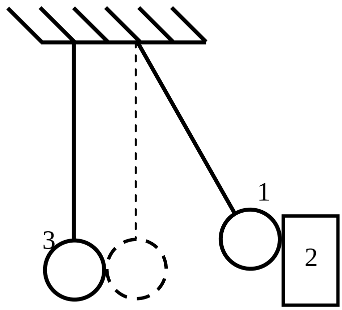


Рис. 1

Измерительная установка включается кнопкой «Сеть» на передней панели цифрового микросекундомера *МС*. Кнопку «Выбор работы» необходимо переключить в положение «Соударение шаров». Кнопка «Пуск» стирает предыдущее показание на индикаторе микросекундомера и переводит его в готовность к следующему измерению. Шар 1 (рис. 1) отводят в сторону до соприкосновения с ограничителем 2, при этом шар поднимается. Затем шар 1 отпускают. При движении шар соударяется со вторым, свободно висевшим шаром 3, через шары электрическая цепь замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряют микросекундомером.

Таблица измерений. Результаты многократных измерений следует представить в виде табл. 1. Здесь № – порядковый номер измерения, τ – измеренное время соударения в микросекундах. При полном числе измерений N = 50, как в данной работе, результаты удобно расположить в виде пяти столбцов по 10 измерений.

Таблица 1

№	τ (10^{-6} с)	№	τ (10^{-6} с)	
1 2 3 ⋮ 9 10		11 12 ⋮ ⋮ 19 20		…

В последующих лабораторных работах студент может самостоятельно выбрать форму таблицы измерений, например, записывать результаты по строкам или по столбцам, добавлять ячейки в таблицу для записи промежуточных и окончательных расчётов.

2. Математическая обработка результатов измерений

В данной лабораторной работе измеряемая величина обозначается двояко: τ (собственно время соударения) и x (всякая измеряемая величина).

Многократные измерения проводятся одно за другим, последовательно. Поэтому в табл. 1 результаты упорядочены по моменту измерения (не путать с длительностью соударения τ !). Нашей следующей задачей будет показать распределение результатов *по величине*. Однако привычный графический способ сравнения величин – нанести точки на числовую ось – становится не слишком наглядным, когда точек много.

Гистограмма (пример) – графический способ представления распределения большого числа данных. Предположим, что произведено *N* измерений времени соударения шаров, как говорят, получена *выборка N* измерений (из *генеральной совокупности* бесконечного числа измерений). Среди измеренных значений есть $\tau_{\min}$ и $\tau_{\max}$. Пусть, например, $\tau_{\min}$ = 110,6 мкс, $\tau_{\max}$ = 112,0 мкс. Разобьем промежуток $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ на $k \approx \sqrt{N}$ интервалов. При $N = 50$ возможные значения $k = 6$, 7 или 8. Рекомендуется выбирать нечётное число. Выберем $k = 7$. Ширина интервала

$$b = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{k}.$$

В нашем случае b = (112,0 – 110,6)/7 = 0,2 мкс. Нарисуем таблицу расчётов гистограммы (табл. 2). Здесь первый столбец – порядковый номер m интервала от 1 до k = 7. Второй столбец – границы интервалов, левая и правая.

Таблица

m	Границы интервалов	N_m	Относительная частота $P_m = N_m / N$
1	$\tau_{\min} = 110{,}60,\ \tau_{\min} + b = 110{,}80$	4	0,08
2	$\tau_{\min} + b,\ \tau_{\min} + 2b$	10	0,2
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$\tau_{\min} + 6b,\ \tau_{\max}$	2	0,04

В промежуточных расчётах необходимо брать 1–2 запасные значащие цифры по отношению к цене деления прибора. Цена деления микросекундомера 0,1 мкс, поэтому величину b следует округлять до 0,001 мкс, а границы интервалов – до 0,01 мкс. Именно так в табл. 2 записаны численные значения границ первого интервала.

Подсчитаем число измерений N_m, попавших в m-й интервал ($1 \le m \le 7$), т. е. выберем в табл. 1 значения τ, лежащие между левой и правой границами данного интервала. Если результат измерения попал точно на границу, его следует относить всегда к левому либо всегда к правому интервалу.

Пусть, например, в 1-й интервал, между $\tau_{\min}$ и $\tau_{\min} + b$ попало 4 измерения, во 2-й – 10 и т. д. Запишем значения N_m в 3-й столбец табл. 2. *При этом необходимо проверить, что сумма всех* N_m *равна полному числу измерений N*. Подсчитаем *относительную частоту попадания* в m-й интервал $P_m = N_m / N$ для каждого интервала и запишем все их в четвертый столбец таблицы. Сумма всех частот равна единице:

$$P_1 + \ldots + P_7 = \frac{N_1}{N} + \ldots + \frac{N_7}{N} = \frac{N_1 + \ldots + N_7}{N} = 1.$$

Мы все результаты измерений распределили по интервалам. Можно сказать, что вероятность попадания результата измерений в какой угодно интервал промежутка $\tau_{\min}; \tau_{\max}$ равна единице. Поэтому относительную частоту P_m называют *эмпирической, т. е. опытной, вероятностью* попадания результата измерений в m-й интервал.

Построим гистограмму. По горизонтали – ось измеряемой величины τ, по вертикали – ось эмпирической вероятности $P_m = N_m / N$ (рис. 2). Над каждым интервалом строим прямоугольник высотой P_m (ширина прямоугольника равна b). Гистограмма, представляющая собой ступенчатый график относительной частоты, наглядно показывает распределение результатов измерений.

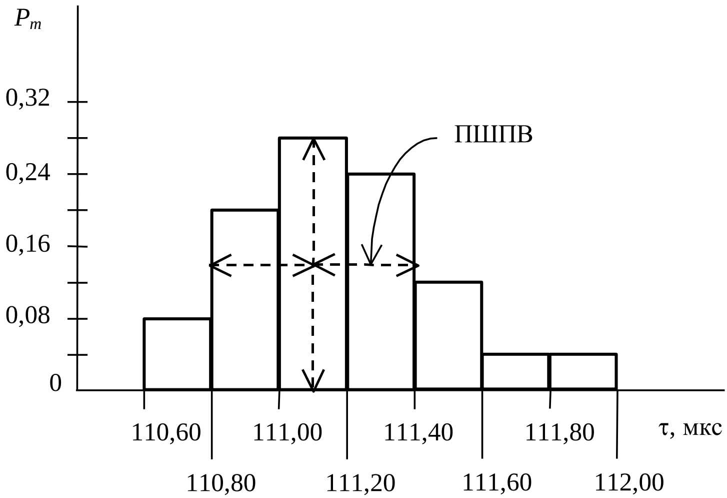


Рис. 2

Основные понятия теории измерений. Целью измерений является получение количественной информации об измеряемой физической величине, об её истинном значении $x_{\text{ист}}$. В метрологической практике истинным для данного измерительного прибора считают значение, измеренное более точным прибором.

Из-за множества причин измеренное значение x может не совпадать с $x_{\text{ист}}$. Следовательно, любые результаты измерений дают нам не точное значение $x_{\text{ист}}$, а лишь его оценку.

Меры погрешности. *Абсолютная погрешность* Δ (другие обозначения – Δx или Δ_x) – это отклонение измеренного значения от истинного:

$$\Delta = x - x_{\text{ист}}.$$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

В единичном измерении Δ может иметь произвольный знак. *Относительная погрешность* δ (другие обозначения – δx или δ_x) – это отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине:

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} \approx \frac{\Delta}{x} \quad \text{или} \quad \delta\ \% = \frac{\Delta}{x_{\text{ист}}} 100\ \%. \tag{1}$$

Виды погрешностей. По характеру изменения и причинам возникновения погрешности можно разбить на три класса: *систематические, случайные* и *грубые (промахи, выбросы).*

Систематические погрешности Δ_C (causal – причинный) постоянны для всей серии измерений или определённым образом зависят от условий измерения (времени, координаты, силы тока и т. п.). Причинами возникновения систематических погрешностей являются:

- отклонение параметров реального средства измерений от расчётных значений, например погрешность калибровки микросекундомера, постоянная разность в высоте подвеса шаров, сдвиг шкалы стрелочного прибора (в других лабораторных работах);
- влияние не учитываемых факторов, например посторонней засветки при фотометрических измерениях в оптике.

Обнаружение и учёт систематических погрешностей, устранение причин их возникновения – сложная метрологическая задача.

Случайные погрешности Δ_O (occasional – случайный), непредсказуемо изменяющиеся по величине и знаку от измерения к измерению, возникают в результате действия большого числа независимых неконтролируемых или недостаточно изученных причин. Вследствие этого при постоянных условиях многократных наблюдений одной и той же величины обнаруживается разброс результатов наблюдений. Случайную погрешность, вызванную микроскопическими явлениями, например тепловым движением молекул, можно в какой-то степени уменьшить, но полностью устранить нельзя. К случайному разбросу также приводит и действие большого числа независимо изменяющихся макроскопических причин. Такой разброс, аналогично систематическим погрешностям, можно уменьшить или устранить, расширяя число контролируемых условий и стабилизируя их.

Теоретически столкновение шаров изучается в приближении центрального удара, когда шары движутся вдоль линии, соединяющей их центры масс. *Поэтому в данной лабораторной работе необходимо*

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

еспечить стабильность положения и относительной скорости шаров в момент удара. Для этого следует:

- отрегулировать длину проводов так, чтобы центры свободно висящих шаров располагались на одной высоте;
- зафиксировать положение ограничителя 3 (см. рис. 1);
- следить за тем, чтобы шар касался ограничителя в одной и той же точке. Если этого не сделать, то точка контакта шаров будет от удара к удару случайным образом смещаться по горизонтали;
- свободно висящий шар должен быть перед ударом неподвижным.

Одним из основных признаков, по которому изменения измеряемой величины относят к систематическим или случайным, является скорость изменения. Если причина, вызывающая погрешность, изменяется медленно или тем более постоянна, её закономерность может быть выявлена измерениями. Быстрые изменения, не измеримые данным прибором, приводят к непредсказуемым отклонениям результатов измерений. С ростом быстродействия средств измерения переменные погрешности из случайных переходят в разряд систематических.

Грубые погрешности (промахи, выбросы) – аномально большие отклонения результата измерения, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Грубые погрешности возникают при резком однократном кратковременном изменении условий измерения (скачок напряжения в сети), а также из-за однократной ошибки экспериментатора в расчётах или при считывании показаний прибора.

Грубые погрешности обнаруживают с помощью статистических критериев. Результаты, содержащие грубые погрешности, отбрасывают. Такой пример будет рассмотрен ниже.

Теоретическая плотность вероятности. *В этом разделе измеряемая величина обозначена буквой* x. Эмпирические вероятности $P_m = N_m / N$ зависят от ширины интервала b, что может вызывать затруднения при сравнении гистограмм. Поэтому в математической статистике чаще используют вероятность, приходящуюся на единичный интервал изменения x, называемую *плотностью распределения вероятностей* или просто *плотностью вероятностей*:

$$p = \frac{N_m}{Nb}.$$

Если все ординаты на рис. 2 разделить на ширину интервала b, изменится только вертикальный масштаб гистограммы.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Рассмотрим поведение гистограммы, когда число измерений неограниченно возрастает, следовательно, увеличивается плотность расположения точек на числовой оси x. Поэтому величину b можно уменьшать, всё равно точки в каждый интервал попадут. Огибающая такой преобразованной гистограммы при $N \to \infty$ и $b \to 0$ (обозначим $b = dx \to 0$) перейдет в плавную кривую $p(x)$:

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ b\to 0}} \frac{N_m / N}{b} = p(x) = \frac{p(x)\,dx}{dx}.$$

Отсюда видно, что относительная частота или эмпирическая вероятность $P_m = N_m / N$ переходит в $p(x)dx$ – вероятность попадания результата в интервал $(x, x + dx)$. Графически это площадь бесконечно узкого прямоугольника со сторонами $p(x)$ и dx (заштрихован на рис. 3). Термин «площадь» в теории функций понимается шире, чем в геометрии: стороны прямоугольника не обязательно измеряются в метрах. Так, в нашем случае величина x, а также dx, τ и b измеряются в секундах, а размерность $[p(x)] = 1/[x]$, поэтому площадь $p(x)dx$ безразмерна.

Вероятность $P(x_1, x_2)$ попадания результата в конечный интервал $[x_1, x_2]$ находят интегрированием плотности распределения:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

Она численно равна площади под кривой $p(x)$ на соответствующем интервале $[x_1, x_2]$. Полная площадь под кривой $p(x)$ равна единице как вероятность достоверного события: в какой-то из интервалов результат измерения обязательно попадёт.

В реальных физических экспериментах результат измерений часто определяется суммой не зависящих друг от друга факторов, каждый из которых вносит в сумму незначительный вклад. В пределе сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых принимает знания, распределённые по так называемому *нормальному закону* (*распределению Гаусса*):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2)$$

Это замечательное распределение обладает следующими свойствами (рис. 3):

1) существует наиболее вероятное значение x – *мода* распределения:

$$x(p = p_{\max}) = \mu;$$

2) отклонения x от μ в обе стороны встречаются одинаково часто: гауссово распределение симметрично относительно μ, поэтому среднее значение $\overline{x}$ равно μ;

3) чем больше отклонение x от μ, тем реже оно встречается;

4) мерой случайной погрешности, т. е. мерой отклонения x от центра распределения μ, является «сигма» σ – *стандартное* или *среднеквадратичное отклонение* (СКО), которое примерно равно полуширине на полувысоте (ПШПВ) гауссова распределения: ПШПВ $\approx 1{,}18\sigma$. (Англоязычный аналог этого термина – *HWHH* – half width on half height);

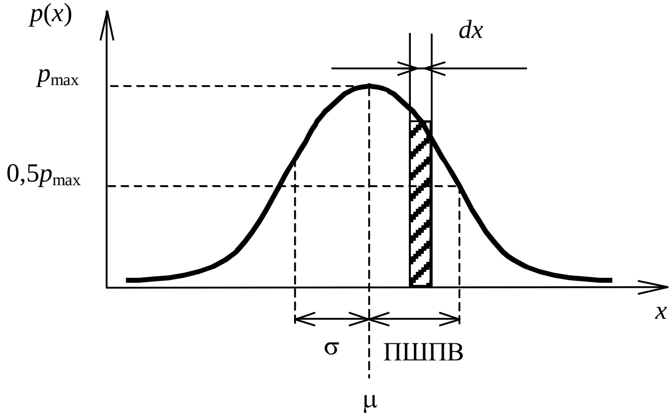


Рис. 3

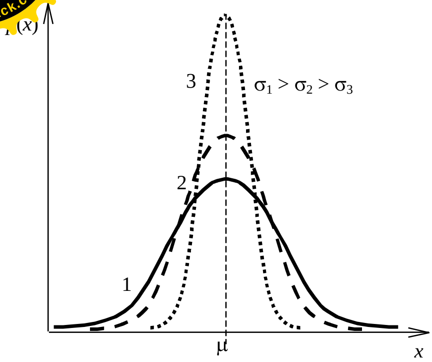


Рис. 4

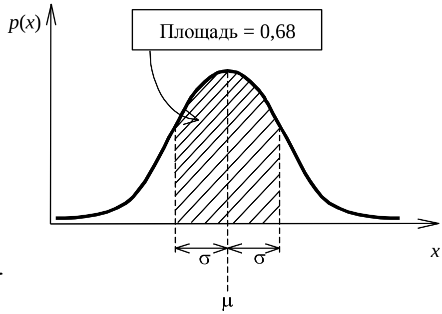


Рис. 5

5) при $\sigma \to 0$ всё распределение «стягивается» к одному значению $x = \mu$ (рис. 4), которое в отсутствие систематической погрешности и принимается за истинное значение $x_{\text{ист}}$. Следовательно, с точки зрения математической статистики *целью измерений является определение координаты центра распределения* $\mu = x_{\text{ист}}$;

6) в интервал $\pm\sigma$ вокруг μ попадает примерно 68 % всех результатов измерений (рис. 5), т. е. расстояние между неизвестным центром распределения μ и любым результатом измерений x_k $(k = 1 \ldots N)$ не превышает σ с вероятностью $P = 0{,}68$:

$$|x_k - \mu| \le \sigma, \quad P \approx 0{,}68. \tag{3}$$

В интервал $\pm 2\sigma$ вокруг центра попадает примерно 95 % всех результатов измерений, а в интервале $\pm 3\sigma$ (его также называют *шестисигмовым интервалом*) заключено 99,73 % всех результатов.

Анализ гистограммы. На рис. 6 показана последовательность получения общего результата измерений. Этапы «Построение гистограммы» и «Расчёт среднего и СКО» независимы, могут выполняться параллельно. Их результаты используются при проверке нормальности распределения.

Возможно удаление грубых погрешностей из выборки с повторением первых этапов.

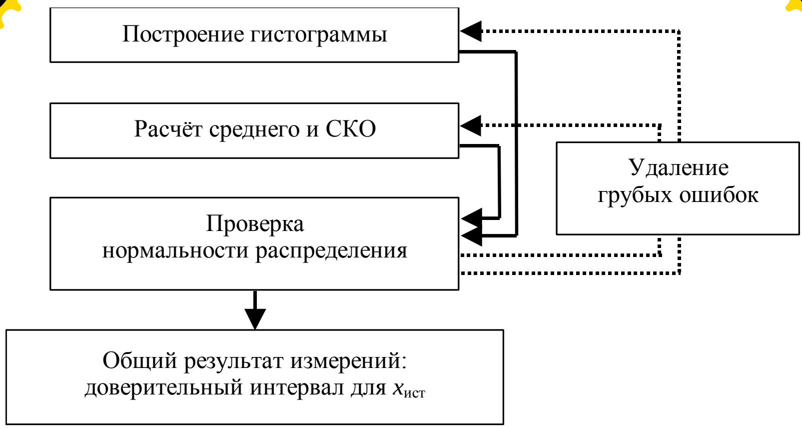


Рис. 6

Расчёт среднего и СКО. Расчётной оценкой центра функции плотности вероятности μ является *выборочное среднее* $\bar{x}$ (т. е. среднее арифметическое значение выборки):

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i \,. \tag{4}$$

Оценкой случайной погрешности σ является *выборочное среднеквадратичное отклонение s* (СКО):

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \,. \tag{5}$$

Многие из инженерных калькуляторов имеют режим статистических вычислений STAT (другие обозначения – *SD* или σ), существенно упрощающий вычисления по формулам (4), (5). Обозначения используемых функций в этом режиме: *DATA* («ДАННЫЕ») – ввод данных одного за другим; после введения всех данных достаточно нажать кнопку $\bar{x}$ – вывод на индикатор искомого среднего и кнопку σ (другие обозначения – σ_{n-1}, s или s_{n-1}) – вывод на индикатор искомого СКО.

Проверка нормальности распределения – важный этап статистического анализа данных. Формулы (4), (5) применимы только к нормальному распределению. Если выборка не принадлежит нормальной неральной совокупности, то, вообще говоря, использовать (4), ( ) некорректно.

Мы проведём простейшую оценку нормальности распределения по двум критериям:

- форме гистограммы;
- отношению ПШПВ гистограммы к выборочной СКО.

Форма гистограммы: если огибающая гистограммы симметрична и колоколообразна, пусть даже приближённо, как на рис. 2, – это один из признаков нормального распределения результатов измерений.

Определим ПШПВ гистограммы (штриховые линии на рис. 2). Разделим пополам максимальную высоту гистограммы и обозначим на этом уровне её ширину. Половина этого отрезка и есть полуширина на полувысоте ПШПВ.

Отношение ПШПВ/σ: если отношение близко к единице, а именно лежит в пределах 0,7…1,5, это тоже признак нормального распределения.

Если выполняются оба признака, то результаты измерений подчиняются нормальному закону. Как говорят, нормальное распределение не отвергается. Можно переходить к расчёту общего результата измерений – доверительного интервала.

Если один из признаков отсутствует – нормальное распределение сомнительно. Если не выполняются оба признака – нормальное распределение, как говорят, отвергается. Следует искать причину анормальности результатов.

Например, если гистограмма имеет два максимума (рис. 7), то наиболее вероятная причина – однократное постоянное по величине изменение условий измерения, например, сдвинули ограничитель для шара («один раз уронили микроскоп и продолжили измерения, не проверив его настройку»). В подобной ситуации, вообще говоря, следует повторить серию измерений.

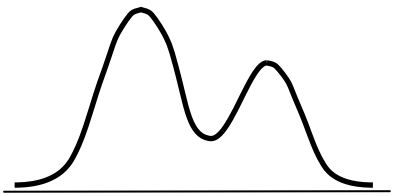
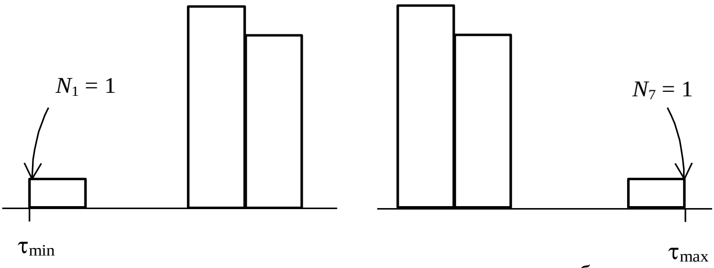


Рис. 7

Наши критерии просты, но приближённы. Математически более сложный, но и более достоверный анализ (например, по критерию χ^2 – «хи-квадрат») в случаях, признанных нами сомнительными, может как подтвердить нормальность, так и отвергнуть [4, 5].

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Грубая погрешность. Иногда на гистограмме есть крайний изолированный прямоугольник, содержащий всего одно значение, обязательно минимальное или максимальное (рис. 8).



а *б*

Рис. 8

Возможно, аномально отклоняющееся значение является грубой ошибкой. Проверить это можно с помощью *правила трёх сигм*. По свойствам нормального распределения в шестисигмовый интервал попадает 99,73 % всех нормально распределённых результатов. На долю отклонений от центра распределения, превышающих 3σ, приходится всего $0{,}27\,\% < 1/300$ от общего числа измерений. Поэтому достоверные сильно отклоняющиеся значения могут появиться при $N >$ 300…1000, а при $N = 50$ они крайне маловероятны. Зато велика вероятность ошибочной записи одного из 50 многозначных чисел или сбоя микросекундомера.

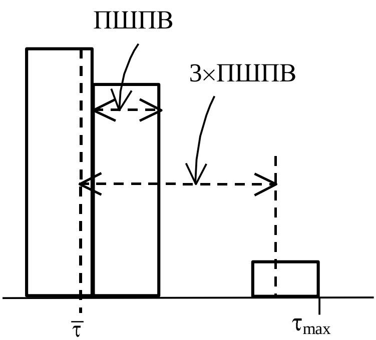


Рис. 9

На горизонтальной оси гистограммы отмечаем среднее значение $\bar{\tau}$ и откладываем от него интервал 3×ПШПВ (рис. 9). Если аномальное значение отклоняется от $\bar{\tau}$ больше чем на 3×ПШПВ, как на рис. 9, его следует считать грубой ошибкой, удалить из выборки в табл. 1 (*зачеркнуть, а не замазать!*) и, найдя новое крайнее значение τ, повторить построение гистограммы. Такая операция называется *цензурированием выборки* и может выполняться в цикле несколько раз, пока не останутся значения, лежащие в пределах 3×ПШПВ.

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

3. Общий результат измерений – доверительный интервал

Расчёт общего результата измерений зависит от вида измерений, которые подразделяют на прямые и косвенные, однократные и многократные (табл. 3).

Таблица 3

Измерения	
прямые	однократные
косвенные	многократные

Прямое измерение — это измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных, как, например, при измерении массы на циферблатных весах, температуры термометром, электрического напряжения стрелочным или цифровым вольтметром. С помощью цифрового микросекундомера в данной работе осуществляется прямое измерение интервала времени.

! **Прямое однократное измерение.** *Сведения, изложенные в этом разделе, необходимы для записи результатов всех последующих лабораторных работ.*

Возможна оценка истинного значения $x_{\text{ист}}$ по результату однократного измерения x_1, если предварительно на данной измерительной установке в одинаковых условиях проведены многократные измерения $(N > 30)$, в результате чего СКО σ определено с высокой точностью.

Используем шестое свойство нормального распределения (см. рис. 5): чем шире интервал вокруг центра распределения μ, тем больше результатов измерений в этом интервале. Формулу (3) можно обратить относительно неизвестного центра μ: с вероятностью $P = 0,68$ центр распределения удалён от любого единичного результата измерений x_1 на расстояние, не превышающее σ. Это условие записывают в виде *доверительного интервала* для истинного значения измеряемой величины:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm \sigma; \quad P = 0,68. \tag{6}$$

Аналогично можно записать доверительные интервалы $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$:

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 2\sigma, \quad P \approx 0,95; \tag{7}$$

$$x_{\text{ист}} \equiv \mu = x_1 \pm 3\sigma, \quad P \approx 0{,}9973. \qquad (8)$$

Все три варианта доверительного интервала показаны на рис. 10, причём отрезки σ и кратные ему изображены в масштабе числовой оси измеряемой величины x.

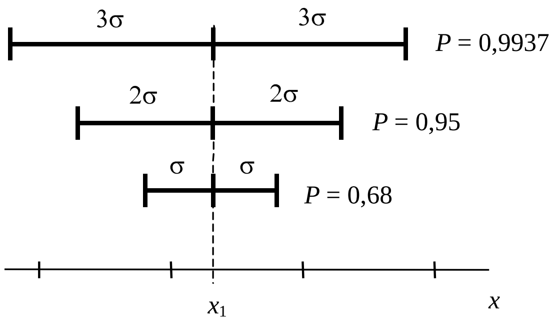


Рис. 10

Вероятность P, с какой истинное значение измеряемой величины может находиться в выбранном доверительном интервале, называется *доверительной вероятностью*. *Запись доверительного интервала без указания доверительной вероятности неполна*.

Доверительные интервалы (6)–(8) можно объединить в общую формулу с коэффициентом $t(P)$ при σ:

$$\boxed{\begin{gathered} x_{\text{ист}} = x_1 \pm t(P)\sigma, \quad P = \ldots \\ P = 0{,}68, \quad t = 1, \\ P = 0{,}95, \quad t = 2, \\ P = 0{,}9973, \quad t = 3 \end{gathered}} \qquad (9)$$

Чем больше доверительная вероятность, тем шире должен быть доверительный интервал вокруг измеренного значения, тем больше коэффициент $t(P)$. По таблицам в [2, 3] можно выбрать значения P, отличающиеся от приведённых в (9), и соответствующие им значения $t(P)$.

Метрологические нормативные документы рекомендуют записывать результат измерений для $P \geq 0{,}9$. Поэтому проще всего выбрать доверительный интервал $\pm 2\sigma$ для $P = 0{,}95$.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Допустима форма записи доверительного интервала в виде

$$x_1 - t(P)\sigma \le x_{\text{ист}} \le x_1 + t(P)\sigma\,, \qquad P = \ldots$$

Трёхкратное измерение. Единичное измерение может оказаться грубой погрешностью. Поэтому для повышения достоверности измерений рекомендуется провести не одно, а три измерения в неизменных условиях и в качестве центра доверительного интервала (9) взять среднее трёх измерений:

$$\boxed{\begin{gathered} x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm t(P)\sigma,\ P = \ldots \\ \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \end{gathered}} \qquad (10)$$

Среднеквадратичные отклонения измеряемых величин и исходных данных указаны на пояснительных табличках к каждой лабораторной работе.

Если погрешность прямого измерения не указана, она определяется исходя из погрешностей измерительных приборов.

1. Прибор с штриховой шкалой. Принято считать, что для шкалы с интервалом между штрихами 1 мм, рассматриваемой с расстояния наилучшего зрения 250 мм, погрешность отсчета равна 0,3…0,5 цены деления $C_{\text{дел}}$, т. е. в единицах измеряемой величины $\sigma = (0{,}3...0{,}5)\,C_{\text{дел}}$.

2. Погрешность цифрового прибора принимаем равной единице последнего разряда.

Прямые многократные измерения (дополнение *). *Сведения, изложенные в этом разделе, могут быть использованы в данной лабораторной работе для уменьшения погрешности измерений – в дополнительном задании.*

Если СКО измеряемой величины неизвестно, то его можно определить многократными, т. е. повторяющимися в одной и той же неизменной экспериментальной обстановке, измерениями. Этот метод и используется на вводном лабораторном занятии.

С увеличением числа измерений выборочное среднее (4) приближается к моде нормального распределения, а выборочное СКО (5)

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

…ремится к σ. Поэтому, казалось бы, можно по аналогии с (10) за… сать доверительный интервал

$$x_{\text{ист}} = \overline{x} \pm t(P)s, \quad P = \ldots$$

Однако при любом конечном числе измерений выборочное СКО может оказаться как больше, так и меньше неизвестного σ. Второй случай – самый опасный: при подстановке s вместо σ преуменьшается ширина доверительного интервала, расчётная погрешность оказывается меньше истинной. Заданную доверительную вероятность обеспечивают, расширяя интервал путём замены коэффициентов $t(P)$ на коэффициенты Стьюдента (табл. 4) $t(P, N) > t(P)$. Из таблицы видно, что, например, $t(P = 0{,}95;\, N) \approx t(P)$ только при $N \geq 30$, т. е. при таком большом числе измерений выборочное СКО s незначительно отличается от σ – СКО генеральной совокупности с бесконечным числом измерений.

Таблица 4

N	*P*				
	0,68	0,9	**0,95**	0,99	0,997
	t(*P*, *N*)				
2	1,84	6,3	**12,7**	63,6	212,3
3	1,32	2,9	**4,3**	9,9	182
4	1,20	2,4	**3,2**	5,8	9,0
5	1,14	2,1	**2,8**	4,6	6,4
6	1,11	2,0	**2,6**	4,0	5,4
7	1,09	1,9	**2,4**	3,7	4,8
8	1,08	1,9	**2,4**	3,5	4,4
9	1,07	1,9	**2,3**	3,4	4,2
10	1,06	1,8	**2,3**	3,2	4,0
15	1,04	1,8	**2,1**	3,0	3,6
20	1,03	1,7	**2,1**	2,9	3,4
30	1,02	1,7	**2,0**	2,8	3,2
50	1,01	1,7	**2,0**	2,7	3,1

С другой стороны, для сужения интервала, т. е. для уточнения оценки $x_{\text{ист}}$, используют свойство среднего значения: выборочное среднее $\overline{x}$ в (4) зависит от суммы случайных нормально распределённых результатов измерений x_k и потому само является случайной нормально распределённой величиной со среднеквадратичным отклонением среднего $\sigma_{\overline{x}}$. В математической статистике доказывается, что если результаты измерений не зависят друг от друга, то СКО выборочного среднего

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Точное значение σ неизвестно, однако при большом числе измерений $\sigma \approx s$, поэтому

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Видно, что отклонение $\bar{x}$ от μ при больших N уменьшается как $1/\sqrt{N}$. Это означает, что, хотя от измерения к измерению единичные результаты «прыгают» в среднем на σ, разброс выборочных средних от выборки к выборке по N случайных измерений уменьшается с ростом N, что и позволяет сузить доверительный интервал, проводя многократные измерения. Уменьшение случайного разброса путём усреднения многократных измерений широко используется в цифровых приборах.

Используя коэффициенты Стьюдента и переходя к выборочному СКО среднего значения, окончательно запишем доверительный интервал для результата многократных измерений;

$$\boxed{x_{\text{ист}} = \bar{x} \pm \frac{t(P,N)s}{\sqrt{N}}, \quad P = \ldots} \tag{11}$$

Важным свойством нормального распределения является вложенность доверительных интервалов: интервал для большего числа измерений целиком вложен в доверительный интервал для меньшего числа измерений (рис. 11). Для анормально распределённых результатов, как, например, на рис. 7, вложенность может нарушаться. Это обстоятельство можно использовать в качестве дополнительной проверки нормальности распределения.

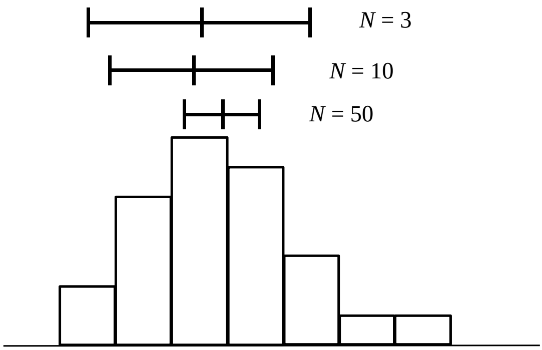


Рис. 11

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Косвенное измерение — измерение, при котором значение искомой величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными в прямых измерениях. Если измеряемая величина F связана с непосредственно измеряемыми величинами $x, y, z\ldots$ уравнением $F = F(x, y, z\ldots)$, то величину F вычисляют по указанному уравнению. Примерами косвенных измерений можно назвать определение плотности однородного тела по его массе и геометрическим размерам, определение скорости по длине пройденного пути за некоторый промежуток времени, определение электрического сопротивления проводника по разности потенциалов и силе электрического тока. Даже простое измерение длины тела с помощью линейки является, вообще говоря, косвенным, так как измеряемый размер L вычисляется как разность двух *координат* – начальной $x_{\text{н}}$ и конечной $x_{\text{к}}$, каждая из которых и является непосредственно измеряемой величиной.

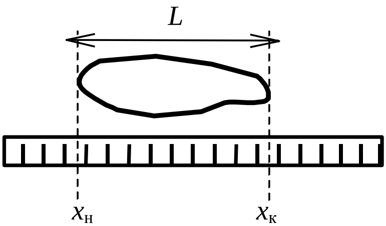


Рис. 12

Среднее значение косвенно измеряемой величины вычисляется подстановкой средних значений величин, измеренных непосредственно, в уравнение

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\ \ldots) \qquad (12)$$

Например, средняя длина тела равна $\bar{L} = \bar{x}_{\text{к}} - \bar{x}_{\text{н}}$. В погрешность длины дают вклад погрешности измерения обеих координат, начальной и конечной. Квадрат СКО σ^2 в математической статистике имеет особое название – *дисперсия*. Для погрешностей нормально распределённых величин справедливо *правило суммирования дисперсий*:

$$\boxed{\sigma_L^2 = \sigma_{\text{к}}^2 + \sigma_{\text{н}}^2} \qquad (13)$$

Дисперсия сложной функции складывается из частных дисперсий, соответствующих изменению статистически независимых аргументов, подобно тому, как дифференциал сложной функции складывается из частных дифференциалов:

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

$$\sigma_F^2 = \sigma_{F\;x}^2 + \sigma_{F\;y}^2 + \sigma_{F\;z}^2 + \ldots = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \ldots$$

Отсюда СКО функции F

$$\boxed{\sigma_F = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \ldots}\,\right|_{x=\bar{x},\,y=\bar{y},\,z=\bar{z}\ldots}} \qquad (14)$$

В лабораторных работах часто встречаются рациональные функции

$$F\;\; x, y, z\;\; = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{z^{\gamma}}.$$

Для них формула (14) упрощается: относительное СКО функции складывается из относительных СКО аргументов с соответствующими показателями степени:

$$\boxed{\frac{\sigma_F}{\bar{F}} = \sqrt{\left(\alpha\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\beta\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\sigma_z}{\bar{z}}\right)^2}} \qquad (15)$$

В *однократном косвенном измерении* проводят прямые однократные (*лучше трёхкратные*) измерения аргументов функции F. Доверительный интервал для однократного косвенного измерения записывается по формуле (10):

$$\boxed{F_{\text{ист}} = F\;\; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\;\; \pm t\;\; P\;\; \sigma_F\,, \;\; P = \ldots} \qquad (16)$$

4. Предварительная подготовка к выполнению лабораторных работ

1. Ознакомьтесь с теорией вопроса, изложенной в описании лабораторной работы и в указанной к ней литературе.

2. Найдите ответы на контрольные вопросы: каковы цель эксперимента, принцип действия измерительной установки; какие величины непосредственно измеряются, какие вычисляются, какую зависимость вы должны получить теоретически и исследовать практически в процессе эксперимента.

3. Заготовьте титульный лист отчета о лабораторной работе, второй и третий листы отчёта. Второй лист обычно содержит цель работы, таблицу приборов, исходные данные и рабочие формулы. Рабочие формулы содержат два основных принципиально различных блока: теоретические зависимости, подлежащие исследованию в процессе эксперимента, и расчётные формулы, используемые при косвенных измерениях физических величин, входящих в исследуемые зависимости. Расчётные формулы содержат также формулы для определения погрешностей измеряемых величин. Теоретические зависимости изобразите на небольших эскизах. На третьем листе расположите таблицу измерений.

4. На лабораторном занятии получите у преподавателя разрешение выполнять работу (допуск). Для этого необходимо:

а) ответить на контрольные вопросы;

б) уточнить объем измерений и форму таблицы измерений.

5. Оформление результатов лабораторных работ

1. В таблицу приборов для каждого прибора должны быть записаны наименование (например, вольтметр), тип, предел измерений (в единицах измеряемой величины), цена деления (видимая – для цифрового прибора, расчётная – для стрелочного), класс точности прибора и максимальная приборная погрешность.

2. В таблицу результатов измерений первичные данные следует заносить «как вижу», например, в виде числа делений без пересчета в другие единицы, чтобы исключить ошибки при снятии первичных данных. Для последующих промежуточных расчетов рекомендуется предусмотреть в таблице одну или несколько позиций (столбцов).

3. С целью сохранения точности рекомендуется в промежуточных результатах оставлять на 1–2 значащих цифры больше, чем в первичных данных. Значащими цифрами являются все цифры, кроме нулей впереди целой части числа.

4. Окончательное значение измеряемой величины записывают в виде доверительного интервала (10), (11) или (16).

5. Числовой результат следует представлять в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где целое число n – порядок числа a, а основа числа a_0 находится в промежутке [1,10], например, $e = 1{,}6021 \cdot 10^{19}$ Кл; $c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ $мс^{-1}$.

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Округление чисел. Известно правило округления: если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю оставляемую цифру не изменяют; если же первая отбрасываемая цифра равна или больше 5, то оставляемую цифру увеличивают на единицу. Однако относительная погрешность округления при этом меняется в слишком широких пределах. Например, округление числа 1,49 до одной значащей цифры [1] даст потерю точности вследствие большой ошибки округления (1,49 – 1) /1,49 = 0,33 = 33 %. Если же полученное число начинается, например, с цифры 9, то сохранение второго знака, т. е. указание 0,94 вместо 0,9 может, наоборот, явиться превышением точности, т. е. дезинформацией, так как исходные данные могут и не обеспечивать погрешность расчёта, равную (0,9 – 0,94)/0,94 ≈ 0,043 ≈ 4 %. Для уменьшения относительной погрешности округления вышеуказанное общее правило дополняют таким: если полученное число начинается с цифры, равной или большей 3, то в нём сохраняется лишь один знак, если же оно начинается с цифр, меньших 3, т. е. с цифр 1 и 2, то в нём сохраняют два знака.

В итоге можно сформулировать три *правила округления* рассчитанного значения погрешности и полученного экспериментального результата измерения.

1. *Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, если первая есть 3 и более.* Тогда погрешность округления не превышает 3,5 %. В соответствии с этим правилом установлены и нормируемые значения относительных погрешностей средств измерений: в числах 1,5 и 2,5 % указываются два знака, но в числах 0,5; 4; 6 % указывается лишь один знак.

2. *Значение центра доверительного интервала округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.* Например, результат расчета: x_1 = = 62,7 с; σ = 4,5 с. Тогда после округления x_1 до одной значащей цифры получаем σ = 5, а после округления x_1 до единиц получаем x_1 = 63. Окончательная запись результата измерения имеет вид $x = (63 \pm 5)$ с.

3. *Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним-двумя лишними знаками*.

6. Построение графиков

1. График строится на миллиметровой бумаге.

2. По горизонтальной оси обычно откладывают аргумент, а по вертикальной – его функцию. Для проверки теоретических зависимостей подбирают такие переменные, чтобы получить график в виде прямой линии, *линеаризуют* график. Например, график функции $y = ax^2$ можно построить в переменных y, x^2 или $\sqrt{y}, x$.

3. У осей должны быть проставлены обозначения и единицы размерности соответствующих величин. Масштабы по осям следует выбирать:

а) простыми (0,1 ед/см; 0,5 ед/см и т. д.), чтобы при построении не производить сложных вычислений;

б) масштабы и начала отсчёта по каждой оси должны быть такими, чтобы график занимал как можно бóльшую часть всего листа.

4. Размеры графика (гистограммы) по вертикали и по горизонтали должны относиться друг к другу примерно как 1:1 или 1:1,5, а экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.

5. По осям откладываются только масштабные единицы, а точки с координатами (x, y), полученными в эксперименте, наносятся на график. Более детально о построении графиков см. в [1].

6. К каждой экспериментальной точке x, y пристраивается доверительный интервал $\pm t\sigma_y$ вдоль оси y. Рекомендуется все доверительные интервалы вычислять при одном и том же значении доверительной вероятности.

7. Если экспериментальных кривых несколько, то возле каждой из них указать условия измерений и доверительную вероятность.

7. Задание к вводному занятию

1. Измерить время столкновения шаров $N = 50$ раз.

2. Построить гистограмму результатов измерений.

3. Графически оценить полуширину на полувысоте (ПШПВ) гистограммы.

4. По формулам (4) и (5) рассчитать выборочные среднее $\bar{\tau}$ и СКО σ_τ:

а) для $N = 50$;

б) * дополнительное задание – для любых трёх и десяти результатов измерений.

5. Обозначить среднее $\overline{\tau}$ на горизонтальной оси времени.

6. Провести, если необходимо, цензурирование выборки.

7. Найти отношение ПШПВ и СКО (для $N = 50$).

8. Сделать вывод, подтверждается или нет нормальное распределение результатов измерений.

9*. Дополнительное задание. Записать доверительный интервал для математического ожидания многократных измерений времени соударения шаров по формуле (11):

а) для $N = 3$; б) для $N = 10$; в) для $N = 50$.

10*. Изобразить на гистограмме полученные доверительные интервалы в виде отрезков, «привязав» их к оси времени.

11*. Сделать вывод о связи числа измерений с точностью определения истинного значения измеряемой величины.

8. Контрольные вопросы к вводному занятию

1. Объясните принцип построения гистограммы.

2. Как относительная частота отображается на гистограмме? Чему равна сумма всех частот?

3. Как по функции плотности вероятности графически определить вероятность попадания результата измерений в интервал $x, x + dx$?

4. Чему равна полная площадь под кривой функции плотности вероятности?

5. Запишите функцию нормального распределения, нарисуйте её график и укажите на графике её характерные параметры: а) моду случайной величины; б) математическое ожидание случайной величины; в) ПШПВ и СКО.

6. Как изменится график функции нормального распределения, если случайная погрешность измерений уменьшится?

7. Чему равна площадь под графиком нормального распределения в пределах: а) $\pm\sigma$ вокруг моды; б) в пределах $\pm 2\sigma$; в) в пределах $\pm 3\sigma$?

8. Что такое правило трёх сигм?

9. Какая выборочная величина является наилучшей оценкой: а) математического ожидания случайной величины; б) среднеквадратичного отклонения?

10. В прямом однократном измерении получен результат x. СКО измерительного прибора σ. Напишите формулу доверительного ин-

рвала для истинного значения измеряемой величины пр а) $P = 0,68$; б) $P = 0,95$. Что означает равенство $P = 0,68$ или $P = 0,95$?

11. Напишите формулу для СКО длины σ_L, если СКО начальной и конечной координат размера по шкале равны $\sigma_{\text{н}}$ и $\sigma_{\text{к}}$.

12*. Что такое среднеквадратичное отклонение среднего значения многократных измерений и как оно изменяется с увеличением числа измерений?

13*. Запишите формулу доверительного интервала прямых многократных измерений при: а) $P = 0,68$; б) $P = 0,95$.

9. Список литературы

1. *Холявко В.Н.* и *др.* Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

2. ГОСТ 8.207–76 Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. – М., 1977.

3. ГОСТ Р 50779.21–96 Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. – М., 1996. – Ч. 1. Нормальное распределение.

4. ГОСТ Р ИСО 5479–2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. – М., 2002.

5. Р50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. 1. Критерии типа хи-квадрат. – М., 2002.

6. СТ СЭВ 543–77. Числа. Правила записи и округления. – М., 1977.

7. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.

8. *Лавренчик В.Н.* Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

9. Дополнительная литература: *Джиджи К., Де Карло Н., Вильямс Б.* Шесть сигм для «чайников». – М.: Вильямс, 2008.