

Лабораторная работа № 1

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

В данной работе проводится измерение времени упругого соударения двух одинаковых стальных шаров для нескольких пар шаров различного диаметра.

Цель работы: сравнение экспериментально полученной зависимости времени соударения τ от диаметра шара D с теоретической зависимостью.

1. Описание установки и эксперимента

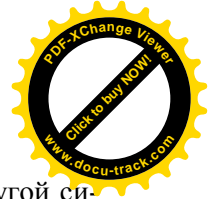
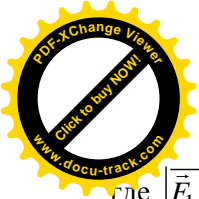
Два одинаковых металлических шара подвешены на проводящих нитях (см. рис. 1 Вводного занятия). Шар 1 отводят в сторону до соприкосновения с упором и при этом поднимают на высоту h . Затем шар отпускают. При движении шар соударяется со вторым, свободно висевшим шаром, вследствие чего через шары электрическая цепь замыкается. Время существования тока в этой цепи, считающееся временем соударения шаров, измеряют микросекундомером и показывают на его индикаторе.

2. Зависимость времени соударения от размера шаров

Упругий удар двух тел. В лабораторной системе отсчета (Л-системе) шар 1, начиная двигаться с высоты $h \approx 0,1$ м, к моменту соударения приобретает скорость \vec{V}_0 . На шар действуют две силы – сила тяжести и сила упругости подвеса. Шар движется по дуге окружности, сила упругости всегда перпендикулярна вектору скорости шара, поэтому её работа равна нулю. Работой сил трения в подвесе можно пренебречь. Поэтому кинетическая энергия шара изменяется только за счёт работы силы тяжести: $|\vec{V}_0| = \sqrt{2gh} \approx 1,4$ м/с.

Из второго закона Ньютона $d\vec{p} / dt = \vec{F}$ получаем определение времени соударения τ :

$$\tau = \frac{|\Delta \vec{p}|}{|\vec{F}_{1,2}|}, \quad (1)$$



где $\overline{F}_{1,2}$ – среднее за время соударения значение модуля упругой силы, с которой первый шар действует на второй. По третьему закону Ньютона 2-й шар действует на первый с такой по величине силой, направленной противоположно. Обозначим для краткости это среднее значение буквой $F \equiv \overline{F}_{1,2}$.

Из вводного занятия известно, что длительность удара – сотни микросекунд, $\tau \sim 10^{-4} \dots 10^{-3}$ с. Импульс силы тяжести за время удара $|\Delta \vec{p}_G| = mg\tau$ намного меньше импульса первого шара:

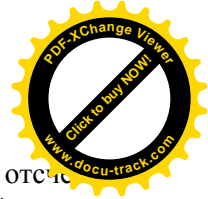
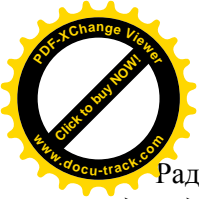
$$\frac{mg\tau}{mV_0} = \frac{g\tau}{V_0} \leq \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1,4} \leq 10^{-2}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для силы упругости. Таким образом, импульс внешних сил намного меньше суммарного импульса шаров mV_0 до удара. Силы взаимодействия шаров, внутренние силы этой системы тел, не меняют суммарного импульса шаров в соответствии с третьим законом Ньютона. Следовательно, с погрешностью порядка 1 % суммарный импульс пары шаров при ударе можно считать постоянным. В приближении «мгновенного» ($\tau \rightarrow 0$) удара суммарный импульс группы тел сохраняется, даже если результирующая внешних сил отлична от нуля.

Скорость центра инерции группы тел определяется как суммарный импульс, отнесённый к суммарной массе:

$$\vec{V}_{\text{ц}} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \vec{V}_0 + 0}{2m} = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

Так как суммарный импульс шаров при ударе сохраняется, то сохраняется и скорость центра инерции. Следовательно, систему отсчёта, связанную с центром инерции (СЦИ или Ц-систему), можно в течение удара считать инерциальной. В нерелятивистских инерциальных системах отсчёта приращения скоростей (импульсов), промежутки времени и силы являются инвариантами, поэтому при переходе в Ц-систему все величины в (1) не изменятся. Однако в Ц-системе соударение шаров математически выглядит проще, чем в Л-системе.



Радиусы-векторы материальной точки m в Л- и Ц-системах отсчёта \vec{r}_L и \vec{r}_C связаны через радиус-вектор переноса начала отсчёта \vec{r}_n , определяющий положение «нового» начала отсчёта в «старой» системе (рис. 1): $\vec{r}_L = \vec{r}_C + \vec{r}_n$. Продифференцировав это равенство по времени, получаем преобразование скоростей Галилея: скорость точки \vec{V}_C в движущейся Ц-системе равна разности скорости \vec{V}_L этой точки в неподвижной Л-системе отсчёта и скорости переносного движения \vec{V}_n движущейся системы отсчёта относительно неподвижной:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_L - \vec{V}_n, \quad \vec{V}_n = \vec{V}_C = \frac{\vec{V}_0}{2}.$$

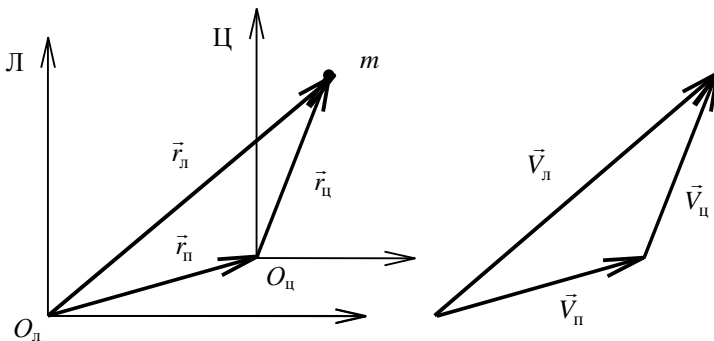
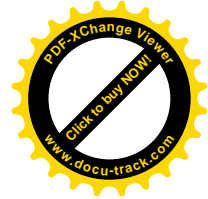
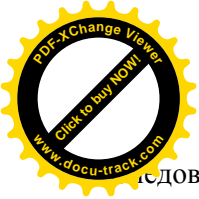


Рис. 1

Применим эту формулу к каждому из шаров. Для первого шара до удара скорость в Ц-системе равна $\vec{V}_{1C} = \vec{V}_0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = \frac{\vec{V}_0}{2}$, а для второго шара $\vec{V}_{2C} = 0 - \frac{\vec{V}_0}{2} = -\frac{\vec{V}_0}{2}$. Обозначим импульсы первого и второго шаров в СЦИ до удара \vec{p}_{1C} и \vec{p}_{2C} , а после соударения \vec{p}'_{1C} и \vec{p}'_{2C} .

$$\vec{p}_{1C} = m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \vec{p}_{2C} = -m \frac{\vec{V}_0}{2}, \quad \text{т. е. } \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}, \quad p_{1C} = p_{2C}.$$



Следовательно, закон сохранения импульса в СЦИ имеет вид

$$\vec{p}_{1ц} + \vec{p}_{2ц} = \vec{p}'_{1ц} + \vec{p}'_{2ц} = 0. \quad (2)$$

Отсюда $\vec{p}_{1ц} = -\vec{p}_{2ц}$; $p'_{1ц} = p'_{2ц}$. Соотношение (2) можно доказать и в более общем случае неравных масс шаров. Оно имеет простой физический смысл: в системе отсчёта, связанной с центром инерции, сам центр инерции покоится.

Соударение называется упругим, если суммарная кинетическая энергия шаров не меняется. Реальное соударение можно считать упругим приближённо: часть энергии перейдёт в энергию необратимой деформации, затем в тепло. Для шаров из закалённого стекла потери кинетической энергии при ударе достигают 10 %, для бильярдных шаров из слоновой кости – 20 %, для стальных шаров могут превышать 50 %.

Запишем закон сохранения кинетической энергии в СЦИ в приближении абсолютно упругого удара:

$$\frac{p_{1ц}^2}{2m} + \frac{p_{2ц}^2}{2m} = 2 \frac{p_{1ц}^2}{2m} = \frac{p_{1ц}'^2}{2m} + \frac{p_{2ц}'^2}{2m} = 2 \frac{p_{1ц}'^2}{2m}, \quad (3)$$

где были использованы связи длин векторов импульсов до и после удара. Из (2) и (3) следует, что длины всех векторов одинаковы:

$$p_{1ц} = p_{2ц} = p'_{1ц} = p'_{2ц}.$$

При ударе меняются только направления векторов. На рис. 2 показана диаграмма импульсов в СЦИ при абсолютно упругом центральном ударе и изменения импульсов шаров при ударе. Изменение импульса первого шара $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_{1ц} - \vec{p}_{1ц} = -m\vec{V}_0 = -\Delta \vec{p}_2$.

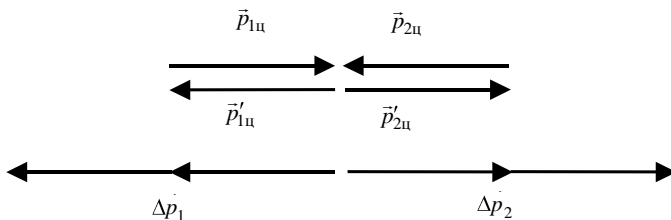
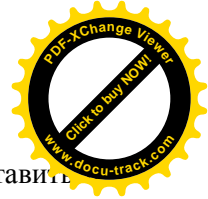
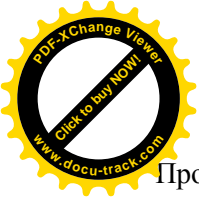


Рис. 2



Процесс упругого соударения шаров в СЦИ можно представить в виде следующих двух этапов:

1) на первом этапе оба шара одновременно тормозятся и упруго деформируются, пока кинетическая энергия шаров полностью не превратится в энергию упругой деформации;

2) на втором этапе величина упругой деформации X уменьшается до нуля, энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров.

Закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров имеет вид

$$2 \frac{m(V_0/2)^2}{2} = 2 \frac{mV_0^2}{8} = 2FX_{\max}, \quad (4)$$

где X_{\max} – максимальная величина продольной деформации, одинаковая для каждого из шаров. Отсюда средняя величина упругой силы

$$F = \frac{mV_0^2}{8X_{\max}}. \quad (5)$$

Подставляя в (1) это выражение, получаем, что время соударения шаров

$$\tau = \frac{8X_{\max}}{V_0}. \quad (6)$$

Столкновение кубиков. Из (6) следует, что τ пропорционально X_{\max} . Для определения зависимости τ от диаметра D необходимо найти зависимость X_{\max} от D . Для этого рассмотрим сначала грубую физическую модель, в которой шар диаметром D заменен телом кубической формы с ребром D (рис. 3).

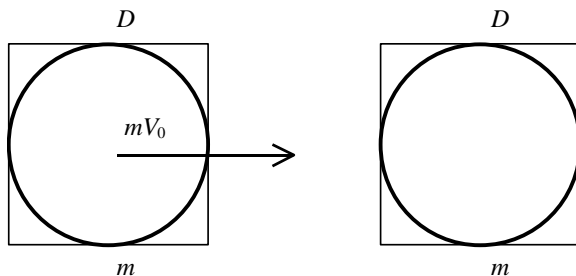
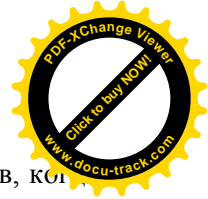
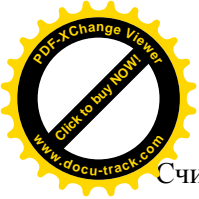


Рис. 3



Считаем, что при упругом соударении двух стальных кубов, когда при соударении соприкасающиеся грани идеально совпадают, справедлив закон Гука:

$$\left| \bar{F}_{1,2}(X) \right| = E \frac{X}{D} \quad (7)$$

– относительная продольная деформация X/D пропорциональна механическому напряжению $|\bar{F}_{1,2}|/S$. Здесь E – модуль Юнга; $S = D^2$ – площадь поперечного сечения деформируемого тела.

Как известно, среднее линейной функции совпадает с центром её области изменения (рис. 4), т. е.

$$F = \left| \bar{F}_{1,2} \left(\frac{X_{\max}}{2} \right) \right| = SE \frac{X_{\max}}{2D} = ED \frac{X_{\max}}{2}.$$

Подставим F в (4):

$$2 \frac{mV_0^2}{8} = 2ED \frac{X_{\max}^2}{2}.$$

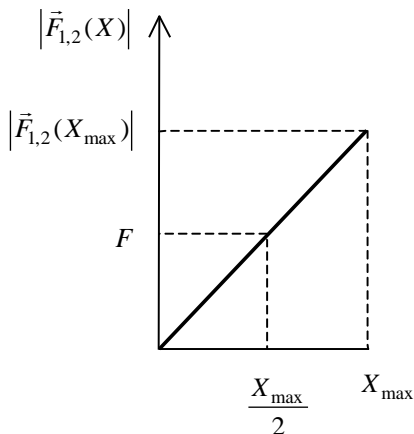
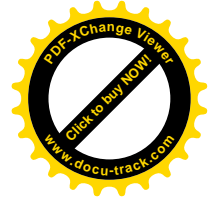
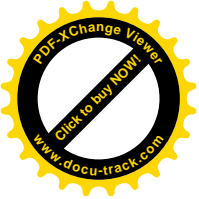


Рис. 4



Отсюда $X_{\max} = \sqrt{\frac{mV_0^2}{4ED}}$. Так как $m = \rho V = \rho D^3$, где ρ – плотность тела, а $V = D^3$ – его объём, получаем

$$X_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} V_0 D, \quad (8)$$

где ρ – плотность стального куба. Подставляя найденное выражение для X_{\max} в формулу (5), для времени соударения кубических тел получаем

$$\tau = 4 \left(\frac{\rho}{E} \right)^{\frac{1}{2}} D \quad (9)$$

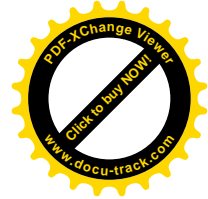
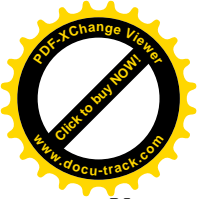
Столкновение шаров. Закон Гука в виде (7) справедлив лишь для равномерно сжатого вдоль одного из рёбер прямоугольного параллелепипеда (или цилиндра). Для шара картина принципиально другая. В этом случае зависимость силы упругости от величины продольной деформации является нелинейной, потому что вместе с деформацией возрастает площадь контакта:

$$F_{\text{упр}} \approx 1,04ED^2 X^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Из (11) следует, что $F_{\text{упр}}$ растёт быстрее, чем величина деформации; это случай так называемой системы с жесткой характеристикой.

В этом случае закон сохранения механической энергии для первого этапа соударения шаров можно записать так:

$$\begin{aligned} 2 \frac{mV_0^2}{8} &= 2 \int_0^{X_{\max}} F_{\text{упр}} dX = 2 \int_0^{X_{\max}} 1,04ED^2 X^{\frac{3}{2}} dX = \\ &= 0,83ED^2 X_{\max}^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$



Учитывая, что $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$, для X_{\max} получаем

$$X_{\max} = 0,95 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{\frac{4}{5}} \frac{D}{2}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), получаем время соударения шаров:

$$\tau = 3,80 \left(\frac{\rho}{E}\right)^{\frac{2}{5}} (V_0)^{-\frac{1}{5}} D. \quad (12)$$

Получается, что для стальных шаров в рамках модели системы с жёсткой характеристикой, так же как и для тел кубической и цилиндрической формы, максимальная величина продольной деформации X_{\max} пропорциональна размерам тел – диаметру D . То есть обе модели приводят к линейной зависимости времени соударения стальных шаров от их диаметра:

$$\tau = AD, \quad (13)$$

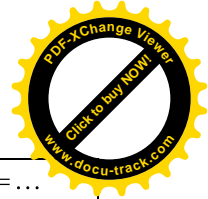
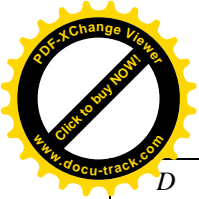
где A – коэффициент пропорциональности, зависящий от ρ, E и V_0 и формы сталкивающихся тел.

Именно эту теоретически полученную зависимость τ от D необходимо подтвердить (или опровергнуть) экспериментально, измеряя время соударения шаров микросекундомером. Значения диаметров шаров приведены в паспорте установки.

3. Задания

1. Произведите измерения времени соударения для четырех пар шаров (по три измерения для каждой пары).

2. Результаты измерений и расчетов представьте в виде таблицы (показана часть таблицы для одного диаметра). В последнем столбце таблицы для каждого диаметра запишите доверительный интервал для времени соударения. Рекомендуемые значения $t = 2$, $P = 0,95$. Значение $\bar{\tau}$ округляется до младшего разряда значения величины σ_{τ} .



| D | N_{τ} | τ | $\bar{\tau}$ | σ_{τ} | $\bar{\tau} \pm t P \sigma_{\tau}, P = \dots$ |
|-----|------------|--------|--------------|-------------------------------------|---|
| мм | п/п | мкс | мкс | мкс | мкс |
| | 1 | | | Рассчитано на вводном занятии | |
| | 2 | | | | |
| | 3 | | | | |

3. Представьте зависимость времени соударения шаров τ от их диаметра D в виде графика. К каждому из четырёх средних значений $\bar{\tau}$ пристроить доверительный интервал $\pm t P \sigma_{\tau}$ (пример на рис. 5). Провести из начала координат *регрессионную*, т. е. сглаживающую, прямую через все доверительные интервалы. Существует ли такая прямая?

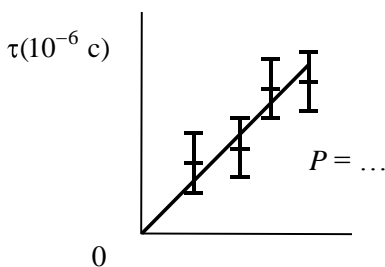
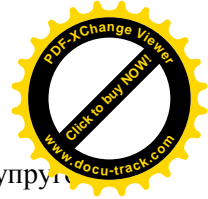
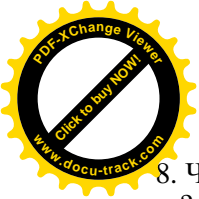


Рис. 5

4. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?
2. Как определяется время соударения шаров на основе второго закона Ньютона?
3. Какие силы изменяют суммарный импульс группы тел?
4. Как упругие силы взаимодействия шаров влияют на суммарный импульс шаров?
5. Когда можно применять закон сохранения импульса приближённо?
6. Почему при расчёте времени соударения мы можем перейти в другую инерциальную систему отсчёта?
7. Что такое система центра инерции?



8. Что такое упругий удар? Какой закон выполняется при упругом ударе?

9. Изобразите диаграмму импульсов шаров в СЦИ. Покажите векторы изменения импульса каждого шара при ударе.

10. Какие этапы можно выделить в процессе упругого соударения?

11. Перечислите основные допущения, используемые при анализе соударения в системе центра инерции.

12. Исходя из начальных условий соударения в лабораторной системе отсчёта выведите формулу для изменения импульсов шаров при ударе в СЦИ.

13. Исходя из закономерностей упругого удара в СЦИ выведите зависимость τ от D при соударении кубиков.

14. Получите зависимость τ от D при упругом соударении двух сплошных цилиндров, радиусы которых равны радиусу шара, а длина – диаметру шара, в случае, если цилиндры ударяются торцевыми поверхностями.

15. Получили ли вы ожидаемую зависимость времени соударения шаров от их диаметров? Что это означает?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука (год издания любой).