PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

Лабораторная работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

В данной работе на примере движения маятника Обербека изучается динамика вращательного движения твердого тела.

Целью работы является сравнение экспериментально полученной зависимости углового ускорения маятника Обербека от массы груза, приводящего маятник во вращение, с теоретической.

1. Описание установки и эксперимента

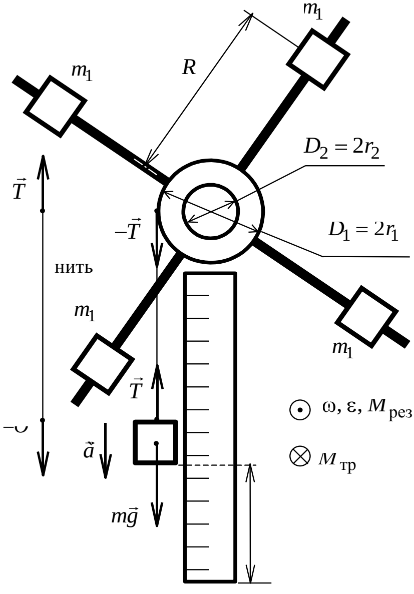

Рис. 1

Маятник Обербека представляет собой крестовину, имеющую общую ось с двумя шкивами разных диаметров D_1 и D_2 (рис. 1). Крестовина и шкивы соединены между собой жестко. Контакт крестовины со шкивом и осью, на которую они насажены, осуществляется с помощью шарикоподшипника. На стержни крестовины надевают одинаковые тела массы m_1, которые могут быть закреплены на различных расстояниях R от оси вращения. На шкив наматывается нить, к свободному концу которой подвешен груз массы m. Начальное положение груза отмечается на вертикальной шкале (рис. 1). Под действием опускающегося груза нить разматывается и приводит маятник в ускоренное вращение. Время движения груза измеряется электросекундомером. В момент начала движения груза необходимо нажать кнопку «Пуск» секундомера, начинается отсчёт времени движения. Когда груз, пройдя расстояние x, опустится на контактную площадку, отсчёт прекращается, время опускания груза t фиксируется секундомером.

2. Зависимость углового ускорения маятника от массы m ускоряющего груза

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси вращения в приближении невесомой нити имеет вид

$$I\varepsilon = M_{\text{рез}} = T\frac{D}{2} - M_{\text{тр}}\,. \tag{1}$$

Уравнение выписано в проекции на ось вращения; I – момент инерции маятника Обербека относительно неподвижной оси; ε – проекция углового ускорения маятника на ось вращения; $M_{\text{рез}}$ – проекция результирующего момента всех сил на ось вращения, складывающаяся из момента силы натяжения нити T и момента силы трения $M_{\text{тр}}$, тормозящего вращение шкива.

Силу натяжения нити T можно определить из второго закона Ньютона для массы m, его проекция на направление движения груза m имеет вид

$$ma = mg - T\,, \tag{2}$$

где a – ускорение движения массы m.

В приближении нерастяжимой нити по рис. 2 получаем соотношения

$$\frac{x}{r} = \varphi\,,\; V = \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}r = \omega r\,,$$

$$a = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dt}r = \varepsilon r = \varepsilon\frac{D}{2}\,, \tag{3}$$

связывающие поступательное движение массы m с вращением шкива. Здесь φ (рад) – угол поворота шкива радиусом r при опускании груза на расстояние x; V и ω – соответствующие линейная и угловая скорости; D – диаметр шкива, равный D_1 или D_2.

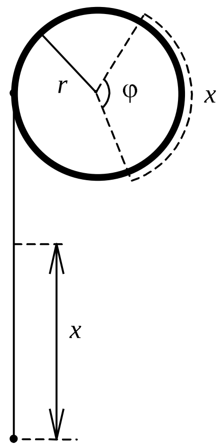

Рис. 2

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

С учетом уравнений (2) и (3) из уравнения (1) находим угловое ускорение маятника Обербека:

$$\varepsilon = \frac{mg\dfrac{D}{2} - M_{\text{тр}}}{I + m\dfrac{D^2}{4}}. \tag{4}$$

Очевидно, что при $M_{\text{тр}} = \text{const}$ (момент сил трения постоянен) вращение маятника является равноускоренным.

Из полученной формулы видно, что маятник будет вращаться с $\varepsilon > 0$ лишь при выполнении условия

$$m > m_0 = \frac{2M_{\text{тр}}}{gD}, \tag{5}$$

т. е. при массе груза m, достаточной для того чтобы был преодолен момент сил трения, препятствующий вращению маятника Обербека. Формула (4) упрощается при выполнении неравенства

$$I >> m\frac{D^2}{4}, \tag{6}$$

зависимость углового ускорения ε от массы опускающегося груза при этом становится линейной:

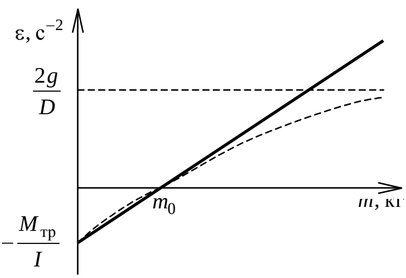

Рис. 3

$$\varepsilon = \frac{mgD}{2I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}. \tag{7}$$

График зависимости $\varepsilon(m)$ при выполнении неравенства (6) приведён сплошной линией на рис. 3. Штриховой линией показана точная зависимость (4). Штриховая горизонтальная прямая – асимптота при $m \to \infty$.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Примечание. Если момент сил трения зависит от времени, то вращение маятника не будет равноускоренным. Возможен случай, когда момент сил трения пропорционален угловой скорости:

$$M_{\text{тр}} = M_0 + A\omega\,, \tag{8}$$

где A – коэффициент пропорциональности; $M_0 = m_0 g \dfrac{D}{2}$ – момент сил трения покоя при $\omega = 0$. Заметим, что при $m < m_0 = \dfrac{2M_0}{gD}$ (сравните с формулой (5)) вращение маятника не происходит. Решая дифференциальное уравнение (4) с учетом (8), можно показать, что угловое ускорение ε в момент времени t дается формулой

$$\varepsilon = \frac{(m - m_0)gD}{2\left(I + m\dfrac{D^2}{4}\right)} e^{-\frac{A}{I + m\frac{D^2}{4}}t}\,. \tag{9}$$

3. Измерение углового ускорения

Движение маятника можно принять равноускоренным, если считать, что момент силы трения постоянен $(M_{\text{тр}} = \text{const})$ и что нить нерастяжима и не проскальзывает по шкиву. Используя известную формулу для координаты тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$x = a\frac{t^2}{2}\,, \tag{10}$$

с учетом соотношения $a = \varepsilon\dfrac{D}{2}$ получаем формулу для косвенного измерения углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2}\,, \tag{11}$$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

где x – высота, с которой опускается груз; D – диаметр шкива, на который намотана нить; t – время движения груза. Для расчетов удобно представить (11) в виде

$$\boxed{\varepsilon = \frac{K}{t^2}}, \tag{12}$$

где $K = \dfrac{4x}{D}$ и указывается в паспорте установки.

Угловое ускорение ε рассчитывается по формуле (11), т. е. по измеренному времени t и заданному значению константы K. В данном случае мы имеем косвенное измерение. Оценка стандартного отклонения σ_ε производится по формуле

$$\boxed{\sigma_\varepsilon = \frac{\bar{K}}{\bar{t}^{\,2}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2}}. \tag{13}$$

4. Задания

1. Произведите трехкратное измерение времени опускания грузов массы $m = 100$, 200, 300, 400 г с одинаковой высоты x при двух различных расстояниях R грузов m_1 до оси крестовины. Расстояния R задаются преподавателем.
2. Вычислите значения ε для всех значений m и R предыдущего пункта.
3. Вычислите оценки стандартных отклонений σ_ε только для двух значений ε – наибольшего и наименьшего при обоих расстояниях R.
4. Постройте зависимость ε от m при двух значениях R на одном и том же графике с учетом оценок стандартных отклонений. По полученным графикам сделайте оценки момента сил трения и момента инерции маятника Обербека.
5. Проверьте, используя оценку момента инерции I в п. 4, выполнение неравенства $I >> m\dfrac{D^2}{4}$, при котором справедлива линейная зависимость углового ускорения от массы m ускоряющего груза, для различных значений массы m из п. 1.

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

5. Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы? Какие величины в работе измеряются непосредственно?

2. Как направлены векторы угловой скорости $\vec{\omega}$, углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, результирующего момента сил и момента сил трения в случае ускоренного вращения?

3. Как вы записываете уравнение динамики вращательного движения маятника в данной работе?

4. Какова модель нити? Как свойства идеальной нити влияют на вид кинематических и динамических уравнений?

5. Покажите на рисунке все силы, действующие на крестовину маятника. Почему в уравнении динамики вращательного движения (1) не учтены моменты некоторых из этих сил?

6. Перечислите все допущения, при которых получается линейная зависимость углового ускорения ε от массы m.

7. Как по графику линейной зависимости (7) ε от m оценить момент инерции маятника Обербека и момент сил трения?

8. Выведите зависимость углового ускорения ε от массы опускающегося груза m в приближении линейной зависимости $\varepsilon(m)$.

9. Как в данной работе рассчитать оценку стандартного отклонения величины ε?

10. Подтверждается ли измерениями линейная теоретическая зависимость углового ускорения ε от массы ускоряющего груза m?

Литература

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука (любой год издания).

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).