Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Целью работы является экспериментальное исследование зависимости момента инерции маятника Обербека от расстояния R между осью вращения и центром инерции каждого из четырёх грузов маятника. Теоретически эта зависимость легко находится с использованием: 1) свойства аддитивности момента инерции и 2) теоремы Штейнера. Таким образом, при сравнении экспериментально полученной зависимости с теоретической фактически проверяется, является ли момент инерции аддитивной величиной и справедлива ли в данном случае теорема Штейнера.

Описание установки – маятника Обербека и секундомера – уже приводилось в описании лабораторной работы № 3.

1. Зависимость момента инерции маятника от расстояния грузов до оси вращения

Момент инерции – величина аддитивная, поэтому момент инерции маятника Обербека относительно его оси можно представить в виде суммы моментов инерции пяти тел: одной крестовины, состоящей из шкивов, подшипников и стержней и четырех тел (грузов), закрепленных на стержнях крестовины на одинаковом расстоянии R от оси вращения.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции тела I относительно произвольной оси l равен сумме его момента инерции I_0 относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр инерции тела и величины mR^2, равной произведению массы тела m на квадрат расстояния между параллельными осями l и l_0, т. е.

$$I = I_0 + mR^2 .$$

Поэтому для каждого из четырёх грузов, представляющих собой одинаковые цилиндры массы m_1 и радиуса r_1, момент инерции относительно оси маятника I_1 есть

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

$$I_1 = I_0 + m_1 a^2 = \frac{m_1 r_1^2}{2} + m_1 R^2 = m_1 R^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{R} \right)^2 \right).$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой фактических значений r_1 и R, что второе слагаемое в скобках достаточно мало по сравнению с единицей и им можно пренебречь (строго говоря, максимальную величину этого члена нужно сравнить с оценкой относительной погрешности эксперимента и только после этого решать вопрос о целесообразности его учёта или отбрасывания). Заметим, что пренебрежение вторым членом в скобках соответствует модели, в которой четыре груза считаются точечными массами (материальными точками).

В рамках этой модели момент инерции всего маятника является суммой моментов инерции крестовины $I_{\text{кр}}$ и четырёх материальных точек массы m_1, расположенных на расстоянии R от оси:

$$I = I_{\text{кр}} + 4 m_1 R^2 . \qquad (1)$$

Именно эту теоретическую зависимость следует подтвердить (или опровергнуть) экспериментально в данной лабораторной работе.

2. Измерение момента инерции маятника

При опускании ускоряющего груза m изменение полной механической энергии системы равно работе сил трения. Полная механическая энергия системы есть сумма её кинетической и потенциальной энергий. Изменение (уменьшение) потенциальной энергии при опускании груза массы m с высоты x равно $(-mgx)$, а изменение (увеличение) кинетической энергии состоит из кинетической энергии вращательного движения маятника Обербека $\frac{I\omega^2}{2}$, где ω – угловая скорость маятника, и кинетической энергии поступательного движения груза m, равной $\frac{mV^2}{2}$ (V – линейная скорость опускаемого груза). Работа сил трения при вращательном движении равна $-M_{\text{тр}}\varphi$, где

$M_{тр} = \text{const}$ – момент сил трения; φ – угол поворота (угловой путь) маятника, соответствующий перемещению груза x при его опускании.

Таким образом, получаем, что при опускании груза

$$-mgx + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = -M_{тр}\varphi\,. \qquad (2)$$

Если $M_{тр} = \text{const}$, нить нерастяжима и нет проскальзывания между нитью и шкивом, то движение системы тел можно считать равноускоренным. Если начальная скорость равна нулю, то для равноускоренного движения справедливы следующие соотношения:

$$V^2 = 2ax\,,\quad \omega^2 = 2\varepsilon\varphi\,. \qquad (3)$$

Пусть $r = \dfrac{x}{\varphi}$ – радиус шкива, тогда $a = \varepsilon r$, $V = \omega r$, Подставим выражения (3) в соотношение (2), затем разделив левую и правую часть равенства на φ, получаем

$$mgr = I\varepsilon + mar + M_{тр}\,. \qquad (4)$$

Заметим, что в лабораторной работе № 3 практически это же соотношение было получено из основного закона динамики вращательного движения для маятника и второго закона Ньютона для опускающегося груза (см. формулы (1)–(3) из описания лабораторной работы № 3).

Выражая ускорение груза a через угловое ускорение шкива ε и решая полученное уравнение относительно I, определим момент инерции маятника:

$$I = \frac{mgr - M_{тр}}{\varepsilon} - mr^2\,. \qquad (5)$$

Для равноускоренного движения $x = \dfrac{at^2}{2}$. Так как $a = \varepsilon\dfrac{D}{2}$, где D – диаметр шкива, получаем

$$\varepsilon = \frac{4x}{Dt^2} \qquad (6)$$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

Подставляя в (5) это выражение, вместо ε получаем

$$I = Kt^2 - m\frac{D^2}{4}, \tag{7}$$

где

$$K = \frac{\left(mg\frac{D}{2} - M_{\text{тр}}\right)D}{4x}.$$

Для нашей установки $M_{\text{тр}} << mgD/2$, поэтому можно считать, что

$$K = \frac{mgD^2}{8x}. \tag{8}$$

Кроме того, для нашей установки

$$I >> m\frac{D^2}{4} = mr^2. \tag{9}$$

Это неравенство может быть проверено непосредственно подстановкой конкретных величин. С учётом (9) из (7) для момента инерции получаем

$$\boxed{I = Kt^2} \tag{10}$$

Для определения момента инерции маятника необходимо провести прямое измерение времени прохождения грузом массы m расстояния x (см. рисунок в описании лабораторной работы № 3).

3. Оценка стандартного отклонения момента инерции

Из формулы (10) следует, что значение величины I находится в процессе косвенного измерения. Следовательно, оценка стандартного отклонения величины I может быть произведена по формуле (12) вводного занятия, которая применяется при косвенных измерениях:

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial K}\sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t}\sigma_t\right)^2} = \sqrt{t^2\sigma_K{}^2 + K \cdot 2t\sigma_t{}^2} =$$

$$= Kt^2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2} \, . \qquad (13)$$

Таким образом,

$$\boxed{\sigma_I = \bar{I} \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{\bar{K}}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_t}{\bar{t}}\right)^2}} \, . \qquad (14)$$

4. Задания

1. Закрепив цилиндры m_1 на равных расстояниях R от оси вращения, измерьте это расстояние R.

2. Намотав нить на шкив большего диаметра, произведите трехкратное измерение времени опускания груза t.

3. Повторите опыт при четырех различных расстояниях цилиндров от оси вращения.

4. Подставив в (8) массу m опускающегося груза, вычислите коэффициент K по формуле (8).

5. Вычислите моменты инерции маятника для всех измерений по п. 2 и 3.

6. Рассчитайте оценки стандартных отклонений для всех полученных значений момента инерции.

7. Постройте график зависимости момента инерции I от расстояния масс до оси вращения R с учетом вычисленных оценок стандартных отклонений. Выберите переменные по осям, в каких целесообразно строить этот график, чтобы выяснить, подтвердилась ли теоретическая зависимость (1).

8. Определите по графику момент инерции крестовины $I_{\text{кр}}$.

5. Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?

2. Что называется моментом инерции тела?

3. При каких допущениях получена формула (1)? Что необходимо учесть при проведении эксперимента, чтобы эта формула была справедлива?

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

4. При каких допущениях движение маятника и груза можно считать равноускоренным?

5. При каких допущениях получена формула (8)?

6. Как измерить расстояние от оси вращения до центра массы тела, закрепленного на стержне?

7. Как рассчитать оценку стандартного отклонения момента инерции маятника Обербека?

8. Какую таблицу удобно заполнять при записи результатов прямых измерений и подготовке к построению экспериментальной зависимости?

9. Как по графику экспериментальной зависимости $I(R)$ определить момент инерции крестовины?

Литература

1. *Савельев И.Н.* Курс общей физики. – М.: Наука (любой год издания).

2. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).