



Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ МЕТОДОМ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Целью работы является экспериментальное определение показателя адиабаты воздуха γ , равного отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме: $\gamma = C_P/C_V$.

1. Теоретическое значение γ

Абсолютная температура T является мерой средней кинетической энергии $\bar{\varepsilon}$ хаотического поступательного движения атомов и/или молекул газа:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T,$$

где k_B – постоянная Больцмана; чертой обозначено усреднение энергии по всем движущимся частицам газа.

В термодинамически равновесном состоянии молекулярного хаоса все направления движения атомов равновероятны, поэтому на каждое из трёх независимых направлений поступательного движения приходится 1/3 полной средней энергии:

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = \frac{1}{3}\bar{\varepsilon} = \frac{k_B T}{2}.$$

Молекулы помимо поступательного могут участвовать во вращательном и колебательном движениях. Независимые возможные перемещения системы в классической механике называются *степенями свободы*. В статистическом описании тепловых свойств макросистем доказывается теорема о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы. На каждую степень свободы поступательного или вращательного движения атомов и молекул приходится энергия $k_B T/2$. Каждой колебательной степени свободы соответствует удвоенная тепловая энергия, поскольку полная энергия колебаний склады-



Связаны с кинетической и потенциальной энергиями, имеющих равные средние значения:

$$\bar{\epsilon}_{\text{кол}} = \bar{\epsilon}_{\text{кин}} + \bar{\epsilon}_{\text{пот}} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} = k_B T.$$

Поэтому полная внутренняя энергия системы N невзаимодействующих атомов или молекул (такая модель применима только к идеальному газу) равна

$$U = N (i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}) \frac{k_B T}{2} = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} N_A k_B T = \nu \frac{i}{2} RT, \quad (1)$$

где $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$, $i_{\text{кол}}$ – число поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы; N_A – число Авогадро; R – универсальная газовая постоянная; $\nu = m / M$ – число молей вещества; m и M – соответственно его полная и молярная массы.

Подсчёт поступательных и вращательных степеней свободы атомов и различных молекул иллюстрирует рис. 1.

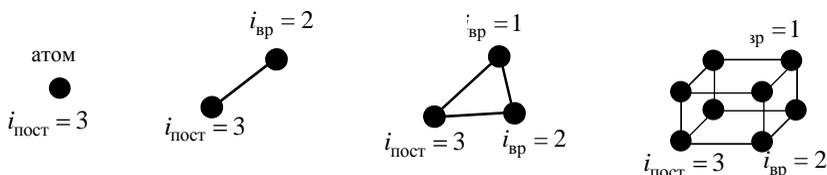


Рис. 1

Для расчёта теплоёмкости используют *первый закон термодинамики*:

$$Q = \Delta U + A \quad (2)$$

или, при бесконечно малом изменении состояния газа,

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV, \quad (3)$$

где $Q, \delta Q$ – количество теплоты, переданной рабочему телу (газу); $\Delta U, dU$ – изменение внутренней энергии газа; $A, \delta A$ – работа, совершённая газом; dV – изменение объёма. Внутренняя энергия является



позначной функцией состояния газа, тогда как теплота и работа зависят от процесса перехода из одного состояния газа в другое. Поэтому с математической точки зрения dU – полный дифференциал функции U , тогда как $\delta Q, \delta A$ – бесконечно малые количества (иногда обозначаемые как $d'Q, d'A$).

Теплоёмкость – количество теплоты, поглощаемой макросистемой при нагревании на 1 градус (1°C или 1°K):

$$C_{\text{сист}} = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (4)$$

Различают молярную (одного моля), удельную (единицы массы) и полную теплоёмкость системы. Как и количество тепла δQ , теплоёмкость зависит от теплового процесса. Например, $C_{\text{адиаб}} = 0$, $C_{\text{изотерм}} = \infty$.

В изохорном процессе $\Delta V = 0$, $A = 0$, $Q = \Delta U$, поэтому молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R. \quad (5)$$

Для изобарного процесса из (1) и (3), используя уравнение Клапейрона–Менделеева

$$PV = \nu RT,$$

получаем

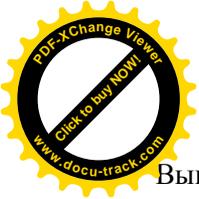
$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + PdV}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{i\nu \frac{R}{2} dT + \nu R dT}{dT} = \frac{i+2}{2} R.$$

Отсюда получаем связь C_P и C_V (уравнение Майера):

$$C_P = C_V + R.$$

Тогда показатель адиабаты равен:

$$\boxed{\gamma_{\text{теор}} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}} \quad (6)$$



Вышеизложенная классическая теория не смогла правильно объяснить некоторые явления. Например, независимость теплоёмкости C_V в (5) от температуры опровергается опытом. Согласовать классическую теорию с экспериментом удалось, только предположив, что некоторые степени свободы в определённом диапазоне температур не возбуждаются, «вымораживаются». Например, согласие с опытом при $T \sim 300$ К достигается, если считать, что не возбуждаются колебания молекул. Это явление было объяснено только в квантовой теории.

Учитывая для двухатомных молекул с жёсткой связью атомов только поступательные и вращательные степени свободы, получаем $i = 5$, а из (6) $\gamma_{\text{теор}} = 1,4$.

С теоретическим значением γ для двухатомного газа (воздух на 90 % состоит из двухатомных молекул) следует сравнить значение, полученное в эксперименте.

2. Метод Клемана и Дезорма

Одним из самых простых и остроумных методов определения γ является метод Клемана и Дезорма, основанный на использовании адиабатических и изохорических процессов в воздухе, находящемся в сосуде (рис. 2).

В процессе эксперимента мы будем накачивать воздух в стеклянный сосуд и выпускать его из сосуда. Объём сосуда V_c , естественно, постоянен, а количество воздуха в нём, т. е. число молей газа ν , будет изменяться. Это означает, что уравнение Клапейрона–Менделеева можно переписать в виде

$$P \frac{V_c}{\nu} = RT$$

и в дальнейшем рассматривать молярный объём $V_c/\nu = V$, занимаемый 1 молем газа при данных условиях T и P .

На рис. 2 такой объём показан штриховой линией внутри сосуда. Естественно, воображаемую границу объёма V непрерывно пересекают мо-

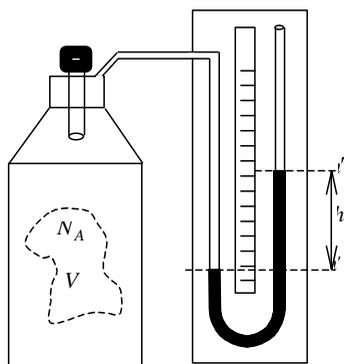


Рис. 2



кулы газа. Однако в условиях теплового равновесия среднее число молекул внутри объёма не меняется. Можно рассматривать объём, занимаемый и другим количеством газа, лишь бы во всех процессах этот объём не превышал V_c .

Суть метода, согласно замыслу Клемана и Дезорма, иллюстрирует рис. 3, на котором в координатах $P - V$ приведены графики всех процессов эксперимента.

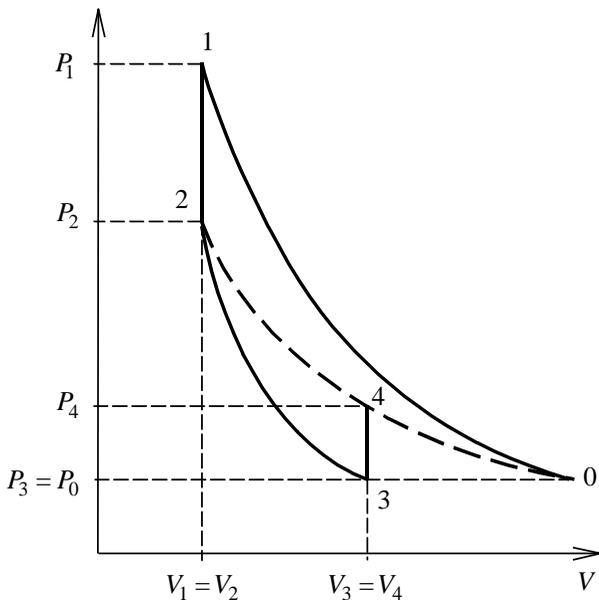
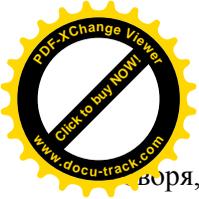


Рис. 3

Итак, перечислим процессы, происходящие с воздухом.

1. Кривая $0 - 1$ соответствует подготовительному этапу – накачиванию воздуха в баллон. Число молей газа внутри баллона при этом возрастает. Отношение объёма к числу молей в баллоне уменьшается, что и отражает кривая $0 - 1$. Давление газа в баллоне увеличивается от атмосферного P_0 до некоторого давления P_1 . При сжатии работа газа $A \sim \Delta V < 0$. Согласно (2), изменение внутренней энергии $\Delta E = Q - A$. В адиабатическом процессе ($Q = 0$) повышение температуры $\Delta T \sim \Delta E > 0$ будет максимальным. Реальный процесс сжатия, вообще



воря, сопровождается отдачей тепла во внешнюю среду ($Q < 0$), которую можно уменьшить, проводя накачивание достаточно быстро.

2. Как только накачивание прекращается, давление в баллоне начинает падать при неизменном объёме, что является следствием остывания газа (закон Шарля). На участке 1 – 2 температура снижается до комнатной за счет теплообмена с окружающей средой. Давление при этом уменьшается от P_1 до P_2 .

3. Когда давление перестает изменяться (точка 2), резко выпускаем воздух из баллона. Будем считать, что это адиабатическое расширение (кривая 2 – 3). В результате приведённый объем рассматриваемой массы газа увеличивается от $V_2 = V_1$ до $V_3 = V_4$, температура должна понизиться. Давление воздуха уменьшается от P_2 до атмосферного $P_3 = P_0$.

4. Затем на участке 3 – 4 объем газа выдерживаем постоянным – ещё один изохорический процесс. В точке 3 температура была ниже комнатной и теперь она повышается до комнатной за счет теплообмена с окружающей средой.

5. Заметим, что в точках 0, 4, 2 газ имеет одинаковую температуру – комнатную, т. е. эти точки лежат на одной изотерме 0 – 4 – 2 (которую иногда называют «мысленной» или «гипотетической», подчёркивая, что реально изотермического процесса 0 – 4 – 2 не происходило). Это обстоятельство позволило Клеману и Дезорму обойтись без измерения начального и конечного объемов газа. Именно в этом и заключается «изюминка» предложенного метода.

Рассмотрим систему уравнений, соответствующих процессам 2 – 3, 3 – 4 и 4 – 2. Для точек 2 и 3, лежащих на одной адиабате, $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$, или, так как $P_3 = P_0$,

$$P_2 V_2^\gamma = P_0 V_3^\gamma. \quad (5)$$

Для точек 2 и 4, лежащих на одной мысленно проведенной изотерме, по закону Бойля–Мариотта

$$P_2 V_2 = P_4 V_4. \quad (6)$$

Кроме того, прямая 3 – 4 изображает изохорический процесс, для которого

$$V_3 = V_4. \quad (7)$$



Из (6) и (7) получаем

$$V_2 = \frac{P_4}{P_2} V_3. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получаем уравнение

$$\left(\frac{P_4}{P_2} \right)^\gamma = \frac{P_0}{P_2}. \quad (9)$$

Логарифмируя (9), выражаем γ через атмосферное давление P_0 и давления в состояниях 2 и 4, которые требуется измерить в процессе эксперимента:

$$\gamma = \frac{\ln P_0 - \ln P_2}{\ln P_4 - \ln P_2} = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4}. \quad (10)$$

3. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка состоит из стеклянного сосуда, закрытого пробкой, в которую вмонтированы две трубки и быстродействующий клапан для выпуска воздуха из сосуда (см. рис. 1). Одна трубка соединяет полость сосуда с манометром. Манометром служит U-образная трубка, наполненная подкрашенной водой. Давление измеряется по разности уровней в коленях трубки. Вторая трубка через клапан соединяет полость баллона с насосом (не показана на рис. 1).

Процесс 2–3, строго говоря, не является адиабатическим, так как стеклянный сосуд, используемый в лабораторной работе, не теплоизолирован. Поэтому расширение воздуха, чтобы уменьшить потери тепла, следует производить быстро, нажимая на клапан в течение двух секунд. Однако следует обратить внимание на другую сторону «быстроты» выполнения процесса. Уравнение, описывающее адиабатический процесс, $PV^\gamma = \text{const}$, справедливо лишь для равновесных, квазистатических, процессов. На вопрос, можно ли считать столь быстрое адиабатическое расширение квазистатическим (равновесным) процессом, видимо, можно дать положительный ответ на основании двух следующих оценок.

1. При выпуске воздуха из баллона давление внутри баллона уменьшается примерно на 10 см водяного столба. Атмосферное давление составляет примерно 10 м водяного столба. Следовательно, отно-



дельное отклонение давления от равновесного атмосферного не велико – порядка 1 %.

2. При выпуске воздуха из баллона внутри него около выпускного крана создаётся некоторое разрежение. Это возмущение распространяется внутрь баллона со скоростью звука в воздухе. Если принять характерный размер баллона равным 0,7 м, а скорость звука равной 330 м/с, то указанное возмущение распространится на весь объём за время около 0,002 с. В результате многократных отражений от различных участков стенок баллона первоначальное возмущение равномерно распределяется по всему объёму. За две секунды в нашем баллоне должно произойти около тысячи отражений. Этого, надо полагать, вполне достаточно для установления равновесия.

Измерение. Для величины давления воздуха в баллоне в состоянии, соответствующем точке 2 на рис. 2, имеем

$$P_2 = P_0 + \rho gh_1 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right),$$

где P_0 – атмосферное давление; ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; h_1 – разность уровней в U-образной трубке, а ρgh_1 , таким образом, – разность между атмосферным давлением и давлением воздуха в баллоне после первоначального накачивания воздуха и охлаждения его до комнатной температуры. Аналогично для давления воздуха в баллоне после адиабатического расширения и нагревания до комнатной температуры (т. е. в состоянии, обозначенном на рис. 2 точкой 4) получаем

$$P_4 = P_0 + \rho gh_2 = P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right),$$

где h_2 – разность уровней в U-образной трубке при втором измерении давления (в точке 4). Подставив эти выражения в формулу (9), получим выражение для определения γ :

$$\gamma = \frac{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_1}{P_0} \right) - \ln P_0 \left(1 + \frac{\rho gh_2}{P_0} \right)} =$$



$$= \frac{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0} \right) - \ln P_0}{\ln P_0 + \ln \left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0} \right) - \ln P_0 - \ln \left(1 + \frac{\rho g h_2}{P_0} \right)}. \quad (11)$$

В нашем случае, как уже отмечалось выше, $\frac{\rho g h_1}{P_0} \ll 1$ и $\frac{\rho g h_2}{P_0} \ll 1$. Используя известное свойство логарифмов $\ln 1 + x \approx x$ при $|x| \ll 1$, из формулы (11) получаем

$$\gamma = \frac{\frac{\rho g h_1}{P_0}}{\frac{\rho g h_1}{P_0} - \frac{\rho g h_2}{P_0}}.$$

Итак,

$$\boxed{\gamma_{\text{эксп}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}} \quad (12)$$

Таким образом, эксперимент сводится к измерениям h_1 и h_2 , которые являются косвенными измерениями, поскольку фактически h_1 и h_2 вычисляются как разности уровней воды в U-образной трубке. Прямыми в данной работе являются измерения уровней воды в U-образной трубке слева и справа: h'_1 , h'_2 и h''_1 , h''_2 – координаты уровней воды в левой и правой трубках при измерении соответствующих давлений $h_1 = h''_1 - h'_1$ и $h_2 = h''_2 - h'_2$.

Оценка погрешности измерения γ . Доверительный интервал по многократным измерениям величины γ (формула (11) вводного занятия) при $N = 3$, $P = 0,95$:

$$\gamma = \bar{\gamma} \pm \frac{t(P, N) s_\gamma}{\sqrt{N}} = \bar{\gamma} \pm \frac{4,3 s_\gamma}{\sqrt{3}} = \bar{\gamma} \pm 2,48 s_\gamma, \quad (12)$$



е выборочное СКО величины γ :

$$s_{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i^N \gamma_i - \bar{\gamma}^2}. \quad (13)$$

4. Задание

1. Измерьте γ три раза.
2. Рассчитайте выборочное СКО s_{γ} по формуле (13).

Сравните значение γ , полученное экспериментально, с теоретическим значением для жёстких двухатомных молекул.

5. Контрольные вопросы

1. Какие бывают теплоёмкости, почему они зависят от типа процесса?
2. Что такое молярная и удельная теплоемкости, какова их связь?
3. Что такое степени свободы в молекулярно-кинетической теории газов? Чему равно число степеней свободы двухатомной или трёхатомной молекулы, жёсткой или с упругими связями между атомами?
4. Что такое γ ? Как эта величина связана с числом степеней свободы молекулы? Выведите эту связь на основе первого начала термодинамики.
5. Нарисуйте на $P - V$ -диаграмме все процессы, используемые для измерения γ (исходное состояние обозначьте нулевым номером). Запишите уравнения этих процессов.
6. Какой объём изображается на $P - V$ -диаграмме по одной из координатных осей?
7. Какому процессу принадлежат состояния в точках 0, 4, 2?
8. Объясните, почему в некоторых из рассматриваемых процессов возникает отклонение температуры от комнатной?
9. Выведите формулу, выражающую связь γ с измеряемыми давлениями.
10. Что измеряет U-образный манометр? Как соотносятся давления, измеряемые манометром, с атмосферным давлением?



11. Выведите формулу, выражающую γ через показания манометра.

12. Согласуется ли полученное вами значение γ с теоретическим? Чем может быть объяснено расхождение $\gamma_{\text{теор}}$ и $\gamma_{\text{эксп}}$?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1 (любой год издания).

Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Наука (любой год издания).