Множества. Числовые множества. Логические символы

1. Какие разделы математики входят в предмет «математический анализ»? Что входит в основы математического анализа? Что изучает математический анализ?

2. Что относится к основным понятиям, изучаемым в математическом анализе?

3. Что такое число? Как определяется рациональное число? Почему необходимо «пополнить» понятие рациональных чисел и ввести понятие иррационального числа? Какие числа образуют множество действительных чисел?

4. Что называется числовой осью? Как связаны множества точек на числовой оси и с множеством действительных чисел?

5. Опишите понятие «величина», «скалярная величина». Что включается в понятие «численное значение величины»? Что называется постоянной и переменной величинами? В чем суть задания математической переменной величины? Как обозначаются переменные величины? множество их значений?

6. Что вкладывается в понятие «множество» (в математике)? Какие множества бывают по совокупности содержащихся в них элементов? Что называется числовым множеством? Как оно обозначается?

7. Как определяется понятие внутренней и граничной точек множества? Приведите примеры.

8. Что называется отрезком? полуотрезком? интервалом? промежутком? Какими символами обозначаются эти множества? Что понимается под окрестность. точки? под δ – окрестностью точки? Что называется числовой прямой? Какой символ употребляют для ее обозначения?

9. Что называется абсолютной величиной (модулем) числа? Каков геометрический смысл модуля числа? модуля разности двух чисел? Сформулируйте и докажите основные предложения об абсолютных величинах.

10. Как называются символы «$\forall$» и «$\exists$»? Что они обозначают? Что означает запись «$\forall x \in X : \alpha(x)$»? Что означает запись «$\overline{\alpha}$»? «Расшифруйте символы» «$\Rightarrow$» и «$\Leftrightarrow$». Приведите примеры их употребления.

Числовые функции одной действительной переменной

1. Что называется функцией одной независимой переменной? Приведите символические записи этого понятия. Как называются величины x и y в записи $y = f(x)$? Как вводится понятие «области определения функции»? какие они бы-

вают? Какой смысл вкладывается в терм «f»? Как определяется понятие $f(x) = \text{const}$? Что составляет сущность понятия «функциональной зависимости»? Всякая ли связь между величинами является функциональной? Можно ли отождествлять функцию и задающую ее формулу? Приведите иллюстрирующие примеры.

2. Что значит задать функцию? Перечислите способы задания функции. Опишите особенности, достоинства и недостатки каждого из этих способов. Что называется графиком функции $f(x)$? уравнением этого графика? Что называется частным значением функции? Как оно записывается?

3. Как определяется понятие непрерывной переменной (непрерывного аргумента)? Что понимается под «интервалом знакопостоянства функции»? Что называется нулем функции?

4. Что называется возрастающей (убывающей), неубывающей (невозрастающей) на промежутке X функцией? Проиллюстрируйте эти положения графически. Какие функции называются монотонными? Что называется промежутком возрастания (убывания) функции? Каково общее название этих промежутков?

5. Какая функция называется а) ограниченной б) неограниченной на промежутке X?

6. Какая функция называется однозначной? многозначной? четной? нечетной? периодической? Можно ли представить произвольную функцию в виде суммы четной и нечетной функций? Если можно, то как это сделать?

7. Как определяется понятие обратной функции? Как связаны графики прямой и обратной функций?

8. Как определяется «сложная функция»? Какой смысл вкладывается в характеристику – сложная функция? Всегда ли комбинация (суперпозиция) функций имеет смысл (то есть ведет к некоторой сложной функции)? Приведите соответствующие примеры.

9. Приведите классификацию функций заданных аналитически. Опишите аналитические способы задания функций (явный, неявный, параметрический способы задания). В чем их смысл?

10. Какие функции включает в себя понятие «алгебраические функции»? Какие функции называются трансцендентными функциями? Приведите примеры.

11. Какие функции в математике называют основными элементарными функциями. Перечислите эти функции. Как выглядят их графики при различных значениях входящих в них параметров? Как определяется элементарная функция? Приведите примеры.

12. Опишите построение графика функции $y = mf\left[k\left(x-a\right)\right]+b$, если график функции $y = f\left(x\right)$ построен.

Предел последовательности

1. Какие типы переменных величин рассматриваются в математическом анализе? Дайте их определение. Что называется числовой последовательностью? Какие символы употребляются для ее обозначения? Приведите примеры числовых последовательностей.

2. Какие арифметические операции вводятся над последовательностями? определите их. Что вкладывается в понятие возрастающая (убывающая), неубывающая (невозрастающая) последовательность? Какие последовательности называются строго монотонными? Какими символами обозначаются «типы монотонности»?

3. Определите понятия ограниченная сверху (снизу), ограниченная, неограниченная последовательности. Приведите соответствующие примеры. Связаны ли между собой понятия ограниченной и монотонной последовательностей?

4. Дайте определение предела последовательности. Каков его геометрический смысл? Как определяется бесконечно малая (б.м.) (бесконечно большая (б.б.)) последовательность?

5. В чем заключается необходимое и достаточное условия существования предела последовательности? Сформулируйте и докажите эту теорему. Что следует из того, что все члены б.м. последовательности принимают одно и то же значение?

6. Сформулируйте и докажите следующие свойства пределов последовательностей: 1) о единственности предела; б) о сохранении знака последовательностью; в) ограниченность последовательности. Как формулируются предельные переходы в равенствах и неравенствах?

7. Как формулируются свойства пределов последовательностей, связанные с арифметическими операциями над ними? Верно ли утверждение, что предел суммы равен сумме пределов? В случае отрицательного ответа приведите правильную формулировку подобного свойства.

8. Что вкладывается в понятие «неопределенные выражения»? Какие типы неопределенностей (здесь) рассматриваются? Что вкладывается в понятие «раскрытие неопределенности»?

9. Что называется корнем m-ой степени из числа a? Какой символ употребляют для этого? Приведите теорему существования арифметического корня. Что

понимают под степенью a^u при произвольном действительном u? Что понимается под символом $\lim\limits_{n\to\infty} a^{u_n}$, где последовательность u_n имеет предел?

10 Что называется логарифмом числа b по основанию a? Приведите теорему существования логарифма. Что понимать под символами а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_a u_n\right)$? б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n^{\alpha}\right)$?

11. Что вкладывается в понятие «второй замечательный предел»? Приведите две формулировки определения числа e.

Предел функции

1. Как определяется геометрически предел функции $y=f(x)$ при $x\to a$? Дайте определение предела функции на «языке $\varepsilon-\delta$». Равносильны ли оба этих определения? Приведите примеры функций имеющих предел при $x\to a$; не имеющих предела при $x\to a$. Приведите геометрическую иллюстрацию поведения функции вблизи ее предела. Как изменяется определение предела функции, если одна или обе величины a и A в определении предела являются символами $-\infty, +\infty, \infty$? (что понимается, например, под «записью» $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$? $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ и пр.). Дайте примеры функций, имеющих (не имеющих) предел при $x\to+\infty\ (-\infty)$).

3. Какая функция называется б.м. при $x\to a$, при $x\to\pm\infty$? Дайте определение с помощью неравенства. Приведите геометрические иллюстрации. Приведите примеры б.м. при $x\to a$, при $x\to\pm\infty$.

4. Какая функция называется б.б. при $x\to a$, при $x\to\pm\infty$? Дайте определение с помощью неравенства. Приведите геометрические иллюстрации. Приведите примеры б.б. при $x\to a$, при $x\to\pm\infty$. Приведите пример неограниченной, но не б.б. величины.

5. Перечислите свойства б.м. и б.б. величин. Какова связь между ними? Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и б.м. величиной? Докажите соответствующие прямую и обратную теоремы.

6. Сформулируйте и докажите теоремы об ограниченности функции, о сохранении знака, о предельных переходах в равенствах и неравенствах, о пределе промежуточной функции.

7. Сформулируйте и докажите правила предельного перехода в случае арифметических действий над функциями.

8. Как формулируются теоремы о предельных переходах в степенях, под знаком логарифма?

9. Как формулируется теорема о замене переменной в операции перехода к пределу?

10. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел). Чему равны $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ и $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}$.

11. Сформулировать и разъяснить признак существования предела монотонной последовательности.

12. Как сравниваются между собой б.м. (б.б.) функции? Как записать в символах, что б.м. α и β есть бесконечно малые одного порядка? что б.м. α имеет порядок выше по сравнению с б.м. β? Всегда ли сравнимы между собой б.м.? Как определяется порядок одной б.м. относительно другой («эталонной») б.м.?

13. Какие б.м. называются эквивалентными б.м.? Как обозначается факт эквивалентности б. м. α и β? Приведите необходимый и достаточный признак эквивалентности б.м. Сформулируйте и докажите свойства эквивалентных б.м. Сформулируйте и докажите теорему о замене «сложных» б.м. эквивалентными им «простыми» б.м. Где используется эта теорема?

14. Что вкладывается в понятие»выделение главной части» б.м. величины. Чему равна главная часть б.м. $\alpha(x)=\operatorname{tg} x-\sin x$ («эталонной» б.м. служит $\beta=x$).

15. Приведите примеры эквивалентных б.м.

16. Чему равны $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$?

Непрерывные функции

1. Как определяется непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0? Сформулируйте три эквивалентных определения непрерывности функции в точке. Как используются понятия левого и правого пределов функции в данной точке при определении непрерывности функции в ней?

2. Что называется правильной точкой непрерывной функции? ее точкой разрыва? Какая функция называется непрерывной в точке x_0 слева (справа)? Какая

функция называется непрерывной на интервале (a,b)? непрерывной на отрезке $[a,b]$?

3. Приведите формулировки и установите непрерывность функций, полученных из непрерывных же функций в результате арифметических действий. Приведите примеры непрерывных функций.

4. Как классифицируются точки разрыва непрерывной функции? Что называется точкой разрыва первого рода? второго рода? Приведите соответствующие примеры.

5. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.

6. Сформулируйте теорему существования обратной функции. Приведите теорему о непрерывности обратной функции. Может ли монотонно возрастающая (убывающая) функция $f(x)$ иметь в некотором промежутке разрывы второго рода? первого рода? Если может, то какие. Сформулируйте теорему о непрерывности монотонно возрастающей (убывающей) функции.

7. Докажите непрерывность основных элементарных функций: a^x, $\log_a x$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности элементарных функций.

8. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (приведите две теоремы Больцано – Коши и две теоремы Вейерштрасса). Дайте геометрическую иллюстрацию этих теорем. Покажите графически, как нарушение каких-либо условий этих теорем ведет к опровержению соответствующей теоремы.

Дифференцирование функции одной переменной

1. Как можно определить «скорость изменения» функции? Приведите определение производной заданной функции. Какие символы употребляются для обозначения производной? Как определяются понятия правой и левой производных? Эквивалентны ли понятия правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 и правый (левый) предел производной $f'(x)$ в точке x_0? Приведите примеры.

2. Как связаны производная функции в данной точке и левая и правая производные ее в этой же точке?

3. Что называется касательной прямой к линии в данной ее точке? Каков геометрический смысл производной от данной функции $y = f(x)$ в системе декартовых координат? Напишите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.

4. Сформулируйте теорему о связи между непрерывностью и существованием производной в данной точке. Что может быть в случае бесконечной производной в этой точке?

5. Выведите простейшие правила вычисления производных; выпишите формулы для производных суммы, произведения, частного двух функций. Как обобщаются формулы для производных сумм и произведения на большее число слагаемых и сомножителей?

6. Получите правила для вычисления производной сложной функции, зависящей от одного и от нескольких промежуточных аргументов.

7. Как связаны производные прямой и обратной функций?

8. Выведите формулы для производных от основных элементарных функций. Запомните их. Заполните таблицу производных основных элементарных функций.

9. Как определяется логарифмическая производная? Какие ограничения при этом накладываются на функции? В каких случаях оправдано применение логарифмической производной? Приведите соответствующие примеры.

10. Как дифференцировать функции, заданные неявно? заданные параметрически?

11. Какая функция называется дифференцируемой в (некоторой) точке? Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости функции в точке. Почему можно отождествлять понятие дифференцируемости функции в точке и существование производной ее в этой же точке? Какой класс функций шире: непрерывных или дифференцируемых в данной точке?

12. Что называется дифференциалом функции? Для каких функций вводится понятие дифференциала? Как выражается дифференциал функции через ее производную? Что понимается под дифференциалом независимой переменной? Какая форма записи для дифференциала называется симметричной формой записи?

13. Приведите и докажите свойства – правила действий с дифференциалами.

14. В чем заключается геометрический смысл дифференциала? Приведите эту геометрическую иллюстрацию.

15. Что понимается под «инвариантностью формы (первого) дифференциала»? Докажите это свойство.

16. На чем основана приближенная замена приращения дифференцируемой функции ее дифференциалом? Какие задачи можно решать с помощью дифференциала?

17. Как определяются производные второго, третьего,…, n-го порядков? Какие обозначения употребляют для подобных производных? Как находятся произ-

водные высших порядков от функций, заданных явно? Получите формулы для вычисления производных n-го порядка от функций a^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, x^α.

18. Как находятся производные высших порядков от функций, заданных неявно? заданных параметрически?

19. Сформулируйте правило Лейбница вычисления производных высших порядков от произведения функций.

20. Как определяются дифференциалы второго, третьего,…, n-го порядков? Какими символами они обозначаются? Получите формулу для вычисления дифференциала n-го порядка для случая независимости переменной x. Нарушается ли форма (вид, формула) дифференциалов второго и высших порядков в случае, если x есть некоторая (дифференцируемая) функция (некоторой) переменной t? Какой должна быть зависимость $x = x(t)$, чтобы имела место инвариантность формы дифференциала любого порядка?

---

1. Сформулируйте и докажите теорему Ролля – теорему о нуле производной. В чем заключается ее геометрический смысл? Покажите существенность всех трех условий, составляющих теорему. Приведите соответствующие примеры.

2. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Проверьте существенность условий этой теоремы. Дайте ее геометрическую иллюстрацию.

3. Приведите теорему Коши. Сформулируйте правила Лопиталя. Какова схема применения правила Лопитала к раскрытию неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$; 0^0, 1^∞, ∞^0. Пофилософствуйте об «универсальности» правила Лопиталя.

4. Сформулируйте теорему Тейлора. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано. Что называется многочленом Тейлора? В результате решения каких проблем может быть получена формула Тейлора?

5. Запишите формулу Тейлора при $x_0 = 0$ – формулу Маклорена. Получите формулы Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Запишите полученные разложения с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано.

---

1. Какая теорема (прямая и обратная) устанавливает связь между характером изменения функции и знаком ее производной? Каков геометрический смысл этой теоремы?

2. Что называется максимумом ($\max$) и минимумом $(\min)$ функции $f(x)$? Приведите соответствующие геометрические иллюстрации. Что означает слово «экстремум»? что входит в это понятие? Как определяются наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке?

3. Приведите необходимое условие существования экстремума функции $f(x)$ в данной точке и его геометрическую иллюстрацию. Покажите примерами возможную недостаточность необходимого условия.

4. Что вкладывается в понятие «критические точки первого рода»? В чем смысл высказывания «точки, подозрительные на экстремум»? Приведите соответствующие иллюстрации этих предложений.

5. Сформулируйте и докажите две теоремы – правила 1 и 2, устанавливающие достаточные условия наличия в данной точке экстремума (минимума или максимума). Изложите схему отыскания промежутков монотонности функции и исследования ее на экстремумы.

6. Приведите «правило» отыскания наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.

7. Определите на промежутке X понятие выпуклости функции вверх (вниз). Что называется точкой перегиба графика функции? Приведите прямую и обратную теоремы о связи между направлением выпуклости функции $y = f(x)$ и знаком ее второй производной. В чем состоят первый и второй достаточные признаки для точек перегиба?

8. Изложите правило исследования функции на выпуклость (вверх и вниз) и на наличие у нее точек перегиба.

9. Что называется асимптотой графика функции? Перечислите типы асимптот. Каков признак существования вертикальной асимптоты у данной функции? Вывести аналитические формулы для а) вертикальных и б) наклонных асимптот (формулы для определения коэффициента k и b для уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$).

10. Опишите общую схему полного исследования графика функции.

Приложения производной к исследованию функций

1. Является ли условие $f'(x_0) = 0$ необходимым для того, чтобы точка $x = x_0$ была точкой локального экстремума функции $f(x)$? Является ли оно достаточным для этого?
2. Может ли быть точка локального экстремума точкой разрыва? Является ли точка $x = 0$ точкой локального максимума функции $f(x) = 1/x^2$?

3. Может ли функция $f(x)$ не иметь производной в точке локального экстремума?
4. Может ли функция $f(x)$ в точке локального экстремума иметь бесконечные односторонние производные? Как называется такая точка? Приведите примеры функции с таким свойством.
5. Что такое угловая точка? Найдите угловые точки функции $f(x)=|\sin x|$.
6. Может ли функция $f(x)$, ограниченная на отрезке $[a,b]$, не иметь на нем наибольшего и наименьшего значений?
7. Какие условия достаточны для того, чтобы функция $f(x)$ имела абсолютный экстремум на отрезке $[a,b]$? Достаточно ли для этого непрерывности функции на $[a,b]$?
8. Пусть найдены критические (в смысле локального экстремума) точки функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Необходимо ли выяснять наличие локальных экстремумов в этих точках и их характер (максимум или минимум), чтобы найти абсолютные экстремумы $f(x)$?
9. Какой из трех достаточных признаков существования локального экстремума является наиболее универсальным и, следовательно, наиболее сильным?
10. Может ли быть угловая точка или точка возврата точкой перегиба?
11. Может ли точка x_0 разрыва второго рода быть точкой перегиба, если при переходе через точку x_0 график функции меняет направление выпуклости?
12. Может ли функция $f(x)$ иметь бесконечную производную в точке перегиба?
13. Обязательно ли требование дифференцируемости функции $f(x)$ или обратной к ней функции $f^{-1}(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0,\delta)$ точки x_0, если x_0 - точка перегиба?
14. Что и через что перегибается в точке перегиба?
15. Сформулируйте последовательность действий при поиске а) локальных экстремумов, б) абсолютных экстремумов и в) точек перегиба заданной функции $f(x)$.

Неопределенный интеграл

1. Что называется первообразной для данной функции $f(x)$? Первообразная является функцией или числом? Существует ли формула, описывающая множество всех первообразных для данной функции? Как называется такое множество? В чем различие между первообразной и неопределенным интегралом? Су-

ществует ли производная у первообразной? Может ли существовать первообразная для первообразной?

2. Найдите первообразную для функции *f(x)= sinx,* которая в точке $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.
3. Известно, что две первообразные для функции $f(x) = e^x$ в точке $x=1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x=100$?
4. Что такое интегрирование? Как соотносятся между собой задачи дифференцирования и интегрирования?
5. Существует ли первообразная для произвольной функции? Для каких функций первообразная всегда существует?
6. Каково геометрическое истолкование неопределенного интеграла? Что называется интегральной кривой данной функции?
7. В чем разница между берущимся и неберущимся интегралами? Может ли быть неберущимся интеграл (а) от непрерывной функции; б) от непрерывно дифференцируемой функции? Существует ли неберущийся интеграл, если подынтегральная функция непрерывна?
8. Перечислите основные свойства неопределенных интегралов. В чем заключается свойство инвариантности формул интегрирования?
9. Какой метод вычисления интегралов называется «непосредственным интегрированием»?
10. В чем заключается метод «интегрирования подстановкой» (замены переменой)? В каких случаях рекомендуется применять подстановку $x = \varphi(t)$? в каких – подстановку $t = \psi(x)$? Приведите примеры. Каким условиям должны удовлетворять функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$? Что такое “подведение под знак дифференциала”?
11. В чем идея метода «интегрирования по частям»? Запишите формулу интегрирования по частям. К каким исходам может привести использование формулы интегрирования по частям? Приведите примеры. Почему метод интегрирования по частям носит такое название? Перечислите типы неопределенных интегралов, которые обычно вычисляют интегрированием по частям.
12. Какие неопределенные интегралы называются табличными? Выражаются ли они через основные элементарные функции? Всегда ли заданный неопределенный интеграл можно свести к табличному? Какой из интегралов $\int xe^{x^2}dx$, $\int e^{x^2}dx$ сводится к табличному?

13. В чем состоит свойство инвариантности при интегрировании и где оно применяется?
14. Всякая ли рациональная дробь интегрируема в элементарны функциях?
15. Почему исследуется вопрос об интегрировании только правильной дроби?
16. Что значит «выделить целую часть неправильной дроби»?
17. На какие простейшие вещественные множители можно разложить многочлен с вещественными коэффициентами?
18. На какие простейшие дроби разлагается дробь $\dfrac{x+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}$?
19. Что такое метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?
20. Что такое метод вычеркивания при вычислении неопределенных коэффициентов?
21. Почему важное значение имеют неопределенные интегралы от рациональных функций? Берутся ли они в конечном виде или являются "неберущимися?"
22. В чем заключается метод рационализации подынтегрального выражения? При вычислении каких из интегралов: $\int R\left(x,\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots\right)dx$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - постоянные, m,n,p,q – целые числа); $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, (a,b - постоянные, m, n, p – рациональные числа); $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ (a,b, c - постоянные); $\int R(\sin x,\cos x)dx$ применяется этот метод? (Здесь всюду R - рациональная функция своих аргументов). Каковы для данных типов интегралов подстановки, реализующие этот метод? Какого типа интегралы вычисляются с помощью подстановок Эйлера?
23. Через какие основные элементарные функции выражается в конечном виде неопределенный интеграл от любой рациональной функции?
24. Какие из интегралов $\int \ln x dx$, $\int \dfrac{dx}{\ln x}$, $\int xe^x dx$, $\int \dfrac{e^x}{x}dx$, $\int \dfrac{\sin x}{x}dx$, $\int x\sin x dx$, $\int \dfrac{\cos x}{x}dx$, $\int x\cos x dx$ вычисляются в конечном виде и с помощью какого метода?
25. С помощью какого действия можно всегда проверить правильность вычисления неопределенного интеграла?

26. Что называется «универсальной подстановкой», почему ее так называют и как интегрируются рациональные функции от синуса и косинуса – $R(\sin x, \cos x)$ – с ее помощью? В каких случаях рекомендуется применять подстановки а) $t=\sin x$; б) $t=\cos x$; в) $t=\operatorname{tg} x$ $(t=\operatorname{ctg} x)$?
27. С помощью каких тригонометрических подстановок вычисляются интегралы: $\int\sqrt{1-x^2}dx$, $\int\sqrt{x^2-3}dx$, $\int\sqrt{x^2+3}dx$, $\int\sqrt{x^2-2x+2}dx$, $\int\sqrt{2+2x-x^2}dx$?
28. Как интегрируются «биномы» $\sin^m x\cos^n x$ в случаях а) $m=2k+1$; б) $n=2k+1$; в) $m=2k,\ n=2l$.

Определенный интеграл

1. Как называются величины a, b, x, выражения $f(x), f(x)dx$ в символе $\int\limits_a^b f(x)dx$ определенного интеграла?
2. Что такое разбиение сегмента *[a, b]*?
3. Что такое интегральная сумма функции *f(x)* на сегменте [a, b]?
4. Дайте определение предела интегральных сумм при измельчении разбиений сегмента *[a, b].*
5. Что такое определенный интеграл?
6. Какая функция называется интегрируемой?
7. Докажите, что неограниченная функция неинтегрируема.
8. Интегрируема ли функция *f(x)=1 /x* на сегменте *[1, 2]*? На сегменте *[-1, 1]*?
9. Интегрируема ли функция *f(x) = tgx ctgx* на сегменте *[π/6, π/4]*? на сегменте *[-1, 1]*?
10. Интегрируема ли функция $f(x) = e^{1/x}$ на сегменте *[-3, -2]*? на сегменте *[-1, 0]*? на сегменте *[-1,1]*?
11. Всякая ли ограниченная функция интегрируема? Обоснуйте ответ примерами.
12. Сформулируйте необходимые и достаточные условия интегрируемости (два варианта).
13. Назовите известные Вам классы интегрируемых функций. Приведите примеры функций из этих классов.
14. Придумайте пример монотонной на сегменте *[a, b]* функции, имеющей бесконечно много точек разрыва. Интегрируема ли такая функция на *[a, b]*?

15. Перечислите классы интегрируемых на отрезке функций.
16. Как определяется площадь криволинейной трапеции через определенный интеграл? работа силы? путь? масса? Может ли значение определенного интеграла быть отрицательным?
17. В чем состоят свойства аддитивности и сохранения знака определенного интеграла?
18. Перечислите свойства определенного интеграла.
19. Пусть *f(x)* интегрируема на *[a, c]* и неинтегрируема на *[c, b]*. Что можно сказать о ее интегрируемости на *[a, b]?*
20. Какими свойствами обладает интеграл с переменным верхним пределом – функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, если а) $f(x)$ есть интегрируемая функция; б) $f(x)$ есть непрерывная функция?
21. Сформулируйте основную теорему интегрального исчисления.
22. В чем состоит метод интегрирования по частям в определенном интеграле?
23. В чем состоит метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле?
24. Как вычисляется определенный интеграл от четной и нечетной функции по отрезку интегрирования, симметричному относительно начала координат?
25. Как распространяется понятие определенного интеграла в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций? Как формулируется теорема сравнения (в предельной форме) для несобственного интеграла первого и второго рода? Как вычисляются интегралы от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке отрезка интегрирования? Как они называются?
26. В чем заключается метод приближенного вычисления определенных интегралов? Сформулируйте методы приближенного вычисления определенных интегралов: правило треугольников и трапеций; метод Симпсона. Насколько точно можно вычислять определенные интегралы с помощью этих методов?

Приложения определенного интеграла

1. Какие общие элементы или этапы имеет схема применения определенного интеграла для вычисления различных геометрических и физических величин?
2. Пусть кривая *AB* задана уравнением $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$. В чем различие между условиями на функцию $f(x)$ при вычислении с помощью определенного интеграла площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой *AB*, осью *Ox* и прямыми $x=a$, $x=b$, и длины кривой *AB*?

3. Что понимается под длиной дуги кривой? Участвует ли в этом определении понятие предела?
4. По каким формулам вычисляется длина кривой: а) заданной параметрически; б) в декартовых координатах; в) в полярных координатах?
5. Какая кривая (дуга) называется спрямляемой? Могут ли существовать неспрямляемые кривые?
6. Объем тела, образованного вращением некоторой кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox или Oy, и поверхность этого тела выражаются определенным интегралом через функцию $f(x)$. В каком случае на $f(x)$ налагаются более сильные требования - при вычислении объема или поверхности?
7. По какой формуле вычисляется: а) объем тела с известными поперечными сечениями; б) объем тела вращения?
8. Для вычисления каких величин могут быть использованы теоремы Гульдина? Можно ли их применять для вычисления координат центра тяжести дуги кривой или плоской фигуры?
9. Для вычисления каких геометрических и физических величин можно применять определенный интеграл? Важна ли при этом физическая природа величины?

Функции многих переменных

1. Как определяются частные производные? Как их обозначают? Почему в записи частных производных используют «круглые ∂»?

2. В чем заключается геометрический смысл частных производных?

3. Следует ли из существования обеих частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в некоторой точке непрерывность функции $z = f(x, y)$ в этой же точке?

4. Что называется частным приращением и частным дифференциалом по x функции $z = f(x, y)$? Как выражается частный дифференциал функции через ее частную производную?

5. Какая функция называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$? Что такое условия дифференцируемости? Сформулируйте необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции двух переменных в данной точке. Докажите эту теорему. Какие условия должны быть выполнены, чтобы эта функция (обязательно) была непрерывной в данной точке?

6. В чем существо дифференцируемости функции в данной точке? Равносильны ли утверждения а) о дифференцируемости функции многих переменных в данной точке и б) о существовании (всех) частных производных в данной точке?

7. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции многих переменных. Запишите формулы для вычисления частных производных от сложных функций.

8. Получите формулу для вычисления производной (первого порядка) от неявно заданной функции одной переменной. Выведите формулы для вычисления частных производных от функции многих переменных, заданной неявным образом.

9. Как определяется дифференциал функции многих переменных? Для какой функции вводится понятие дифференциала? Какова формула для вычисления (полного) дифференциала?

10. В чем заключается инвариантность формы (вида) дифференциала функции многих переменных? Докажите это свойство.

11. Запишите и докажите свойства дифференциала (правила дифференцирования) для функции многих переменных.

12. На чем основано применение полного дифференциала в приближенных вычислениях? Получите формулу для приближенного вычисления значений функции с помощью полного дифференциала. Можно ли оценить погрешность вычислений с помощью (полного) дифференциала? Как это сделать?

13. Как определяется касательная линия к пространственной кривой? Получите уравнение касательной линии. Как определяется нормальная плоскость к линии в данной точке? Получите уравнение нормальной плоскости. Как составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой, заданной пересечением двух поверхностей?

14. Что называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке ее? Получите уравнение касательной плоскости к поверхности в случае ее явного и неявного заданий. Определите нормаль к поверхности в заданной точке, Получите уравнение нормали в случае явного и неявного задания уравнения поверхности.

15. В чем заключается геометрический смысл полного дифференциала в декартовой системе координат?

18. Как определяются частные производные высших порядков? Приведите теорему о смешанных производных. Сколько различных производных и каких можно получить для функции двух переменных $z = f(x, y)$ при ее n кратном дифференцировании?

19. Как вычисляются производные высших порядков от сложной функции?

20. Как определяются дифференциалы второго, третьего,…, n-го порядков? Какова их символическая запись? По каким формулам они вычисляются для функции двух переменных $z = f(x, y)$ с независимыми x и y?

21. Нарушается ли инвариантность форму в общем случае у дифференциалов порядка выше первого, если в $z = f(x, y)$ переменные x и y являются некоторыми функциями: $x = x(\xi, \eta, ...)$, $y = y(\xi, \eta, ...)$? При какой зависимости переменных x и y от $\xi, \eta, ...$ сохраняется вид у дифференциалов высших порядков?

---

1. Запишите формулу Тейлора для функции многих переменных, записав ее приращение через последовательные дифференциалы. Запишите в развернутом виде формулу Тейлора третьего порядка для функции двух переменных $z = f(x, y)$.

2. Как определяются экстремумы (максимумы и минимумы) функции многих переменных? Объясните, в чем смысл фразы: «максимум и минимум в данной точке – локальные понятия». Что такое наибольшее и наименьшее значения функции в некоторой области?

3. Сформулируйте и докажите необходимые условия существования экстремума у функции многих переменных. Как определяются критические точки первого рода для таких функций?

4. Как формулируются достаточные условия существования экстремума у функции двух переменных?

5. Приведите схему отыскания наибольшего и наименьшего значения непрерывных в замкнутой области функций многих переменных.