

Лабораторная работа №6

ДИФРАКЦИЯ ЛАЗЕРНОГО СВЕТА. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Цель работы: Изучить дифракцию лазерного света на дифракционной решетке и сетке. Определить параметры излучения лазера, сетки и дифракционной решетки по дифракционной картине. Сравнить полученные результаты.

1. Дифракция Фраунгофера на щели

Дифракцией будем называть отклонение света от прямолинейного распространения, обусловленное, прежде всего, огибанием волнами препятствий.

В основе расчета дифракции лежит принцип Гюйгенса—Френеля, который гласит, что каждый элемент волновой поверхности S является источником вторичных волн (Рис. 1). Малая площадка dS волновой поверхности порождает в точке наблюдения P колебания светового вектора dE . Пусть \vec{n} вектор нормали к элементу dS , \vec{r} — радиус-вектор, проведенный от элемента dS в точку наблюдения P , а θ — угол между ними.

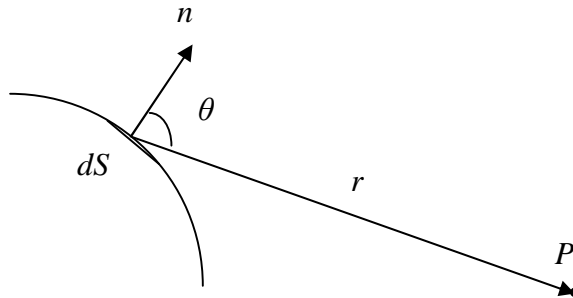


Рис. 1

Тогда для сферической волны с амплитудой колебаний E_s , циклической частотой ω можно записать

$$dE = K(\theta) \frac{E_s}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS, \quad (1)$$

где α_0 — начальная фаза колебания, k — волновой вектор, $K(\theta)$ — коэффициент, зависящий от угла. При значении $\theta = \frac{\pi}{2}$ коэффициент равен нулю, а при значении $\theta = 0$ максимален.

Резльтирующее колебание в точке наблюдения определяется интегрированием (1) по всей волновой поверхности.

Дифракция сферических волн называется дифракцией Френеля, а дифракция плоских — дифракцией Фраунгофера (дифракцией в параллельных лучах). Имея источник сферических волн нетрудно получить дифракцию Фраунгофера. Для этого необходимо удалить источник на “бесконечность”.

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны на бесконечной прямоугольной щели (Рис. 2). Поместим за щелью собирающую линзу L , а в ее фокальной плоскости экран.

Разобьем волновую поверхность, попадающую на щель, на зоны параллельные краям щели. Пусть ширина щели a , а ширина зоны dx . Ось координат x проведем, как показано на Рис. 2, поместив начало оси на краю щели.

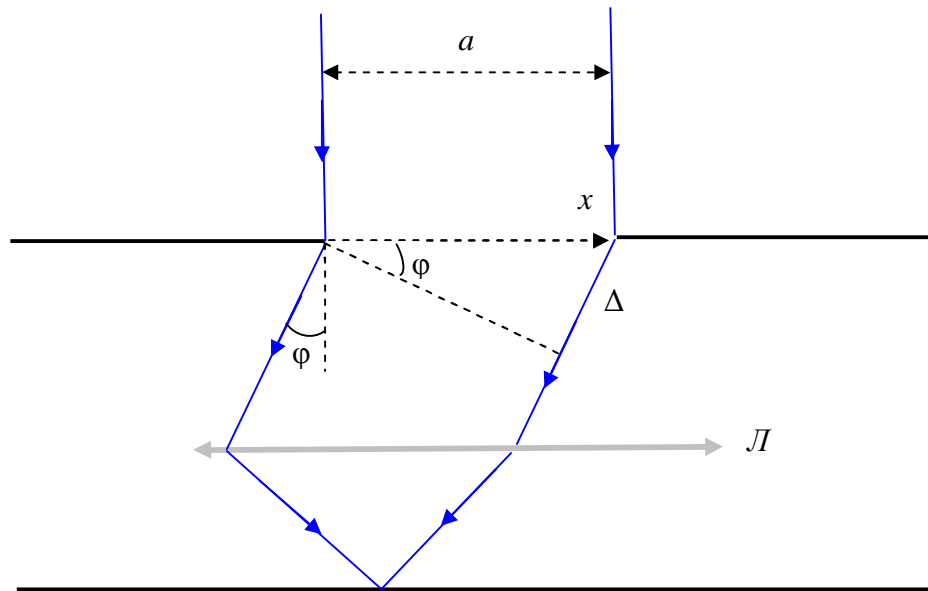


Рис. 2

Излучение каждой зоны, направленное под углом φ к направлению распространения волны, в соответствии с принципом Гюйгенса—Френеля можно записать как

$$dE = K(\varphi) \frac{E_a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (2)$$

Для плоской волны и малых углов дифракции можно положить, что множитель r^{-1} и коэффициент $K(\varphi)$ практически постоянны. Не ограничивая общности рассуждений, положим, что $\alpha_0 = 0$. Определим элементарную площадку в виде $dS = Ydx$, где Y — единица длины в поперечном направлении.

Линза, собравшая параллельные лучи в фокальной плоскости не меняет их разность фаз. Как видно (Рис. 2) оптическая разность хода между зонами определяется выражением $r = x \sin \varphi$. Учитывая сказанное выше, (2) можно переписать в виде

$$dE = E_a A \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx,$$

где A некоторая константа, а E_a — амплитуда светового вектора в плоскости щели.

Световой вектор в точке наблюдения на экране получаем, интегрируя по всей щели

$$E = E_a A \int_0^a \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx.$$

Замена переменных $y = \omega t - kx \sin \varphi$, приводит к выражению

$$E = -\frac{E_a A}{k \sin \varphi} \int_{\omega t}^{\omega t - ka \sin \varphi} \cos(y) dy = \frac{E_a A}{k \sin \varphi} (\sin(\omega t) - \sin(\omega t - ka \sin \varphi)).$$

Учитывая тригонометрические соотношения и, связь волнового вектора с длиной волны $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получаем выражение для колебаний светового вектора в точке наблюдения

$$E = E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right), \text{ где } E_\phi = \frac{E_a A \lambda}{\pi \sin \varphi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right).$$

Множитель E_ϕ играет роль амплитуды и зависит от направления, под которым ведется наблюдение. Для точки, лежащей на оси симметрии (значении $\varphi = 0$), совершив предельный переход, получаем $E_0 = E_a A$. Тогда

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi}.$$

С учетом того, что интенсивность света I пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора, получаем, что

$$I_{\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi. \quad (3)$$

График функции (3) приведен на Рис. 3. Поскольку (3) чётная функция, то есть $I_{\varphi} = I_{-\varphi}$, то дифракционная картина симметрична относительно центра линзы

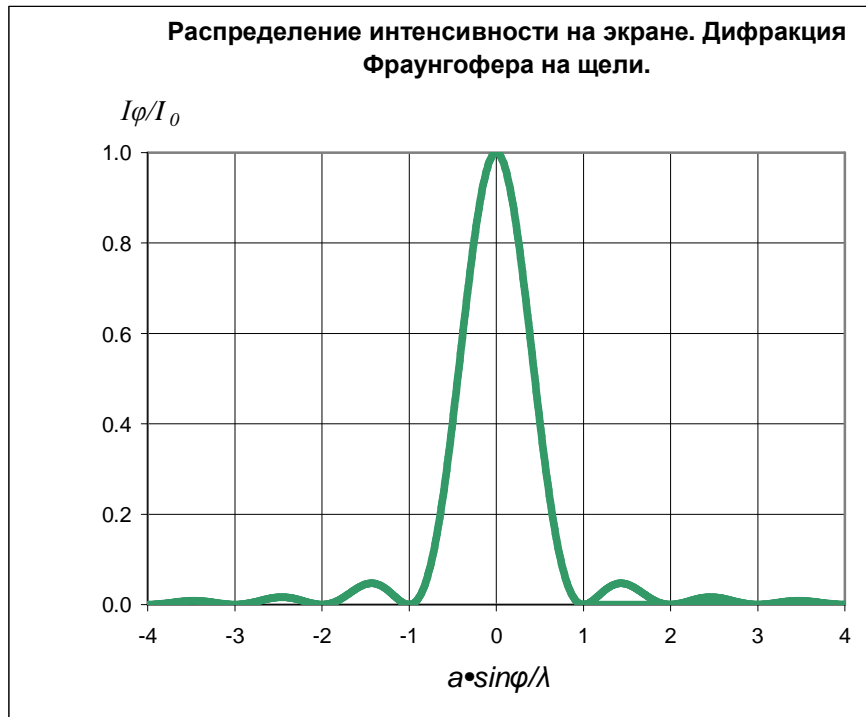


Рис. 3

Минимумы интенсивности будут наблюдаться при условии, что значение u кратно π , отсюда следует

$$a \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Напротив центра линзы находится центральный (нулевой) максимум интенсивностью I_0 . Приблизительно посередине между минимумами располагаются следующие максимумы меньшей интенсивности. Условие для них можно записать как

$$a \cdot \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Как показывают расчеты, (5) незначительно отличается от точного условия для максимумов

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right) = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi.$$

Подставляя (5) в (3) найдем отношение интенсивностей максимумов m -го и нулевого порядков

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{4}{\pi^2 (2m + 1)^2}.$$

Для первых трех максимумов имеем значения 0,045, 0,016, 0,008.

Поскольку $\sin \varphi \leq 1$, то из (4) следует, что количество наблюдаемых дифракционных минимумов ограничено значением $m \leq \frac{a}{\lambda}$.

Условия (4)-(5) можно получить другим способом. Разобьем щель на зоны таким образом, что бы оптическая разность хода от краев соседних зон до точки наблюдения различалась на $\lambda/2$. Оптическая разность хода между крайними, т.е. лежащими у правого и левого края щели, зонами, как видно, Рис. 2, равна $\Delta = a \cdot \sin(\varphi)$. Тогда, на ширине щели поместится $m = \frac{\Delta}{\lambda/2}$ зон. Соседние зоны создают в точке наблюдения колебания, одной амплитуды и сдвинутые по фазе на π . Интерферируя, они погасят друг—друга. Если число зон четное, то наблюдается дифракционный минимум

$$a \cdot \sin(\varphi) = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Если число зон нечетное, то наблюдается дифракционный максимум

$$a \cdot \sin(\varphi) = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

В прямом направлении щель действует как одна зона, и в этом направлении наблюдается центральный дифракционный максимум.

Заметим, что дифракционная картина связана с положением линзы, а не щели. Параллельный самой себе перенос щели не меняет дифракционной картины, а вот смещение линзы приводит к смещению дифракционной картины на экране.

Если при построении лучей от краев щели (Рис. 2) незначительно нарушить их параллельность, то при значительном удалении от щели они пересекутся, и дифракционную картину можно наблюдать в отсутствие собирающей линзы. Если L расстояние от щели до экрана, то условием, при котором реализуется такой способ наблюдения, имеет вид $L \gg a^2/\lambda$. При этом, полученные ранее формулы (3)—(5), останутся справедливыми.

В случае если $L \ll a^2/\lambda$ на экране будет наблюдаться геометрическое изображение щели (случай геометрической оптики).

2. Дифракция света на дифракционной решетке

Одномерной дифракционной решеткой называется совокупность большого числа одинаковых и параллельных штрихов (щелей, выступов), нанесённых на некоторую плоскую поверхность. Решетки делятся на прозрачные и отражательные. Дифракция на решетке любого типа принципиальных различий не имеет. Существуют различные технологии нанесения штрихов (щелей). Механическое нарезание алмазным резцом, травление кислотой, голографический процесс. В последнем случае решетка называется голографической.

Рассмотрим прозрачную решетку. Пусть a — ширина щели, b — расстояние между ними, тогда $d = a + b$ называется постоянной или периодом решетки, Рис. 4.

Дифракционная картина на решетке есть результат интерференции волн идущих от всех щелей. Независимо от положения щели центральный максимум дифракционной картины от каждой щели находится напротив центра линзы. Поскольку колебания от разных щелей когерентны, то при суммировании необходимо учесть фазы этих колебаний.

Как видно, Рис. 4, оптическая разность хода между лучами от соседних щелей равняется $\Delta = d \cdot \sin(\varphi)$, тогда разность фаз между лучами $\delta = k\Delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\varphi)$. Пусть

первая щель излучает поле $E_1 \cos(\omega t)$, тогда для щелей с номерами от 2 до N имеем $E_2 = E_1 \cos(\omega t + \delta)$, $E_3 = E_1 \cos(\omega t + 2\delta)$, ...; $E_N = E_1 \cos(\omega t + (N-1)\delta)$. Суммарный вклад всех щелей можно записать в виде

$$E = E_1 \sum_{j=1}^N \cos(\omega t + (j-1)\delta).$$

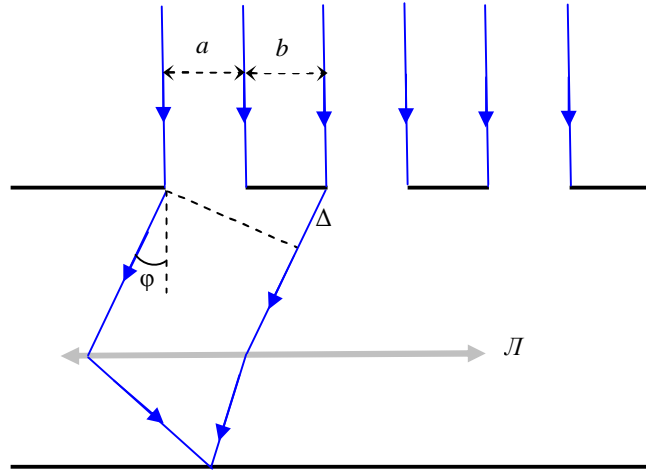


Рис. 4

Перейдем к комплексной форме записи $E = E_1 e^{i\omega t} \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\delta}$. Выражение, стоящее под знаком суммы, есть геометрическая прогрессия, поэтому, преобразуя, получаем, что

$$\sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\delta} = \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = \frac{(e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2}) e^{iN\delta/2}}{(e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}) e^{i\delta/2}} = \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} e^{i\frac{N-1}{2}\delta}.$$

Таким образом, поле от всех щелей можно записать в виде $E = E_A e^{i\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right)}$, где $E_A = E_1 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$ играет роль амплитуды. Тогда интенсивность запишется в виде

$$I_\varphi = I_1(\varphi) \left(\frac{\sin(Nu)}{\sin(u)} \right)^2, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad (6)$$

где $I_1(\varphi)$ распределение интенсивности света, обусловленное одной щелью (3).

Проанализируем полученное выражение. При определенных направлениях $I_1 = 0$, а, следовательно, и $I_\varphi = 0$. Очевидно, что условие минимума для одной щели (4) является условием минимума для решетки. Если в направлении φ ни одна из щелей не распространяет свет, то и амплитуда колебаний в соответствующей точке экрана будет равна нулю. Итак, главные минимумы дифракционной решетки определяются условием

$$a \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Если положить $u = \pm \pi m$, или же

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

то в выражении (6) возникнет неопределенность вида $0/0$, раскрыв которую получаем выражение $I_\varphi = I_1 N^2$. Отсюда следует, что решетка в N^2 раз усиливает интенсивность света от одной щели. Условие (8) определяет главные максимумы дифракционной решетки.

Дополнительные минимумы возникают из условия $Nu = \pm \pi m$, где m не кратно N . При этом числитель (6) равен нулю, а знаменатель нет. Тогда

$$d \cdot \sin \varphi = \pm \frac{m}{N} \lambda, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, N+2, \dots \quad (9)$$

На Рис. 5 представлено распределение интенсивности света на экране при дифракции на решетке. Огибающей кривой служит зависимость $I_1(\varphi)$. В расчетах полагалось, что $N = 8$, а $d = 3a$.

Если бы излучение от различных щелей решетки не было когерентным, то при суммировании на экране интенсивность возрастала в N . Усиление в N^2 раз есть следствие интерференции излучения от различных щелей.

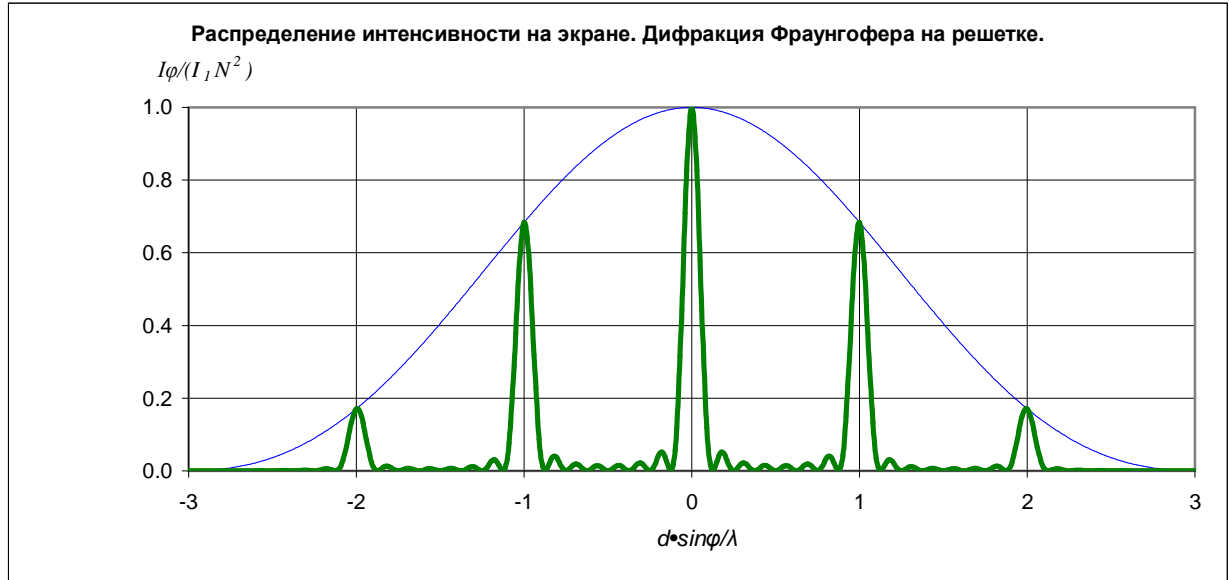


Рис. 5

Двумерную дифракционную решетку представим в виде двух пропускающих одномерных решеток, щели которых взаимно перпендикулярны. Главные максимумы такой решетки будут наблюдаться в направлениях, для которых одновременно выполняется условие максимума для каждой решетки.

$$\begin{aligned} d_1 \cdot \sin \varphi_1 &= \pm m_1 \lambda, \quad m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ d_2 \cdot \sin \varphi_2 &= \pm m_2 \lambda, \quad m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где d_1 и d_2 периоды решеток во взаимно перпендикулярных направлениях. Для решеток часто выполняется равенство периодов $d_1 = d_2$.

Дифракционная картина, Рис. 6, будет представлять собой совокупность светлых пятен на пересечении горизонтальных и вертикальных линий отвечающих условиям максимумов. Интенсивность будет максимальной для направлений соответствующих направлениям на главные максимумы каждой из решеток $m_1 = 0$ и $m_2 = 0$.

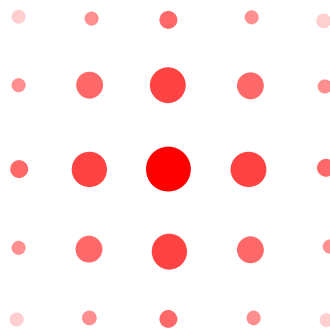


Рис. 6

В качестве двумерной дифракционной решетки в работе используется сетка.

Описание лабораторной установки

Принадлежности. Полупроводниковый лазер, голографическая дифракционная решетка, сетка, направляющая, набор рейтеров (зажимов), короткофокусная линза, экран для наблюдения с магнитами для крепления бумаги, линейка. Мощностью лазера 6 мВт, длина волны излучения 650 нм ($650 \cdot 10^{-9} \text{ м}$), что соответствует красному свету. С помощью рейтеров лазер, решетка, сетка, линза и экран могут устанавливаться в положениях 1-7 направляющей, Рис. 7.

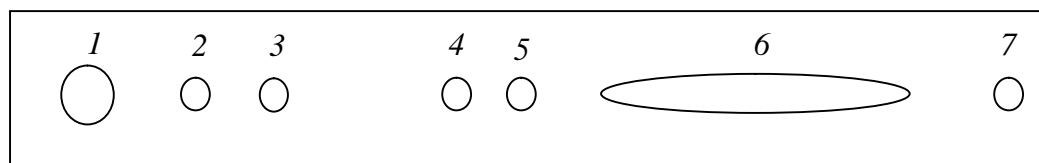


Рис. 7

Рассмотрим расстановку приборов, приведенную на Рис. 8. Излучение лазера можно считать плоской волной. Параметр решетки — число штрихов (щелей) на единицу длины $M = d^{-1}$ задан (подписан на решетке). При малых углах дифракции (экран удален от решетки), дифракционная картина наблюдается без фокусирующей линзы. При этом условие для главных дифракционных максимумов (8) сводится к виду $d \cdot \varphi_m = \pm m\lambda$, и для

m -того максимума справедливо $\text{tg}(\varphi_m) = \frac{x_m}{L} \approx \varphi_m$.

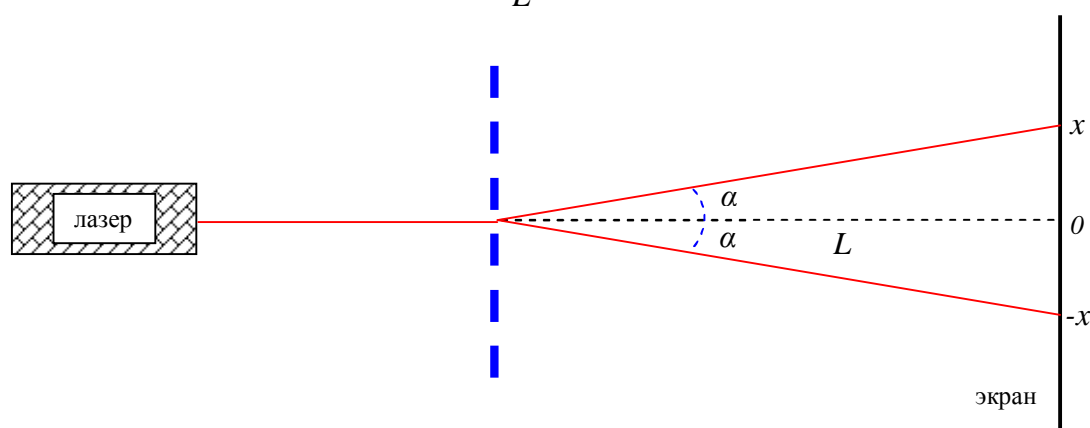


Рис. 8

Объединяя эти выражения, получаем

$$d \cdot x_m = m\lambda L, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Если между решеткой и экраном расположить короткофокусную собирающую линзу, так, чтобы выполнялось условие геометрической оптики, то на экране, будет наблюдаться увеличенное изображение сетки.

Задание №1

1. Соберите установку согласно Рис. 8. Лазер ставится в положение 1 направляющей, голографическая дифракционная решетка в положение 2, а экран в положение 7. Отцентрируйте луч лазера.
2. Магнитами на экране закрепите лист бумаги для зарисовки.
3. Карандашом на листе бумаги отметьте положение дифракционных максимумов. Измерьте расстояния между ними. Результаты будут точнее, если измерять

расстояние между максимумами номер m и $-m$, тогда x_m будет равняться половине измеренного расстояния.

4. Измерьте расстояние от дифракционной решетки до экрана.
5. Переместите экран в положение б и повторите пункты 3-4.
6. Занесите результаты не менее трех измерений в Таблица 1 и по формуле (11) рассчитайте длину волны излучения лазера.

Таблица 1

№	x_m , мм	m	L , мм	λ , нм	$\lambda_{ср}$, нм
1					
2					
3					

Задание №2

1. Соберите установку согласно Рис. 8. Лазер ставится в положение 1 направляющей, двумерную дифракционную решетку (сетку) в положение 2, а экран в положение 7. Отцентрируйте луч лазера.
2. Магнитами на экране закрепите лист бумаги для зарисовки.
3. Измерьте расстояние от решетки до экрана.
4. Карандашом на листе бумаги отметьте положение дифракционных максимумов
5. Измерьте расстояния, не менее трех значений, между максимумами в продольном направлении и занесите их в Таблица 2. Результаты будут точнее, если измерять расстояние между максимумами номер m и $-m$, тогда x_m будет равняться половине измеренного расстояния.
6. Прodelайте пункт 5, измеряя расстояния в поперечном направлении. Результаты занесите в Таблица 3
7. По формуле (11) рассчитайте период сетки в продольном и поперечном направлениях.

Таблица 2

№	x_m , мм	m	L , мм	$d_{1.}$, мм	$\langle d_1 \rangle$, мм
1					
2					
3					

Таблица 3

№	x_m , мм	m	L , мм	$d_{2.}$, мм	$\langle d_2 \rangle$, мм
1					
2					
3					

8. Поместите между сеткой и экраном короткофокусную собирающую линзу. Получите на экране увеличенное изображение сетки. Зарисуйте его на листе бумаги. Измерьте размеры ячеек на изображении.
9. Вместо сетки в оправу вставьте прозрачную линейку. На листе бумаге отметьте положение миллиметровых делений линейки. Измерьте расстояние между ними. Рассчитайте коэффициент увеличения.
10. Рассчитайте истинные размеры ячеек сетки и сравните с результатами измерений по дифракционной картине.

Контрольные вопросы

1. Объясните сущность дифракции света, дифракции Френеля и Фраунгофера.
2. Принцип Гюйгенса-Френеля. Объясните с его помощью явление дифракции.
3. Метод зон Френеля.
4. Объясните получение условий максимумов и минимумов при дифракции света на щели.
5. Получите условия минимумов и максимумов при дифракции на решетке.
6. Почему в работе можно получить дифракционную картину в отсутствии линзы.
7. Сделайте сравнительную оценку дифракционных картин, полученных на щели и на решетке.
8. Объясните картину дифракции на двухмерной решетке.