ВВЕДЕНИЕ

1. Класс точности приборов и максимальные приборные погрешности

Приборы могут нормироваться по разным видам погрешностей. Для того чтобы заранее оценивать погрешность, которую вносит данное средство измерения (прибор) в конечный результат, пользуются так называемыми нормированными значениями погрешности. Под *нормированными значениями* понимают погрешности, являющиеся предельными для данного типа средства измерения.

Обобщенной метрологической характеристикой средств измерения является *класс точности*, который определяет допустимые пределы всех погрешностей, а также все другие свойства, влияющие на точность средств измерений. Чаще всего встречаются три типа классов точности.

Класс точности прибора задан в виде относительной погрешности δ:

$$\delta = \frac{\Delta_x}{x} \cdot 100\% . \quad (1)$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности (*максимальная приборная погрешность*) равен

$$\Delta_x = \delta \frac{x}{100} . \quad (2)$$

Данный вид класса точности указывают на приборе внутри кружочка, например 1,5 .

Класс точности прибора задан в виде приведенной погрешности γ:

$$\gamma = \frac{\Delta_x}{x_N} \cdot 100~\% , \quad (3)$$

где x_N – **нормирующее значение** измеряемой величины, которое **равно пределу измерения** $x_{\max}$ для приборов *с нулевой отметкой на краю шкалы*. Если же нулевая отметка находится посередине шкалы, то нормирующее значение x_N равно протяженности диапазона измерений. Например, для амперметра со шкалой от –30 до +60А величина $x_N = 60-(-30) = 90$ А.

Предел допускаемой приборной погрешности (максимальная приборная погрешность) равен

$$\Delta_x = \gamma \frac{x_N}{100}. \quad (4).$$

Этот вид класса точности изображают на приборе числом *без изображения кружочка или подчеркивания*, например, просто **1,5**.

На приборах *с резко неравномерной шкалой* класс точности указывается в долях от длины шкалы и обозначается числом над уголком: $\overset{1,5}{\vee}$

Класс точности задан в виде погрешности, определяемой двумя числами (α/β) (своеобразная форма относительной погрешности):

$$\delta = \left\{ \alpha + \beta\left(\frac{x_{\max}}{x} - 1\right)\right\} [\%]. \quad (5)$$

Тогда предел допускаемой приборной погрешности (максимальная приборная погрешность) равен

$$\Delta_x = \left\{(\alpha - \beta)x + \beta\, x_{\max}\right\}/100. \quad (6)$$

Этот вид класса точности указывают на приборе в виде дроби, например 0,02/0,01.

Предельные приборные (инструментальные) погрешности Δ_x определяют лишь так называемые основные погрешности. В общем случае инструментальные погрешности зависят как от измеряемых величин (на одном диапазоне измерений прибора одна погрешность, на другом диапазоне измерения прибора – другая), так и от условий проведения измерений (рабочие условия могут заметно отличаться от нормальных, например, температура выходит за пределы (20 ± 5) °С,

относительная влажность вне предела 30–80 % и т. д.). В ответственных физических экспериментах правильный учет инструментальных погрешностей составляет отдельную задачу измерения.

В таблице приборов в качестве максимальной приборной погрешности указываютт один из видов приведенных выше пределов допускаемой приборной погрешности. Например:

№	Наименование прибора	Фабричный №	Тип прибора или система	Класс точности	Пределы измерения	Цена деления	Максимальная приборная погрешность
1	Вольтметр	7388	Магнитоэлектрическая	1,0	(0…200) В	2 В	2 В
2							

2. Погрешность косвенных измерений

При косвенном измерении физической величины ее значение вычисляется по определенной формуле через величины, получаемые в результате прямых измерений.

Пусть некоторая физическая величина f является функцией величин $x, y, z, \ldots$, которые определяются прямыми измерениями:

$$f = f(x, y, z, \ldots). \quad (7)$$

Допустим также, что $x, y, z, \ldots$ распределены по нормальному закону (закону Гаусса) со среднеквадратичными отклонениями (СКО) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \ldots$ (обычно для случайных погрешностей это выполняется). Тогда, как доказано в теории ошибок, f также распределена по закону Гаусса с СКО, равным

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \ldots} \quad (8)$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}$ – частная производная функции $f(x,y,z,...)$ по x, т.е. производная, при вычислении которой все остальные аргументы функции, кроме x (т. е. $y,z,...$), считаются постоянными. Аналогичный смысл имеют частные производные по $y,z,...$

Наилучшим значением величины f при косвенном измерении является $\overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z},...)$, где $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z},...$ – средние значения величин $x, y, z,...$

В случае, когда формула $f = f(x,y,z,...)$ содержит лишь знаки умножения (и деления) величин $x,y,z,...$ в произвольных степенях: $f = Ax^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}...$ (здесь A, α, β, γ – постоянные величины), формула для погрешности косвенного измерения выглядит особенно просто:

$$\sigma_f = \overline{f}\sqrt{\left(\alpha\frac{\sigma_x}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\beta\frac{\sigma_y}{\overline{y}}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\sigma_z}{\overline{z}}\right)^2 + ...} \tag{9}$$

Предположим, что оценивается величина гравитационной силы взаимодействия двух небесных тел с массами m_1 и m_2. Массы тел найдены с погрешностями σ_{m1}, σ_{m2}. Тогда среднее значение гравитационной силы находится по формуле

$$\overline{F} = \overline{G}\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{\overline{r}^2}, \tag{10а}$$

а погрешность этой оценки силы вычисляется по формуле

$$\sigma_F = \overline{F}\sqrt{\left(\frac{\sigma_G}{\overline{G}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m1}}{\overline{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m2}}{\overline{m}_2}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_r}{\overline{r}}\right)^2}. \tag{10б}$$

Эта формула учитывает тот факт, что при вычислении силы наверняка используется значение гравитационной постоянной $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, которое приводится в простых таблицах физических постоянных. Между тем эта постоянная измерена на настоящий момент с большей точностью, чем это представлено в таблицах, а именно:

$$G = (6{,}6726 \pm 0{,}0008)\cdot10^{-11}\,\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2, \tag{11}$$

т. е. используемое значение величины G содержит *систематическую* погрешность порядка $\sigma_G = 3\cdot10^{-14}$ Н·м^2/кг^2. Это обстоятельство и учитывает формула (10б).

3. Представление результатов измерений

Результаты измерений приводятся в таблицах измерений и графиках. В таблицы измерений записываются результаты *прямых измерений*, а также результаты *промежуточных вычислений*. Для всех величин указываются соответствующие размерности. Таблица измерений в обязательном порядке имеет последний, итоговый столбец, где приводятся результаты измерений с учетом погрешностей. При этом соблюдаются правила округления результатов измерений.

Окончательные результаты измерений приводятся также в выводах по лабораторной работе с указанием погрешности измерений.

При представлении результатов измерений следует руководствоваться следующими правилами округления числовых значений физических величин.

1. ***Погрешность*** результата измерения округляется *до одной* значащей цифры, если первая значащая цифра погрешности равна 3 и более.

2. ***Погрешность*** результата измерения округляется *до двух* значащих цифр, если первая значащая цифра погрешности 1 или 2.

3. ***Среднее значение*** результата измерения округляется *до того же десятичного разряда*, которым оканчивается округленное значение погрешности.

4. Округление производится лишь *в окончательном ответе* (*в последнем, итоговом столбце* таблиц измерений), а все предварительные вычисления проводят с одной-двумя запасными значащими цифрами.

Результат измерения одной и той же физической величины может быть представлен в различном виде в зависимости от значения погрешности измерений:

$$x = (3{,}6 \pm 0{,}3),\quad x = (3{,}57 \pm 0{,}06),\quad x = (3{,}574 \pm 0{,}013).$$

В первой и второй записях результата измерений *последняя цифра в среднем* значении физической величины («6» в первой записи, «7» – во второй записи) оказывается *сомнительной*, а остальные цифры являются *достоверными*. В третьей записи результата измерений сомнительными являются уже *две цифры* в среднем значении физической величины («7» и «4»).

4. Установление зависимостей физических величин

Когда устанавливается зависимость одной величины от другой и сравнивается с теоретически ожидаемой зависимостью, то обычной является практика построения линейных зависимостей. Одна из причин применения этого правила лежит в нашем восприятии: различить две близкие по форме кривые линии весьма непросто, а прямая линия легко «узнается» среди других линий.

Рассмотрим случай, когда *погрешность имеет только величина y*. На практике этот случай встречается довольно часто. Более общий случай требует усложнения процедуры обработки данных.

Пусть теоретическая модель предсказывает линейную зависимость. Задача состоит в том, чтобы «через» экспериментальные точки провести *наилучшим образом* прямую линию и сравнить с теоретически ожидаемой зависимостью.

Пусть искомая наилучшая прямая имеет вид

$$y = ax + b, \tag{12}$$

где угловой коэффициент (тангенс угла наклона) a и величина смещения b подлежат определению с некоторыми среднеквадратичными погрешностями σ_a и σ_b.

Метод наименьших квадратов – один из стандартных методов математической статистики. В этом методе наилучшие значения параметров прямой a и b находятся из условия минимума суммы квадратов величин отклонений $d_i = y_i - (ax_i + b)$:

$$S = \sum (y_i - ax_i - b)^2 . \tag{13}$$

Метод минимизации суммы квадратов отклонений, предложенный еще Лежандром в 1806 г. сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum \{-2x_i(y_i - ax_i - b)\} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum \{-2(y_i - ax_i - b)\} = 0. \tag{15}$$

Решение системы уравнений несложно. Результаты получаются следующие.

- *Наилучшая прямая* проходит через центр тяжести всех экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i . \tag{16}$$

- Параметры a и b наилучшей прямой равны

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{D}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad D = \sum (x_i - \bar{x})^2 . \tag{17}$$

Математическая статистика дает также среднеквадратичные погрешности в определении параметров a и b:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)D}}, \quad \sigma_b = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)}} \tag{18}$$

Если согласно теоретической модели ожидаемая прямая проходит через начало координат, т. е.

$$y = kx, \tag{19}$$

то наилучшее значение углового коэффициента k и его среднеквадратичная погрешность σ_k определяются соотношениями

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sum (y_i - ax_i)^2}{(n-1)x_i^2}} . \tag{20}$$

Приведенные формулы не требуют собственно построения графика. Они дают строгий аналитический способ статистической обработки экспериментальных данных.

Существует *упрощенный способ* оценки параметров наилучшей прямой по данным, представленным на графике, который работает тем лучше, чем больше имеется экспериментальных точек на графике (более 15–20 точек).

Для определения погрешностей σ_a, σ_b и σ_k поступим следующим образом. «Рабочий участок» оси абсцисс (участок, на котором расположены экспериментальные точки) разбиваем на три равные части и в дальнейшем не будем обращать внимание на *среднюю* ее часть.

Поворачиваем наилучшую прямую линию вокруг центра тяжести $(\overline{x}, \overline{y})$ таким образом, чтобы на левом участке выше прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем под ней, а на правом участке – наоборот. Затем поворачиваем прямую линию таким образом, чтобы на левом участке ниже прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем над ней, а на правом участке – наоборот. Обозначим разницу в угловых коэффициентах через Δa. Тогда

$$\sigma_a = \Delta a / \sqrt{n} . \tag{21}$$

Теперь *смещаем* наилучшую прямую вниз *параллельно самой себе* таким образом, чтобы над ней было вдвое больше точек, чем под ней. Затем смещаем прямую вверх параллельно самой себе таким образом, чтобы под ней было вдвое больше точек, чем над ней. Обозначим разницу в величине смещения через Δb. Тогда

$$\sigma_b = \Delta b / \sqrt{n} . \tag{22}$$

Если согласно теоретической модели ожидаемая прямая проходит через начало координат (19), то «рабочий участок» оси абсцисс разбиваем также на три равные части и в дальнейшем не будем обращать внимание на первую – *левую*, ближнюю к началу координат, ее часть.

Поворачиваем наилучшую прямую линию вокруг начала координат таким образом, чтобы над ней (т.е. над второй и третьей частями «рабочего участка») выше прямой оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем под ней. Затем поворачиваем прямую линию таким образом, чтобы под ней оказалось вдвое больше экспериментальных точек, чем над ней. Обозначим разницу в угловых коэффициентах через Δk. Тогда

$$\sigma_k = \Delta k / \sqrt{n} . \tag{23}$$

Применение этих несложных правил дает оценки величин погрешностей σ_a, σ_b и σ_k, вполне удовлетворительные при выполнении учебных лабораторных работ.

Литература

1. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин: Лаб. практикум / В.Н. Холявко и др. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 54 с.
2. Механика и термодинамика: Лабораторный практикум. Вводное занятие / В. Г. Дубровский и др. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.
3. Лабораторные занятия по физике: Учеб. пособие / Л.Л. Гольдин, Ф.Ф. Игошин, С.М. Козел и др. – М.: Наука, 1983. – 704 с.
4. *Зайдель А.Н.* Погрешности измерений физических величин. – Л.: Наука, 1985.
5. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. – М.: МИР, 1971. – 246 с.
6. *Худсон Д.* Статистика для физиков. – М.: Мир, 1967. – 243 с.

Лабораторная работа № 10

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Цель работы – получить экспериментально семейство эквипотенциальных поверхностей и силовых линий методом моделирования электрических полей электрическими токами, протекающими по проводящей среде между парами электродов – аналогов заряженных тел, и качественно сравнить их с ожидаемыми теоретически семействами; найти величины напряженности электрического поля в нескольких точках.

Описание метода и установки

Пусть имеются два заряженных тела, например два точечных заряда ($+q$) и ($-q$) (рис. 1). Тогда, как известно, в окружающем тела пространстве создается электростатическое поле, характеризующееся напряженностью поля $\vec{E}$ и потенциалом φ. Картина силовых и потенциальных линий качественно изображена на рис. 1.