

Курс "Теории вероятностей" в рамках "Спец. глав математики" читается на 2 курсе ФЛА (3 семестр). Предлагаемый конспект построен в виде развернутых комментариев к слайдам.

Глава 1. Случайные события.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1. Случайные события.

Оглавление

Глава 1. Случайные события.....	1
Введение.....	2
Предмет теории вероятностей.....	5
Классификация случайных событий.....	6
Основные понятия теории вероятностей.....	7
Основные понятия комбинаторики.....	8
Схема без возвращения.....	8
Схема с возвращением.....	10
Основные правила комбинаторики. Правила умножения и суммы.....	11
Теоретико-множественный подход к понятию случайного события.....	12
Свойства операций над случайными событиями.....	15
Основные определения вероятности.....	16
Статистическое определение.....	16
Классическое определение вероятности.....	17
Геометрическое определение вероятности.....	18
Аксиоматическое определение вероятности.....	22
Свойства вероятности.....	24
Конечное вероятностное пространство.....	25
Пространство равновозможных элементарных событий.....	26
Решение задач.....	27
Схема "шарики-лунки".....	27

Условная вероятность.	30
Проверка на независимость событий.....	Ошибка! Закладка не определена.
Формула полной вероятности.....	Ошибка! Закладка не определена.
Случайные события в физике, химии и биологии.	Ошибка! Закладка не определена.
ИГРАЛЬНЫЕ КАРТЫ.....	Ошибка! Закладка не определена.
<i>Дополнительный материал. Модели статистической механики.</i>	Ошибка! Закладка не определена.
<i>Модель Максвелла-Больцмана</i>	Ошибка! Закладка не определена.
<i>Модель Бозе-Эйнштейна.....</i>	Ошибка! Закладка не определена.
<i>Модель Ферми-Дирака</i>	Ошибка! Закладка не определена.

Введение.

Основы теории вероятностей были заложены в 16 веке, развитие теории вероятностей связано с попыткой предсказать результаты азартных игр. Это все игры, связанные с подбрасыванием шестигранного кубика (игральной кости), карточные игры. Самое простое, что можно подбросить – монета.

Теория вероятности возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности. Теория вероятности изучает данные закономерности.

Первую книгу по теории вероятностей "О расчетах в карточной игре" опубликовал Христиан Гюйгенс.

Якоб Бернулли ввел классическое определение события и доказал простейший случай закона больших чисел.

В 18-19 веке были доказаны предельные теоремы.

П.Л.Чебышёв со своими учениками создает методы доказательства предельных теорем для сумм независимых произвольно распределённых случайных величин.

В 20 веке теория вероятностей получила строгое формально-логическое обоснование на базе теории множеств. А.Н.Колмогоров ввел аксиоматику теории вероятностей.

Свое дальнейшее продолжение теория вероятностей получила в таких разделах математики как математическая статистика, теория массового обслуживания, теория информации и других.

Теория вероятностей использует достижения других математических наук.

В свою очередь, методы теории вероятностей используются в современных областях физики, в частности, статистической механике.

Большой вклад в развитие основ теории вероятностей внесли следующие ученые:

XVI – Джероламо Кардано ([24 сентября 1501](#), Павия — [21 сентября 1576](#), Рим),
XVII Христиан Гюйгенс голл. *Christiaan Huygens*, [14 апреля 1629](#), Гаага — [8 июля 1695](#),
Блез Паскаль (фр. *Blaise Pascal*, [19 июня 1623](#)—[19 августа 1662](#)),
Пьер де Ферма (фр. *Pierre de Fermat*, [1601](#)—[1665](#)).



Особый вклад внес Бернулли, имя которого в нашем курсе будет упомянуто неоднократно, ему принадлежит первая формулировка Закона Больших Чисел (ЗБЧ):

XVII – Якоб Бернулли (нем. *Jakob Bernoulli*, [27 декабря 1654](#),
XVIII Базель, — [16 августа 1705](#), там же) — швейцарский математик



В нашем курсе будут упомянуты имена таких ученых:

XVIII- Абрахам де Муавр (*Abraham de Moivre*, [26 мая 1667](#), Витри-ле-
XIX Франсуа — [27 ноября 1754](#), Лондон) — английский математик,
Пьер-Симон Лаплас (фр. *Pierre-Simon Laplace*; [23 марта 1749](#) — [5 марта 1827](#)) — французский математик,
Карл Фридрих Гаусс (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; [30 апреля 1777](#), Брауншвейг — [23 февраля 1855](#), Гёттинген),
Симеон-Дени Пуассон (фр. *Siméon-Denis Poisson*, [21 июня 1781](#),
Питивье, Франция — [25 апреля 1840](#), Париж)



Большой вклад в дальнейшее развитие теории вероятностей внесли русские учёные. Пафнутий Львович Чебышёв является основателем одной из самых больших математических школ:

XIX –
XX

Пафнутий Львович Чебышёв(14 (26 мая) 1821, [Окатово, Калужская губерния](#) — 26 ноября (8 декабря) 1894, [Санкт-Петербург](#)) ,

Андрей Андреевич Макаров(1856-1922),

Александр Михайлович Ляпунов(25 мая 1857, [Ярославль](#) — 3 ноября 1918, [Одесса](#))



В 20 веке большой вклад внесли советские математики:

XX

Андрей Николаевич Колмогоров (12 (25) апреля 1903, [Тамбов](#) — 20 октября 1987, [Москва](#)) ,

Хинчин Александр Яковлевич (19 июня 1894 - 18 ноября 1959) ,

нко, с мирович (1 января 1912, [Симбирск](#), ныне [Ульяновск, Россия](#) — 27 декабря 1995, [Москва, Россия](#))



Предмет теории вероятностей.

1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

Итак, что же такое теория вероятностей, что является ее предметом и каковы цели, которые ставит перед собой теория вероятностей? Ответ мы видим на первом слайде.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

!!! Массовость предполагает повторяемость эксперимента при соблюдении одинаковых условий.

Теория вероятностей не дает ответа на вопрос – "что произойдет, например, при очередном подбрасывании кубика?" Речь идет только о некоторой вероятности события. Там, где появляется ответ на поставленный вопрос, заканчивается теория вероятностей и начинается некоторое мошенничество. Мы же в теории считаем кубик абсолютно идеальным, с несмещенным центром тяжести и не используем ловкость рук в подбрасывании одного.

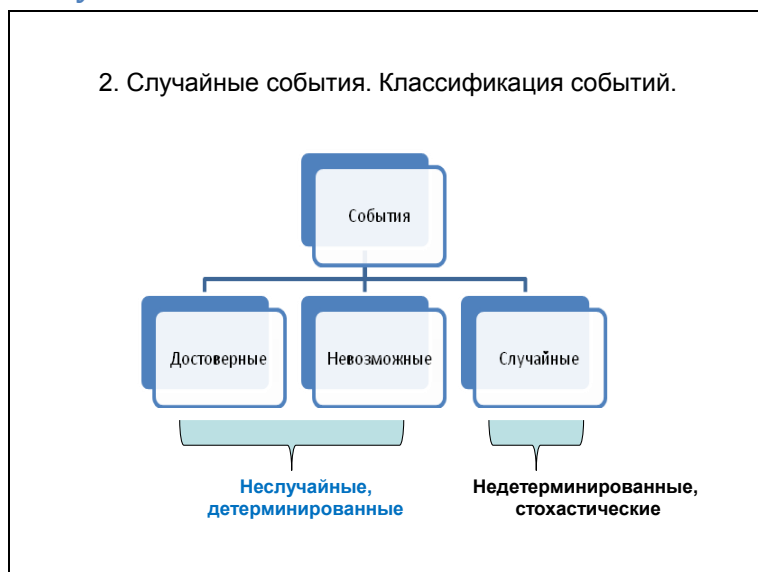
Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.

Как и любая другая область математики, теория вероятностей имеет дело с математическими моделями. Даже если мы имеем дело со случайными событиями, которые могут произойти или не произойти, мы можем предложить некоторые схемы, формулы для расчета вероятности случайного события. Традиционно, математические модели, используемые в теории вероятностей, называются "схемами": схема Бернулли, схема "шарики-лунки", схема с возвратом, схема без возврата (шариков в урну).

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

На самом деле в мире большинство процессов случайны. Мы говорим о прогнозе, о принципе неопределенности. Мы пытаемся постичь некоторые закономерности в наших прогнозах, рассмотреть некоторые предельные случаи, когда в массе своей явления можно уже считать неслучайными. Важно подчеркнуть: теория вероятностей не имеет дело с конкретными единичными событиями, теория вероятностей не дает ответа на вопрос: "какое число выпадет при третьем подбрасывании кубика?" Теория вероятностей утверждает, что вероятность выпадения конкретного числа одинакова для всех значений – чем больше число подбрасываний, тем более точное соотношение результатов можем наблюдать.

Классификация случайных событий.



Рассмотрим основные понятия (это пока нестрогие определения).

Случайное событие – событие, которое может произойти или не произойти.

Можно все случайные события разделить на три класса, что демонстрирует слайд:

- **достоверные** – события, которые обязательно произойдут;
- **невозможные события** – события, которые не могут произойти в данных условиях (например, вода будет находиться в определенном агрегатном состоянии при данном давлении и температуре).

Эти два класса составляют как раз неслучайные события, которые, тем не менее, мы будем упоминать как некоторые предельные.

Наконец, собственно случайные события. Примером таких событий являются события, например, связанные с выигрышем в азартных играх. Такие организации, как игорные заведения, сразу приходят на ум при упоминании "вероятности". С вероятностями связаны также и страховые компании (actuary companies, actuarial mathematics). Собственно, любые финансовые компании в какой-то степени играют в азартные игры. Вспомним биржу, Forex.

Основные понятия теории вероятностей.

Назовём определённую совокупность условий **испытанием**.

Событие – результат испытания.

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может произойти или не произойти.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События образуют **полную группу**, если в результате испытания произойдёт хотя бы одно из них. То есть появление хотя бы одного из событий полной группы есть **достоверное событие**.

События **называются равновозможными**, если ни одно не является более возможным, чем другие.

Попарно несовместные, образующие полную группу, равновозможные события называются **случаи**.

Сформулируем основные понятия, которые потребуются нам в дальнейшем изложении.

Назовём определённую совокупность условий **испытанием**.

Событие – результат испытания.

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может произойти или не произойти. Например, выпадение герба при подбрасывании монеты.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. Например, выпадение определенного числа при подбрасывании игрального кубика исключает одновременное появление другого.

Например, события $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ несовместны.

События $A=\{\text{выпало нечетное число}\}$, $B=\{\text{выпало число, кратное 3}\}$ совместны.

События образуют **полную группу**, если в результате испытания произойдёт хотя бы одно из них. То есть появление хотя бы одного из событий полной группы есть **достоверное событие**.

Так, полную группу образуют, например, события {"Выпал герб", "Выпала решка"} при подбрасывании монеты; выпадение $\{1,2,3,4,5,6\}$ при подбрасывании кубика.

События **называются равновозможными**, если ни одно не является более возможным, чем другие.

Предположения о равновозможности событий делается из каких-то априорных соображений. Иногда это приводит к построению неадекватных математических (или физических) моделей.

Опять-таки, в излюбленных примерах, – подбрасывании монеты или кубика, – мы имеем дело с равновозможными событиями.

Попарно несовместные, образующие полную группу, равновозможные события называются **случаи**.

Замечание. Именно о случаях идет речь, когда мы используем простейшую формулу для подсчета вероятностей —. Для того, чтобы использовать эту формулу, мы должны находиться в рамках схемы (модели), когда результатом испытания является один из случаев.

Основные понятия комбинаторики.

3. Комбинаторика
Схема выбора без возвращения

Перестановка – комбинации из n элементов, отличающиеся только порядком

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad 0! = 1$$

$$P_n = n!$$

Размещение – комбинации из n по m элементов, отличающиеся либо составом, либо порядком

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетания – комбинации из n по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

В самых простейших моделях мы должны уметь подсчитывать количество случаев.

Используем при этом обозначения и формулы комбинаторики. Основные из них приведены на слайде.

Рассмотрим, так называемую, схему без возвращения.

Схема без возвращения

Примером такой схемы может быть случайный выбор шара из ящика с перемешанными одинаковыми шарами. Шар достается и откладывается в сторону. В эту же схему укладывается использование букв алфавита при составлении слов при условии, что никакая буква не может повториться еще раз.

Перестановка – комбинации из n элементов, отличающиеся только порядком. Примером является перестановка людей в очереди, книг на полке...

Обозначается $P_n = n!$ (читается как "число перестановок из n элементов").

Вспоминаем о факториалах: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad (0! = 1)$

Перестановка - как простейшая составляющая более сложных формул для размещений и сочетаний.

Размещение – комбинации из n по m элементов, отличающиеся либо составом, либо порядком.

Обозначение: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ (читается как "число размещений из n элементов по m ").

С размещениями мы имеем дело, когда подсчитываем, например, число 5-значных телефонных номеров, в которых используемые цифры не могут повторяться, важен порядок цифр.

Сочетания – комбинации из n по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Обозначается: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (читается как "число сочетаний из n элементов по m ").

С сочетаниями мы имеем дело, когда отбираем из общего количества без учета порядка отбора. Например, выбираем 10 карт из колоды в 52 карты.

Формула $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$ показывает связь между основными понятиями комбинаторики в рассматриваемой схеме без возвращения. Видим, что учет порядка расположения дает большее количество комбинаций.

Например, — — — — — , — — — — — .

Свойства сочетаний

Свойства сочетаний

1. Биномиальные коэффициенты

2. Сумма всех биномиальных коэффициентов из n по m

3. Симметричность коэффициентов

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$$

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

Очень часто в задачах мы будем использовать сочетания. Поэтому немного более подробно поговорим о них.

Вспомним тот факт, что сочетания являются коэффициентами разложения бинома Ньютона (поэтому их еще называют **биномиальными коэффициентами**):

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$$

n – степень бинома, m изменяется от 0 до n.

Например,

В некоторых задачах мы будем использовать такой факт: сумма всех биномиальных коэффициентов из n по m равна

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$$

(таким образом мы можем посчитать общее количество подмножеств конечного множества).

Существенно может облегчить подсчет случаев учет того, что биномиальные коэффициенты обладают свойством симметрии:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

9

Этот факт наглядно продемонстрирован на слайде.

Пример. _____

Схема с возвращением.

Схема с возвращением

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это **сочетания с повторениями**:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

Пусть в множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, ..., k -тый - n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Перестановки из n элементов такого множества называются **перестановками с повторениями из n элементов**:

$$P_n(n_1 n_2 \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это **размещения с повторениями**: $\overline{A}_n^m = n^m$

Пример: составляем 5-значные телефонные номера (цифры могут повторяться, важен порядок, возможен первый 0):

Если при выборке m элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это **сочетания с повторениями**: $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Пример: отбираем из общего количества некоторый набор (неважно в каком порядке, важен конечный качественный состав).

Всего в ящике n шаров разного цвета. Вынимаем один, записываем цвет, возвращаем обратно в ящик. Нужно набрать определенное количество цветов в произвольном порядке.

Пусть в множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, ..., k -тый - n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Перестановки из n элементов такого множества называются **перестановками с повторениями из n элементов**:

$$P_n(n_1 n_2 \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Правила умножения и суммы

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то оба объекта в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило суммы: Если некоторый объект можно выбрать n_1 способами, а второй объект можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов можно выбрать $n_1 + n_2$ способами

Пример 1. Имеется 10 шаров, из них 7 белых. Сколько способов существует для того, чтобы вытянуть вторым белый шар, если первый – черный:

Пример 2. Имеется 10 шаров, из них 7 белых. Сколько способов существует для того, чтобы вытянуть вторым белый шар: (первым вытянули черный или первым вытянули белый).

Теоретико-множественный подход к понятию случайного события.

4. Теоретико-множественный подход.

Пусть ω_i - элементарные события (исходы), $i = 1, \dots, n$.
В результате испытания может произойти только одно из элементарных событий.

Определение. Множество всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий (ПЭС)**.
Обозначается Ω .

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Событие A можно интерпретировать как подмножество пространства элементарных исходов:

$$A \subseteq \Omega$$

Ω - достоверное событие. $\emptyset$ - невозможное событие.

Представление случайных событий в виде подмножеств пространства элементарных исходов.

Пример.

Игральный кубик. ПЭС = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Событие $A = \{\text{выпало четное число очков}\} = \{2, 4, 6\}$.

Событие $B = \{\text{число очков, кратное 3}\} = \{3, 6\}$.

Действия над событиями (операции над множествами).

Сумма событий A и B : $C = A + B = A \cup B$

Произведение событий A и B : $C = A \cdot B = A \cap B$

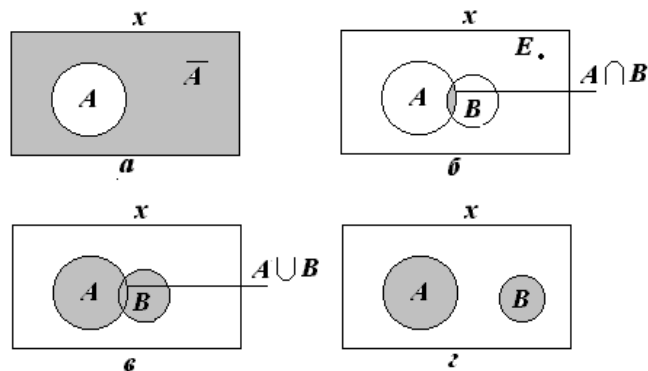
Разность событий A и B : $C = A - B = A \setminus B$

Отрицание события A : $\bar{A}$

Пример предыдущего слайда.

1. $A + B = \{2, 3, 4, 6\}$
2. $A \cdot B = \{6\}$
3. $A - B = \{2, 4\}$
4. $\bar{A} = \{1, 3, 5\}, \bar{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

Диаграммы Эйлера-Венна



Случайные события можно представлять в виде множеств на плоскости. В некоторых источниках такое представление называется диаграммами Эйлера, в некоторых – Венна. Чтобы ни кого не обижать, и для того, что бы вы в любом случае понимали о чем идет речь, будем называть их **диаграммами Эйлера-Венна**.

Смысл их понятен из рисунков:

- а). дополнение множества до всего пространства (отрицание события, противоположное событие, "НЕ"),
- б). пересечение множеств (произведение, одновременность событий, "И"),
- в). объединение множеств (сумма, альтернативность событий, "ИЛИ"),

На рисунке г) видим пример несовместных событий, пересечение которых пусто.

(св. об Эйлере и Венне)

5. Свойства операций над событиями

1. переместительный $A + B = B + A$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. распределительный $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

3. сочетательный $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

4. $A + A = A$

$$A \cdot A = A$$

5. $A + \Omega = \Omega$

$$A \cdot \Omega = A$$

6. $A + \bar{A} = \Omega$

7. $A \cdot \bar{A} = \emptyset$

8. $\bar{\Omega} = \emptyset$

9. $\overline{\bar{A}} = A$

10. Де Моргана

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

С помощью этих свойств мы можем описывать сложные события из более простых или обладающих какими-то нужными свойствами.

Так, далее, при доказательстве теоремы о вероятности суммы событий мы будем использовать представление событий в виде суммы несовместных событий, для которых выполняется аксиома аддитивности.



Огастес (Август) де Морган (англ. Augustus de Morgan, 27 июня 1806, Мадура, Индия — 8 марта 1871, Лондон) — шотландский математик и логик; профессор математики университетского колледжа в Лондоне (1828—1831, 1836—1866); первый президент (1866) Лондонского математического общества.

Основные труды: по математической логике и теории рядов; к своим идеям в алгебре логики пришёл независимо от Дж. Буля; изложил (1847) элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений; с его именем связаны известные теоретико-множественные соотношения (законы де Моргана).

Мы рассмотрели понятие случайного события. Рассмотрели классификацию случайных событий. Провели аналогию с теорией множеств. Привели основные понятия комбинаторики.

Далее, наконец, введем определения вероятности. Существует 4 подхода в определении этого основного понятия для теории вероятностей. Первый из них – статистический.

Основные определения вероятности.

Статистическое определение.

6. Свойство статистической устойчивости относительной частоты событий

Пусть n_A - число исходов, благоприятствующих событию А при n испытаниях.

Относительная частота случайного события А при n испытаниях.

$$p^* = n_A / n$$

Статистическая устойчивость при $n \rightarrow \infty$: $p^* \rightarrow p$

n	n_A	P^*
4040	2048	0.5063
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Подбрасывание монеты, «успех» – выпадение герба

Статистическое определение вероятности

Определение. В качестве **статистического определения вероятности** события принимают относительную частоту этого события.

Чем больше количество испытаний, тем ближе принимаемое значение к истинному значению вероятности:

$$p^*(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(A)$$

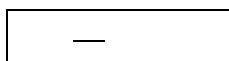
То, с чем имеет дело теория вероятностей, является теоретической вероятностью. Существует несколько подходов к определению теоретической вероятности. Однако, самый естественный и первый подход – так называемый статистический.

Проведем серию экспериментов, например, подбрасываем монету и фиксируем результат: "Г" или "Р". Допустим, нас интересует событие $A = \{\text{выпадение "Г"}\}$. Подсчитаем количество испытаний, в которых наблюдали событие А, обозначим это количество n_A .

Рассмотрим величину $p^* = n_A / n$. Её называют частотой или частостью.

Эксперимент должен обладать свойством статистической устойчивости: при возрастании числа экспериментов частота должна все более точно стремиться к определенному числу.

Это число и будет являться теоретической вероятностью $p(A)$ случайного события А:



В таблице приведены результаты эксперимента, проведенного Пирсоном. Видим, чем больше число подбрасываний монеты, тем точнее частота стремиться к теоретической вероятности, равной 0,5.

Следует заметить, что только эксперименты, обладающие свойством статистической устойчивости, могут являться предметом изучения теории вероятностей.

Такие учёные, как Рихард Мизес, считают, что вообще определение вероятности возможно только в статистическом смысле.

Классическое определение вероятности.

7. Классическое определение вероятности

Элементарный исход, в котором интересующее нас событие наступает, называется **благоприятствующим исходом**.

Определение. Вероятностью события А называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (m) к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу (n), (то есть случаев).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Следующее из возможных определений вероятности – так называемое **классическое**:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где n – число всех случаев, m – число благоприятных случаев (или шансов). Под случаем понимается один из равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Решение задач с использованием этой формулы называется **непосредственным подсчетом вероятности**.

Для подсчета количества случаев мы можем применять формулы комбинаторики или применять прямой подсчет.

(Собственно такие задачи мы уже с вами рассмотрели на первом практическом занятии).

Примеры.

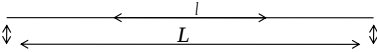
1. Вероятность случайным образом составить слово "КИТ" из перемешанных карточек. Всего комбинаций 3!, заданному слову соответствует только одна, следовательно:
2. Вероятность составить слово "СТАТИСТИКА" случайным образом из указанных карточек с буквами. Всего 10 карточек, значит, $n=10!$, но некоторые буквы повторяются: "С" – 2 раза, "Т" – 3 раза, "А" – 2 раза, "И" – 2 раза. Следовательно, _____
3. Подбрасывают два кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков составит 8, а разность составит 2 очка?
Подсчитаем количество комбинаций непосредственно. Всего возможно 6^2 комбинаций (общее количество выпавших пар очков). Благоприятными случаи: (3,5) и (5,3).
Следовательно,

Геометрическое определение вероятности.

8. Геометрическое определение вероятности

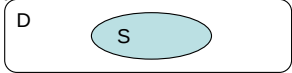
Определение. Под **вероятностью в геометрическом смысле** понимают вероятность попадания случайно выбранной точки в заданную область.

1-мерный случай: попадание точки в заданный отрезок l



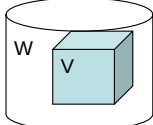
$p = l / L$

2-мерный случай: попадание точки в заданную область на плоскости S



$p = S / D$

3-мерный случай: попадание точки в заданный объем V



$p = V / W$

Третий подход к определению вероятности – геометрический.

Определение. Под **вероятностью в геометрическом смысле** понимают вероятность попадания случайно выбранной точки в заданную область.

Если имеется некоторое подмножество g множества G (G). Случайным образом выбираем точку в G . Нужно найти вероятность, с которой эта точка попадет в g .

Обобщенная формула выглядит так:

)

Обозначение "mes" (от "measure") означает меру множеств.

На слайде показаны одномерный, двумерный и трехмерный случаи, для которых мы будем находить отношение, соответственно, длин, площадей и объемов.

Такой простой и наглядный подход к определению вероятности позволяет решать множество интересных задач.

Задачи на геометрическую вероятность.

Примеры.

1. Задание конкретных интервалов или областей (в круг вписан правильный многоугольник, рассматривается какой-то интервал)
2. Области образуются при одновременном рассмотрении ограничений на x и y , например, задача о встрече
3. Разграфленная доска, бросается монета или игла.

Задача о встрече

Встреча назначена между 9 и 10 часами. Пришедший первым ждет 15 минут и уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится, если каждый наугад выбирает момент прихода на встречу.



$$P(A) = \frac{S_{\text{полосы}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{60^2 - (45^2 / 2) \cdot 2}{60^2} = \frac{7}{16}$$

Замечание . Пусть X, Y – время, в которое приходит каждый в установленный промежуток времени, T_X, T_Y – времена ожидания одним другого.

Тогда, если X пришел первым, должно выполняться неравенство:

$$Y - X \leq T_X$$

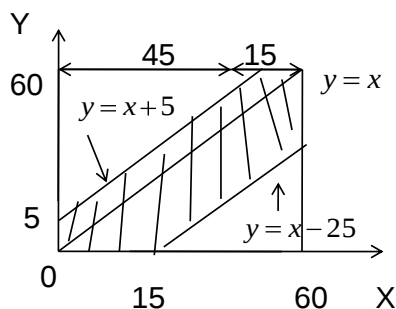
Если Y пришел первым, то должно выполняться неравенство:

$$X - Y \leq T_Y$$

Задача о встрече (вариант)

Юноша и девушка назначили свидание между 20 и 21 часами. Юноша ждет девушку 25 минут и уходит. Девушка, если придет первой, ждет 5 минут и уходит. Какова вероятность свидания, если каждый наугад выбирает момент прихода?

Пусть X – время прихода девушки, Y – юноши.



$$T_X = 5, T_Y = 25$$

$$Y - X \leq 5 \quad Y \leq X + 5$$

$$X - Y \leq 25 \quad X - 25 \leq Y$$

$$P(A) = \frac{S_{\text{полосы}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

Замечание. При решении задач на геометрическое определение вероятности на последнем этапе должно присутствовать отношение длин или площадей, собственно и представляющее собой выражение вероятности. Само по себе нахождение площади заштрихованной фигуры не является решением задачи.

Свойства вероятности

1. $P(\Omega) = 1$ - достоверное событие

2. $P(\emptyset) = 0$ - невозможное событие

3. $0 \leq P(A) \leq 1$ ($0 \leq m \leq n$)

Мы рассмотрели три подхода для определения вероятности: статистический, классический и геометрический. Очевидно, что в каждом случае выполняются условия, приведенные на слайде.

Свойство 1 выполняется, если (статистический подход), (классический подход), выделенная подобласть совпадает со всей областью (геометрический подход).

Свойство 2 выполняется, если (статистический подход), (классический подход). Для геометрического подхода мы должны найти вероятность попадания в точку (а мера точки есть 0).

Свойства 1 и 2 представляют собой предельные варианты, поэтому выполнение свойства 3 очевидно.

Далее рассмотрим аксиоматический подход к определению вероятности. Основы такого подхода заложил в своих трудах Колмогоров.

9. Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω - множество всех возможных исходов.
 S – множество подмножеств Ω .

Определение. Множество подмножеств S называется **алгеброй событий** (**σ -алгеброй** в случае счетного количества множеств), если выполняются следующие свойства:

1. $\emptyset \in S, \Omega \in S$ - пустое множество и все Ω принадлежит S

2. $A_i, A_j \in S \Rightarrow A_i + A_j \in S, A_i \cdot A_j \in S, \bar{A} \in S$

- замкнутость S относительно операций

Замечание. Пустое множество $\emptyset$ и пространство элементарных исходов Ω составляют минимальную сигма-алгебру.

В определении сигма-алгебры подмножеств важное значение имеет замкнутость относительно операций сложения, умножения и отрицания (дополнения): если сами подмножества принадлежат сигма-алгебре, то и результат операций над ними тоже должен принадлежать сигма-алгебре.

Определение. **Вероятность** называется функция $P(A)$, определенная на алгебре событий S , принимающая действительные значения и удовлетворяющая аксиомам:

1. $P(A) \geq 0$ - неотрицательность
 2. $P(\Omega) = 1$ - нормированность
 3. $A_i \cdot A_j = \emptyset \Rightarrow P(\sum A_k) = \sum p(A_k)$ - аддитивность
- (аксиомы Колмогорова)

Определение. Совокупность (Ω, S, p) - **вероятностное пространство**

Из аксиомы неотрицательности следует: действительные значения, принимаемые вероятностью, как функции на сигма-алгебре событий S , не меньше 0 (вероятности невозможного события).

Аксиома нормированности ("условие нормировки") есть выражение того факта, что вероятность достоверного события равна 1.

Аксиома аддитивности дает правило вычисления вероятности для суммы несовместных событий.

Наконец, тройка (Ω, S, p) задает так называемое вероятностное пространство.

Вариант аксиоматического определения.

Пусть A – случайное событие, Ω – достоверное событие

АКСИОМА 1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое вероятностью:

$$A \rightarrow P(A) \geq 0$$

АКСИОМА 2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1$$

АКСИОМА 3. Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\forall i, j : (A_i \cdot A_j = 0) \Rightarrow P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$$

Свойства вероятности.

10. Свойства вероятностей

1. $p(\emptyset)=0$
2. $p(A) + p(\bar{A}) = 1 \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
3. $0 \leq p(A) \leq 1$
4. $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
5. $\sum_{\forall i} A_i = \Omega, A_i \cdot A_j = \emptyset \Rightarrow \sum_i p(A_i) = 1$

Замечание. События $A = \{\text{хотя бы одно}\}$ и $\bar{A} = \{\text{ни одного}\}$ противоположны.

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

Из аксиом следуют свойства вероятностей.

1. Вероятность невозможного события равна 0.
2. События несовместны, поэтому вероятность их суммы есть сумма вероятностей, а вместе они составляют достоверное событие – все пространство элементарных исходов, следовательно, сумма их вероятностей равна 1.
3. Свойство три очевидно.
4. Выполняется в силу аксиомы неотрицательности.
5. Следует из аксиомы аддитивности.

Свойство 2 позволяет при решении задач использовать Замечание.

Частным случаем вероятностного пространства является конечное вероятностное пространство.

Конечное вероятностное пространство.

11. Конечное вероятностное пространство

Пусть эксперимент имеет конечное число возможных исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \quad \text{- ПЭС}$$

$S(\sigma\text{-алгебра})$:

$$1. \emptyset, \Omega \in S$$

$$2. A_i, A_j \in S \Rightarrow A_i \cdot A_j, A_i + A_j, \bar{A} \in S$$

Состоит из всех подмножеств множества Ω . Всего таких подмножеств:

$$2^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \quad (\text{всевозможные сочетания из } n \text{ по } m \text{ элементов})$$

ПЭС – пространство элементарных событий (исходов). Все подмножества можем подсчитать с помощью суммы биномиальных коэффициентов. Каждое случайное событие можно выразить через множество каких-то элементарных исходов.

Поставим в соответствие каждому элементарному исходу некоторое число – **вероятность элементарного события**:

$$\forall \omega_i \in \Omega, i = \overline{1, n} \rightarrow p(\omega_i) \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1. Неотрицательности: $p(\omega_i) \geq 0, \forall \omega_i \in \Omega$
2. Нормированности: $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1$

Тогда **вероятностью события** A будет число $p(A)$:

$$\forall A \in S: p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) \quad \text{- сумма вероятностей элементарных событий, составляющих событие } A$$

Если для каждого элементарного исхода определить вероятность, то вероятность случайного события, состоящего из этих элементарных исходов, будет равна сумме вероятностей соответствующих элементарных исходов.

Пространство равновозможных элементарных событий.

Частный случай конечного вероятностного пространства:
пространство равновозможных элементарных событий

$$\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1 \Rightarrow$$

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = \dots = p(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$

число
элементарных событий,
входящих в событие $A = m$

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}} = \frac{m}{n}$$

- классическое определение вероятности

Таким образом, классическое определение вероятности является следствием аксиоматического определения.

Подводя итоги.

Итак, мы определили 4 подхода к определению вероятности:

1. статистический
2. классический
3. геометрический
4. аксиоматический.

Показали, что классическое определение является следствием аксиоматического подхода в случае конечного вероятностного пространства, в котором элементарные события равновозможны. Показали, что основные свойства вероятности являются следствием аксиом Колмогорова.

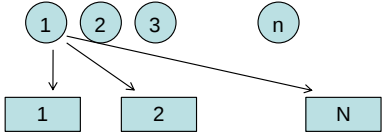
Решение задач.

Схема "шарики-лунки"

Схема: шарики – лунки.

1. Случай пронумерованных (различимых шариков).

Пусть имеется n шариков и N лунок (или ящиков). В общем случае $n \neq N$. Нас интересует вероятность случайного распределения шариков по лункам, при условии, что вероятность оказаться в какой-то лунке одинакова для каждого шарика и равна $\frac{1}{N}$.



Тогда вероятность каждого распределения шариков по лункам равна $\frac{1}{N^n}$.

Пронумерованные (различимые) шары.

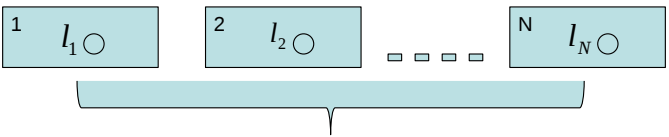
Пусть имеется n шариков и N лунок (или ящиков). В общем случае $n \neq N$.

Нас интересует вероятность случайного распределения шариков по лункам, при условии, что вероятность оказаться в какой-то лунке одинакова для каждого шарика и равна $\frac{1}{N}$.

Тогда вероятность каждого распределения шариков по лункам равна $\frac{1}{N^n}$.

Пусть событие A заключается в следующем:

{в 1-й лунке оказалось l_1 шаров с какими-то номерами,
во 2-й лунке – l_2 ,
...
в i -той лунке – l_i ,
...
в N -ной лунке – l_N шаров}.

$$\sum_{j=1}^N l_j = n \quad \text{– общему количеству шаров.}$$


Всего n шариков в N лунках.

Пусть событие А заключается в следующем:

{в 1-й лунке оказалось шаров с какими-то номерами, во 2-й лунке – , в i-той лунке – , в N-ной лунке – шаров}.

– общему количеству шаров.

Подсчитаем теперь общее количество таких распределений

1 $C_n^{l_1}$

=

2 $C_{n-l_1}^{l_2}$

=

N $C_{n-\sum_{j=1}^{N-1} l_j}^{l_N}$

Число комбинаций {в 1-й лунке оказалось l_1 шаров} равно $C_n^{l_1}$

Соответствующее количество комбинаций для остальных лунок показано на картинке.

По теореме умножения вероятностей, общее число таких комбинаций:

$$C_n^{l_1} \cdot C_{n-l_1}^{l_2} \cdots C_{n-\sum_{j=1}^{N-1} l_j}^{l_N} = \frac{n!}{l_1!(n-l_1)!} \cdot \frac{(n-l_1)!}{l_2!(n-(l_1+l_2))!} \cdots \frac{n-\sum_{j=1}^{N-1} l_j}{l_N!0!}$$

После сокращения факториалов получаем:

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\dots l_N!}$$

Подсчитаем теперь общее количество таких распределений.

Число комбинаций {в 1-й лунке оказалось шаров} равно .

Тогда число комбинаций {во 2-й лунке – } равно .

Для лунки с номером N число комбинаций составляет .

По теореме умножения вероятностей, общее число таких комбинаций:

$$C_n^{l_1} \cdot C_{n-l_1}^{l_2} \cdots C_{n-\sum_{j=1}^{N-1} l_j}^{l_N} = \frac{n!}{l_1!(n-l_1)!} \cdot \frac{(n-l_1)!}{l_2!(n-(l_1+l_2))!} \cdots \frac{n-\sum_{j=1}^{N-1} l_j}{l_N!0!}$$

(заметим, что =).

После сокращения факториалов получаем:

Тогда вероятность события А:

$$P(A) = \frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \cdot \frac{1}{N^n}$$

Напомним, что эта формула выведена из тех соображений, что шарики различимы (пронумерованы) и вероятность для каждого из них оказаться в какой-то лунке одинакова.

Формула представляет собой произведение двух сомножителей, напоминающих рассмотренные выше формулы для размещения и перестановок с повторениями.

Тогда вероятность события А:

$$\frac{n!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \cdot \frac{1}{N^n} \quad (*)$$

Напомним, что эта формула выведена из тех соображений, что шарики различимы (пронумерованы) и вероятность для каждого из них оказаться в какой-то лунке одинакова.

Формула представляет собой произведение двух сомножителей, напоминающих рассмотренные выше формулы для размещения и перестановок с повторениями.

Случай неразличимых шаров.

2. Случай неразличимых шариков.

Интересует вероятность события: количество шариков в каждой лунке.

Для 2 шаров и 2 лунок получаем всего 3 варианта:

(2|0), (1|1), (0|2).

В общем случае n шаров и N лунок получаем число комбинаций, равное

$$C_{n+N-1}^n$$

Тогда вероятность каждого распределения шариков по лункам:

$$P(A) = 1 / C_{n+N-1}^n$$

Действительно, для варианта «2 шарика, 2 лунки» получаем

$$C_{2+2-1}^2 = 3$$

Интересует вероятность события: количество шариков в каждой лунке.

Для 2 шаров и 2 лунок получаем всего 3 варианта: (2|0), (1|1), (0|2).

В общем случае n шаров и N лунок получаем число комбинаций, равное .

Тогда вероятность каждого распределения шариков по лункам:

$$\frac{1}{C_{n+N-1}^n} \quad (**)$$

Действительно, для варианта 2 шаров и 2 лунок получаем $=3$ варианта распределения шаров по лункам.

Эта формула напоминает формулу для сочетаний с повторениями.