

## Лабораторная работа №23 б

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы – экспериментальное исследование частотной зависимости напряжения на конденсаторе при вынужденных колебаниях в колебательном контуре. Определение резонансной частоты, полосы пропускания и добротности колебательного контура. Сравнение полученных результатов с рассчитанными теоретически.

#### Теоретическое введение

Рассмотрим колебательный контур, схема которого показана на рис. 1.

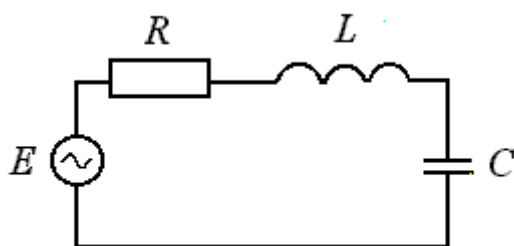


Рис. 1

Будем считать, что контур состоит из идеальных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Последовательно с этими элементами включен генератор гармонических электрических колебаний с э.д.с.

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Внутреннее сопротивление генератора будем считать настолько малым по сравнению с сопротивлением резистора  $R$ , что им можно пренебречь.

Энергия электромагнитного поля в контуре

$$W_{\text{эм}} = \frac{Lq^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \quad (2)$$

Если  $E = 0$ , то колебания в контуре являются свободными и энергия электромагнитного поля убывает, причем

$$\frac{dW_{\text{эм}}}{dt} = -\frac{q^2}{C} R \quad (3)$$

Электромагнитная энергия переходит в джоулево тепло. При включенном генераторе, когда  $E \neq 0$ , энергия от генератора передается контуру и идет на увеличение  $W_{\text{эм}}$ . В этом случае

$$\frac{dW_{\text{эм}}}{dt} = -\frac{q^2}{C} R + \frac{q^2}{C} E, \quad (4)$$

где  $\frac{q^2}{C} E$  - электрическая мощность, подводимая к контуру. Колебания в этом случае уже не являются свободными и называются **вынужденными**.

Из выражения (4) с учетом (1) и (2) можно получить дифференциальное уравнение

$$L\dot{q} + Rq + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t. \quad (5)$$

В этом уравнении  $L\dot{q}$  - напряжение на катушке индуктивности,  $Rq$  - напряжение на резисторе,  $\frac{q}{C}$  - напряжение на конденсаторе. Уравнение (5) выражает второе правило Кирхгофа для последовательного колебательного контура.

После включения генератора в колебательном контуре сначала возникает так называемый **переходной** режим вынужденных колебаний. В этом режиме в колебательном контуре одновременно совершаются колебания двух типов. Первый тип – это свободные затухающие колебания, совершающиеся с частотой

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ . Второй тип – незатухающие вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы (с частотой  $\omega$  генератора). При работе в этом режиме  $|E| > |R|$ . Происходит процесс накопления энергии  $W_{эм}$  в контуре. Через промежуток времени  $Dt \approx 5/b$ , где  $b$  - коэффициент затухания, колебания первого типа практически исчезнут и контур будет работать в режиме **установившихся** вынужденных колебаний. В этом режиме мощность потерь энергии в контуре полностью компенсируется подводимой электрической мощностью. Энергия электромагнитного поля и амплитуда колебаний в контуре со временем не изменяются. В настоящей работе будут рассматриваться колебания именно в этом, установившемся режиме. Решение уравнения (5) в этом случае должно иметь вид:

$$q = q_0 \cos(\omega t + j_0), \quad (6)$$

то есть должны существовать такие значения  $q_0$  и  $j_0$ , при которых подстановка выражения (6) в дифференциальное уравнение обращает это уравнение в тождество.

Определим амплитудное значение заряда  $q_0$ . Для этого подставим выражение (6) в уравнение (5). Получим

$$Lq_0\omega^2 \cos(\omega t + j_0 + p) + Rq_0\omega \cos\left(\omega t + j_0 + \frac{p}{2}\right) + \frac{q_0}{C_0} \cos(\omega t + j_0) = E_0 \cos \omega t \quad (7)$$

или

$$U_{L0} \cos(\omega t + j_0 + p) + U_{R0} \cos\left(\omega t + j_0 + \frac{p}{2}\right) + U_{C0} \cos(\omega t + j_0) = E_0 \cos \omega t, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_{L0} &= Lq_0 \omega^2 \\ U_{R0} &= Rq_0 \omega \\ U_{C0} &= \frac{q_0}{C} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

амплитудные значения напряжений на элементах контура. В отличие от мгновенных значений напряжений на элементах контура и мгновенного значения э.д.с. генератора, сумма амплитудных значений напряжений не равна амплитуде э.д.с. генератора.

Для решения задачи сложения колебаний удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. Диаграмма, соответствующая уравнению (8) показана на рис. 2.

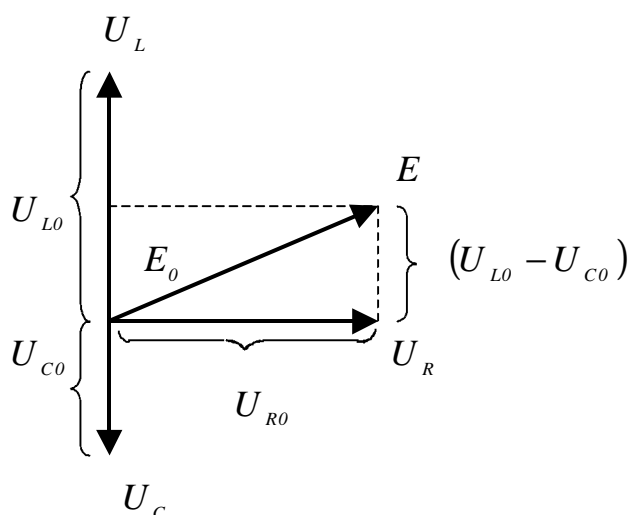


Рис. 2

Направление векторов на диаграмме зависит от времени. Векторы вращаются против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . Однако взаимное расположение векторов при этом не изменяется. Диаграмма, изображенная на рис.2 соответствует моменту времени, когда

$\cos\left(\omega t + j_0 + \frac{p}{2}\right) = 1$ . Из рис. 2 следует, что

$$E_0^2 = U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2 \quad (10)$$

Если в это уравнение подставить амплитудные значения напряжений из (9) и решить это уравнение относительно  $q_0$ , то получим выражение

$$q_0 = \frac{E_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11)$$

Экспериментально для проверки теоретических выводов гораздо проще измерить не амплитудное значение заряда  $q_0$ , а пропорциональную ему величину – амплитуду напряжения на конденсаторе. Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{co} = \frac{q_0}{C} = \frac{E_0}{wC \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}} \quad (12)$$

Учитывая, что  $\frac{1}{\sqrt{LC}} = w_0$ ;  $\frac{R}{2L} = b$ , выражение (12) преобразуем к виду

$$U_{co} = \frac{E_0 w_0^2}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + 4b^2 w^2}} \quad (13)$$

На рис. 3 приведен график зависимости  $U_{co}$  от  $w$  при постоянном значении  $E_0$  (для частного случая, когда  $b = 0,14w_0$ ).

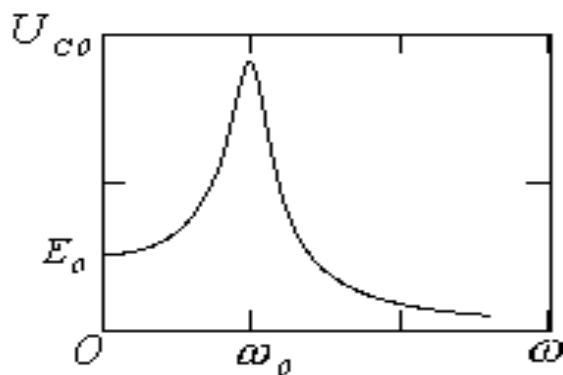


Рис. 3

Из рисунка следует, что зависимость  $U_{co}$  от  $w$  проходит через максимум. Соответствующая кривая называется **резонансной кривой**. Частота, на которой резонансная кривая проходит через максимум, называется **резонансной частотой**. Исследовав выражение (13) на максимум, получим выражение для резонансной частоты

$$w_p = \sqrt{w_0^2 - 2b^2} \quad (14)$$

В большинстве используемых на практике контуров  $b^2 \ll w_0^2$  и резонансная частота  $w_p$  практически не отличается от  $w_0$ .

Одной из важных характеристик колебательного контура является его **добротность**. Добротность  $Q$  определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту  $l$ :

$$Q = \frac{p}{l} \quad (15)$$

Логарифмический декремент  $l$  связан с коэффициентом затухания  $b$  и периодом свободных колебаний соотношением

$$l = bT, \quad (16)$$

где  $T = \frac{2p}{\sqrt{w_0^2 - b^2}}$ .

При  $b^2 \ll \omega_0^2$  для логарифмического декремента получим выражение

$$l = \frac{2pb}{\omega_0}, \text{ а для добротности –}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} \quad (17)$$

Для колебательного контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;  $b = \frac{R}{2L}$ , поэтому добротность может быть выражена через параметры элементов контура формулой

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (18)$$

Самое большое значение амплитуда напряжения на конденсаторе  $U_{c0}$  имеет на резонансной частоте  $\omega_p$  (при условии, что  $E_0$  не зависит от частоты). Определим, чему равно отношение  $\frac{U_{c0}}{E_0}$  на частоте  $\omega = \omega_p$ . В

этом случае из (13) следует

$$\frac{U_{c0}}{E_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega_p^2}}. \quad (19)$$

При  $b^2 \ll \omega_0^2$  можно считать, что  $\omega_p = \omega_0$ . Тогда

$$\frac{U_{c0}}{E_0} = \frac{\omega_0}{2b} \quad (20)$$

откуда в соответствии с формулой (7) имеем

$$\frac{U_{c0}}{E_0} = Q \quad (21)$$

Таким образом, для того, чтобы экспериментально определить добротность контура, достаточно измерить амплитуду напряжения  $U_{c0}$  и амплитуду э.д.с. генератора  $E_0$  на частоте резонанса.

Как известно, максимальное значение амплитуда  $U_{c0}$  имеет на резонансной частоте. Существует такая частота  $\omega_1 < \omega_p$ , на которой амплитуда напряжения на конденсаторе равна  $1/\sqrt{2}$  от максимальной. Существует частота  $\omega_2 > \omega_p$ , на которой амплитуда напряжения на конденсаторе также равна  $1/\sqrt{2}$  от максимальной. Интервал частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  называется **полосой пропускания** контура. В пределах этого интервала амплитуда напряжения на конденсаторе больше (или равна)  $1/\sqrt{2}$  от

соответствующего значения на резонансной частоте. Величина  $Dw = w_2 - w_1$  называется **шириной полосы пропускания**. Отношение  $Dw/w_p$  называется **относительной шириной полосы пропускания**.

Для того, чтобы найти  $w_1$  и  $w_2$  воспользуемся выражением (19). В соответствии с выражением (20) максимальное значение отношения  $U_{co}/E_0$  равно  $w_0^2/2b^2$ . На частотах  $w_1$  и  $w_2$  должно выполняться условие

$$\frac{U_{co}}{E_0} = \frac{w_0^2}{2\sqrt{2}b^2} \quad (22)$$

Частоты  $w_1$  и  $w_2$  могут быть найдены как корни уравнения

$$\frac{w_0^2}{2\sqrt{2}b^2} = \frac{w_0^2}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + 4b^2w^2}}, \quad (23)$$

полученного подстановкой условия (22) в выражение (19). Расчет относительной полосы пропускания приводит к результату:

$$\frac{Dw}{w_p} = \frac{2b^2}{w_0^2} = \frac{1}{Q},$$

откуда

$$\frac{w_p}{Dw} = Q \quad (24)$$

Следовательно, экспериментально добротность контура можно определить вторым способом, измерив его резонансную частоту и полосу пропускания.

### Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки показана на рис. 3.

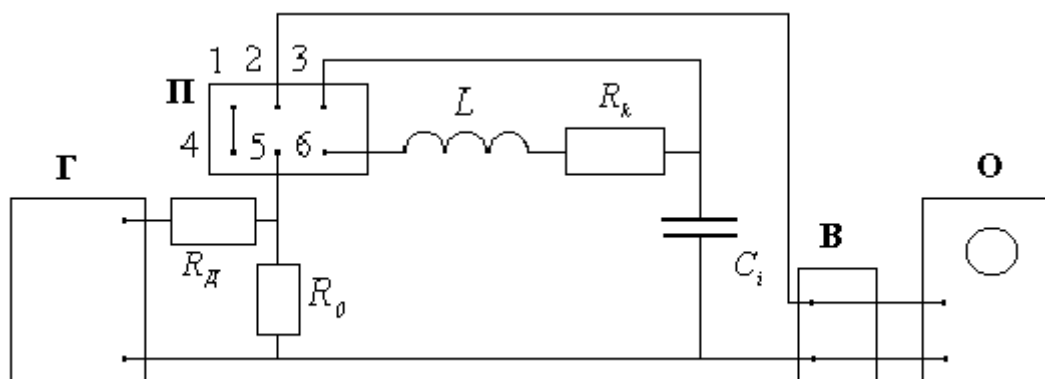


Рис.3

На этом рисунке Г – генератор электрических колебаний. К выходу генератора подключен делитель напряжения, состоящий из резисторов  $R_d$  и  $R_0$ . Генератор с делителем на выходе эквивалентен новому генератору,

э.д.с. которого  $E_0$  равна напряжению на резисторе  $R_0$  при разомкнутой внешней цепи, а внутреннее сопротивление равно сопротивлению, измеряемому со стороны выхода. Это сопротивление представляет собой сопротивление  $R_0$ , шунтированное цепочкой последовательно соединенных сопротивлений  $R_d$  и  $R_r$ , где  $R_r$  - внутреннее сопротивление генератора Г. Сопротивления  $R_d$  и  $R_0$  подбираются так, чтобы выполнялось условие  $(R_d + R_r) \gg R_0$ . При этом внутреннее сопротивление эквивалентного генератора можно считать равным  $R_0$ .

К выходу делителя напряжения (к выходу эквивалентного генератора) подключается цепочка, состоящая из последовательно соединенных катушки индуктивности  $L$ , сопротивления  $R_k$  (одного из пяти, входящих в комплект установки) и конденсатора  $C_i$  (одного из трех, входящих в комплект установки). При этом образуется последовательный колебательный контур с индуктивностью  $L$ , емкостью  $C_i$  и сопротивлением  $R$ . Сопротивление  $R$  контура складывается из сопротивления  $R_k$ , сопротивления обмотки катушки  $R_L$  и внутреннего сопротивления генератора  $R_0$ , т.е.

$$R = R_k + R_L + R_0 \quad (25)$$

Осциллограф О предназначен для наблюдения за формой колебаний. Колебания должны быть синусоидальными. В случае искажения формы колебаний следует уменьшить амплитуду напряжения на выходе генератора и добиться синусоидальной формы. Осциллограф можно также использовать для измерения напряжения  $U_{C0}$  на конденсаторе, а также для измерения э.д.с.  $E_0$ . Однако для этого лучше использовать вольтметр В, так как он обеспечивает более высокую точность измерений. Для осуществления этих измерений в схеме установки предусмотрен переключатель П. Если на переключателе замкнуты контакты 2-3 и 5-6 (1-2 и 4-5 разомкнуты), то с помощью вольтметра (или осциллографа) измеряется напряжение на конденсаторе. Если замкнуты контакты 1-2 и 4-5 (2-3 и 5-6 разомкнуты), то измеряется э.д.с.  $E_0$ . Частота вынужденных колебаний определяется по шкале генератора.

#### Задание к работе

1. Исходя из паспортных данных  $L$  и  $C_i$  рассчитать частоту  $w_0$  контура.
2. С помощью вольтметра (или осциллографа) измерить  $U_{C0}$  для ряда значений частоты  $w$  в диапазоне частот от  $0,5w_0$  до  $1,5w_0$  при  $R_M = 100$  Ом. Величину  $E_0$  при этом надо поддерживать постоянной во всем диапазоне частот. Это значение амплитуды э.д.с. также записать в таблице измерений.

3. По результатам измерений п.2 построить график зависимости  $U_{c0}$  от  $\omega$  (резонансную кривую).
4. Из графика найти добротность  $Q$  колебательного контура по формуле (21) и по формуле (24).
5. Определить добротность контура по формуле (21) при остальных значениях сопротивления  $R_k$ , измерив  $U_{c0}$  и  $E_0$  на резонансной частоте (без построения графика).
6. Измерить (без построения графика) ширину пропускания  $D\omega$  при тех же значениях  $R_k$ , что и в п.5 и по формуле (24) определить добротность контура.
7. Рассчитать теоретические значения добротности контура по формуле (18) для всех значений  $R = R_k + R_L + R_0$ .
8. Построить график зависимости  $Q$  от  $\frac{I}{R}$  для значений  $Q$ , рассчитанных по формуле (18). На этот же график нанести точки экспериментально полученных значений  $Q$  в пунктах 4, 5 и 6.
9. Сравнить резонансную частоту, найденную по экспериментально полученной резонансной кривой с частотой  $\omega_0$ , рассчитанной теоретически.
10. Сравнить экспериментально полученные значения добротности и их зависимость от  $\frac{I}{R}$  с теоретическими.

#### Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными ?
2. Напишите дифференциальное уравнение для колебательного контура, возбуждаемого внешним источником с э.д.с., изменяющейся по гармоническому закону.
3. Как выглядит решение дифференциального уравнения для амплитуды напряжения на конденсаторе  $U_{c0}$  в установившемся режиме ?
4. Чему равна резонансная частота для напряжения на конденсаторе ?
5. Что такое добротность колебательного контура ?
6. Как добротность  $Q$  рассчитать теоретически и измерить экспериментально ?
7. Какие графики вы будете строить в работе? Как они предположительно будут выглядеть?

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики.- Кн 2.- М.: Наука. Физматлит, 1998.- § 13.4.
2. Трофимова Т.И. Курс физики.- М.: Высшая школа, 1997.-§147, 148.
3. Детлаф А.А. Яворский Б.М.Курс физики.- М.: Высшая школа, 1999.- § 28.3.