Лабораторная работа № 24

ВОЛНЫ НА СТРУНЕ

Цель работы – *экспериментальное определение зависимости собственных частот струны от силы ее натяжения и от номера гармоники и сравнение с зависимостями, рассчитанными теоретически*

Волновое уравнение струны и его решение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым уравнением. Для струны, вытянутой вдоль оси x , отдельные точки которой совершают колебания вдоль оси y, это уравнение имеет вид :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где u - скорость распространения волны (фазовая скорость).
Это уравнение можно получить из второго уравнения Ньютона, записанного для произвольного, достаточно малого элемента струны, показанного на рис 1.

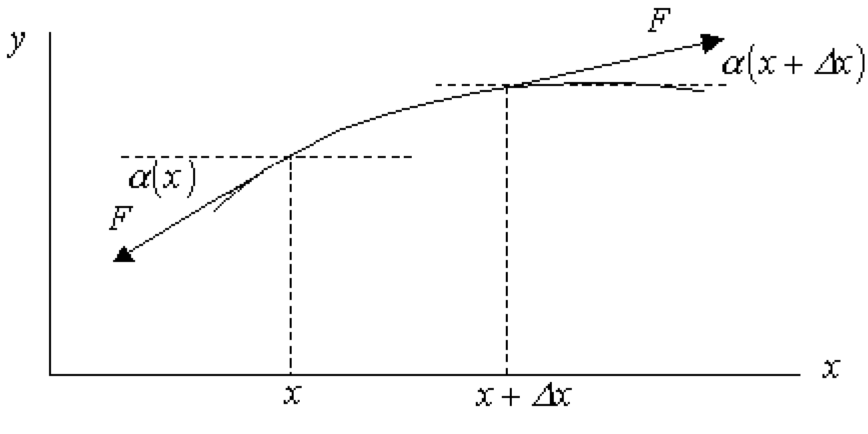

Рис.1

Уравнение получим в предположении малости углов a . При малых углах a длину рассматриваемого элемента можно считать равной Dx, а массу Dm равной rDx, где r - линейная плотность струны. Этот элемент совершает колебания вдоль оси y. В этом направлении на элемент струны действует сила, равная

$$F\left[sin\,a(x+Dx) - sin\,a(x)\right] \approx F\left[tg\,a(x+Dx) - tg\,a(x)\right] = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+Dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]$$

Эта сила вызывает ускорение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = lim_{Dx \to 0} \frac{F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+Dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]}{rDx} = \frac{F}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ,$$

откуда следует волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{r}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2)$$

Из сравнения уравнений (1) и (2) следует, что фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль струны

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{F}{r}}} \qquad (3)$$

Любая функция, удовлетворяющая уравнению (1) описывает некоторую волну. Вдоль бесконечно длинной струны могут распространяться гармонические волны, описываемые уравнением

$$y_1 = a\,cos(wt - kx), \qquad (4)$$

если волна распространяется вдоль оси x в положительном направлении, и уравнением

$$y_2 = a\,cos(wt + kx + a), \qquad (5)$$

если волна распространяется в отрицательном направлении.

В том, что выражения (4) и (5) являются решением волнового уравнения (1) можно убедиться подстановкой этих выражений в волновое уравнение. Частота колебаний w при этом может иметь любое значение. Эта частота определяется частотой источника, возбуждающего колебания струны.

Уравнение, представляющее собой сумму выражений (4) и (5)

$$y = y_1 + y_2 = a\,cos(wt - kx) + a\,cos(wt + kx + a)$$

также является решением волнового уравнения. Это выражение можно привести к виду

$$y = 2a\,cos\left(kx + \frac{a}{2}\right)cos\left(wt + \frac{a}{2}\right) \qquad (6)$$

Волна, описываемая таким уравнением, называется стоячей волной. В каждой точке стоячей волны колебания происходят с той же частотой, что и у встречных волн. Амплитуда колебаний зависит от координаты x:

$$A(x) = \left|2a\,cos\left(kx + \frac{a}{2}\right)\right| = \left|2a\,cos\left(\frac{2p}{l}x + \frac{a}{2}\right)\right| \qquad (7)$$

Для струны конечной длины с закрепленными концами амплитуда результирующего колебания на концах струны должна равняться нулю. Если начало струны находится в точке с координатой $x = 0$, то амплитуда в этой точке будет равна нулю в том случае, когда $a = p$. Выражение (7) при этом будет иметь вид :

$$A(x) = |2a \sin kx| = \left|2a \sin \frac{2p}{l} x\right| \qquad (8)$$

На конце струны , в точке с координатой $x = l$, где l- длина струны , амплитуда так же должна равняться нулю. Для этого должно выполняться условие

$$\frac{2p}{l_n} l = np \qquad (n = 1,2,3...)$$

Из последнего выражения следует, что стоячие волны на струне могут существовать только на таких частотах n_n, для которых длина волны

$$l_n = \frac{2l}{n} \qquad (n = 1,2,3...) \qquad (9)$$

Частота колебаний связана с длиной волны соотношением $n = u/l$, где u- фазовая скорость волны. Тогда, с учетом выражения (3), частоты n_n могут быть определены по формуле

$$n_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{r}}$$

$(n = 1,2,3...)$
(10)

В теории колебаний эти частоты называют гармониками (первая гармоника, вторая гармоника и т. д.) В музыкальной акустике первую гармонику называют основным тоном. Гармоники более высоких порядков называют обертонами. Частоты n_n называют также собственными частотами колебаний струны.

Зависимость амплитуды колебаний A от координаты x для различных номеров гармоник n может быть представлена выражением

$$A_n(x) = \left|2a_n \sin\left(\frac{2p}{l_n} x\right)\right| \qquad (11)$$

или с учетом соотношения (9) выражением

$$A_n(x) = \left|2a_n \sin\left(np \frac{x}{l}\right)\right| \qquad (12)$$

Из выражения (12) следует, что амплитуда равна нулю в тех точках струны, для которых $n\frac{x}{l}$ принимает целочисленное или нулевое значение. Так для первой гармоники таких точек две, с координатами $x = 0$ и $x = l$, т.е. на концах струны. Для второй гармоники таких точек три: на концах струны и в точке $x = \frac{1}{2} l$, т.е. в средине струны. Для третьей гармоники- четыре точки: на концах струны и в точках с координатами $x = \frac{1}{3} l$ и $x = \frac{2}{3} l$.

Точки, амплитуды колебаний в которых равны нулю, называют узлами стоячей волны. Расстояние между соседними узлами l_{CT} называют длиной стоячей волны . Из выражения (11) следует, что минимальное расстояние между узлами равно половине длины бегущей волны. Следовательно, $l_{nCT} = \frac{1}{2} l_n$. На длине струны укладывается целое число полуволн бегущей волны, и соответственно целое число длин волн стоячей волны, численно равное номеру гармоники n. Точки, в которых амплитуда достигает максимального значения, называются пучностями стоячей волны. Число пучностей, укладывающихся на длине струны также равно n.

На рис. 2 показана зависимость смещения точек струны y от координаты x на частоте второй гармоники для трех моментов времени: $t_1 = 0$

(кривая 1); $t_2 = \frac{T}{8}$, где T - период колебаний (кривая 2); $t_3 = \frac{T}{4}$ (кривая 3).

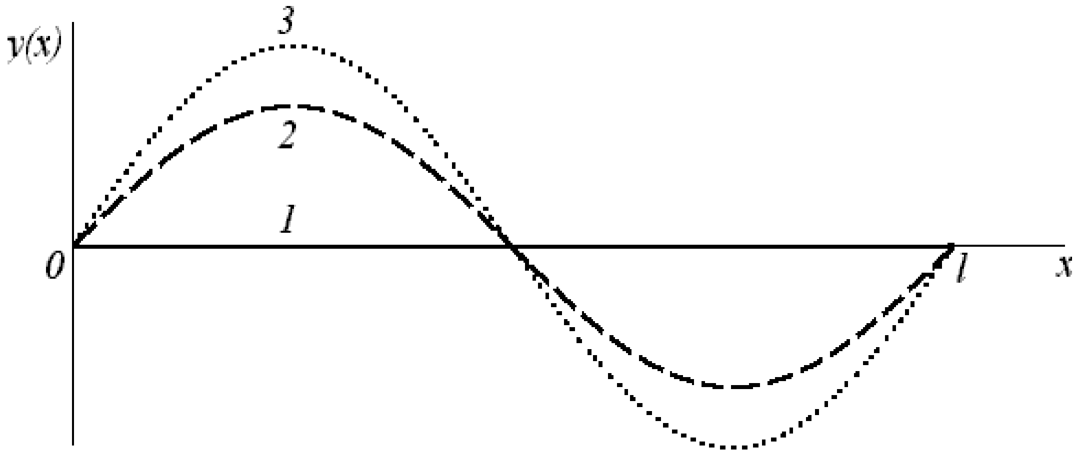

Рис.2

Видно , что точки струны между соседними узлами движутся в одинаковой фазе. Однако точки струны, расположенные по разные стороны узла на расстоянии , меньшем $\frac{l}{2}$ движутся в противофазе.

Рассмотрим теперь способы возбуждения стоячих волн на струнах. В большинстве струнных музыкальных инструментов для этого используется либо удар по струне специальным молоточком (рояль, пианино), либо рывок (гитара и другие щипковые инструменты). Во всех этих случаях зависимость возбуждающей силы от времени не является гармонической, а имеет вид кратковременного импульса. Однако любой кратковременный импульс можно представить как сумму бесконечно большого числа гармонических функций в бесконечно большом диапазоне частот. Те составляющие, частоты которых совпадают с частотами, определяемыми формулой (10), возбуждают стоячие волны. Одновременно возбуждаются как основной тон, так и все его обертоны. Самую большую интенсивность имеет звук основного тона . На обертоны приходится лишь незначительная доля энергии. Соотношение между интенсивностями основного тона и каждого из обертонов определяет тембр звука. Это соотношение для разных инструментов разное. Поэтому разные инструменты, настроенные на одну и ту же частоту основного тона звучат по разному.

В настоящей работе струна возбуждается силой, изменяющейся по гармоническому закону. Для этого используется металлическая струна, к концам которой подводится переменное электрическое напряжение от генератора звуковой частоты. Часть струны проходит через зазор между полюсами электромагнита, питаемого от источника постоянного тока. На эту часть струны действует сила Ампера в направлении, перпендикулярном длине струны и силовым линиям магнитного поля. Эта сила изменяется по гармоническому закону с частотой, задаваемой на генераторе. Колебания струны могут возбуждаться только в том случае, если частота электрических колебаний генератора совпадает с частотой какой либо одной из гармоник. Следовательно, рассмотренным способом можно возбудить любые гармоники, но только по отдельности. Для эффективного возбуждения колебаний струны магнит должен быть расположен так, чтобы между полюсами магнита находилась пучность стоячей волны.

В отличие от бегущей волны, в стоячей волне не происходит переноса энергии вдоль струны. Поэтому, в случае отсутствия потерь энергии , даже при кратковременном , импульсном возбуждении струна должна колебаться бесконечно долго. Однако реально всегда существуют потери энергии (например на излучение звука) и колебания являются затухающими. При возбуждении струны силой, изменяющейся по гармоническому закону (от генератора электрических колебаний), колебания являются вынужденными. В установившемся режиме они происходят с частотой вынуждающей силы, и амплитуда колебаний со временем не меняется. Потери энергии компенсируются энергией, поступающей от генератора.

Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки показана на рис.3.

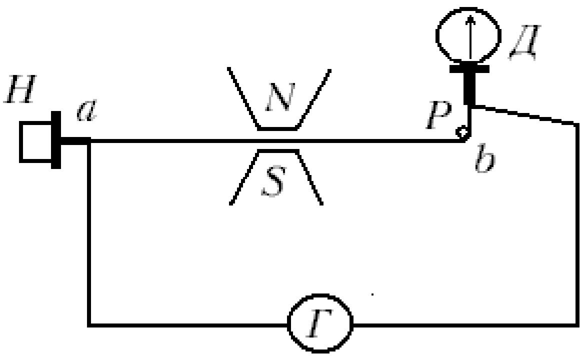

Рис.3

Металлическая струна одним концом закреплена на стержне в точке *a*. Второй конец струны перекинут через ролик *P* и прикреплен к динамометру *Д*. Рабочим является участок струны от точки *a* до точки *b*.Натяжение струны может регулироваться специальным устройством *Н*, перемещающим стержень, к которому крепится струна. Через струну пропускается переменный ток от генератора *Г*, частота которого задается генератором и измеряется по шкале генератора. Электромагнит, питаемый постоянным током, может перемещаться вдоль струны. Длина струны l и линейная плотность r имеют постоянное значение и задаются в паспорте установки. Перестраиваемыми и соответственно измеряемыми являются натяжение струны и частота колебаний.

Задание к работе

1. Экспериментально, используя шкалу генератора электрических колебаний, определить частоты первой, второй, третьей и четвертой гармоник при одном значении силы натяжения струны (по указанию преподавателя).
2. Теоретически, используя формулу (10), определить частоты тех же гармоник, при том же показании динамометра.
3. Оценить стандартное отклонение s_n для расчетов по формуле (10). Значения s_l, s_r, s_F даны в паспорте установки.
4. Построить график зависимости частоты n_n от номера гармоники n.На график следует нанести точки, соответствующие измерениям по п.1 и точки, рассчитанные по п.2. Провести экспериментальную и теоретическую кривые с учетом s_n. При этом надо иметь ввиду , что для экспериментальных значений частоты s_n - это стандартное отклонение при измерении частоты по шкале генератора (дается в паспорте установки), а для теоретических значений s_n определены в п.3. Сделать выводы о степени совпадения полученных кривых.

5. Экспериментально определить частоту одной из гармоник (по указанию преподавателя) для ряда значений силы натяжения струны F .

6. Теоретически, используя формулу (10) определить частоту той же гармоники и для тех же значений силы F, что и в п.5

7. Построить график зависимости частоты n от силы натяжения F, предварительно решив вопрос о том, какие величины целесообразно откладывать по осям. На график нанести точки, соответствующие измерениям по п. 5 и точки, рассчитанные по п. 6. Провести экспериментальную и теоретическую кривые с учетом s_n. Сделать вывод о степени совпадения полученных кривых.

8. По колебаниям первой гармоники для одного из значений силы F оценить скорость распространения упругих волн вдоль струны.

Контрольные вопросы

1. Какова цель данной работы?
2. Получите волновое уравнение для струны.
3. Какие волны являются решением волнового уравнения для струны, закрепленной на концах?
4. Что такое стоячая волна и чем она отличается от бегущей?
5. На каких частотах возможны колебания струны?
6. Почему струны различных музыкальных инструментов, настроенных на одну и ту же ноту звучат по разному?
7. Для чего в экспериментальной установке используется магнит?
8. Какие графики вы будете строить в данной работе? Нарисуйте их примерный вид.

Литература

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики.-М.: Высшая школа, 1997.-§ 154, 157.
2. *Детлаф А.А. Яворский Б.М.* Курс физики.- М.: Высшая школа, 1999.-§ 29.2, 29.6.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики.- Кн.1.-М.: Наука, Физматлит, 1998.-§ 1.4, 1.7, 1.8