причём функция $\Phi(x)$ табулирована и её значения содержатся в уже встречавшемся нам приложении 2. Таким образом, с помощью этой таблицы мы легко сможем вычислить вероятность попадания X в заданный интервал (α, β):

$$P(\alpha < X_0 < \beta) = F_{X_0}(\beta) - F_{X_0}(\alpha) = \Phi(\beta) + \frac{1}{2} - \left(\Phi(\alpha) + \frac{1}{2}\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

ПРИМЕР

Пусть X_0 – нормированная нормальная случайная величина. Найти $P(-0.1 < X_0 < 0.3)$.

Решение

$$P(-0.1 < X_0 < 0.3) = \Phi(0.3) - \Phi(-0.1) = \Phi(0.3) + \Phi(0.1) \approx 0.1179 + 0.0398 = 0.1577.$$

Для нахождения значений функции Лапласа использовалась таблица из прил. 2.

А как же нам справиться с ненормированным нормальным распределением X? Не можем же мы запастись таблицами значений на все случаи жизни, т.е. для всевозможных значений a и σ. Ничего не поделаешь, придётся вспомнить формулу замены переменной в определённом интеграле. Воспользуемся заменой $u = \frac{t-a}{\sigma}$, тогда $dt = \sigma du$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

ПРИМЕР

Пусть X – нормально распределённая случайная величина с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 2$. Найти $P(0 < X < 3)$.

Решение

$$P(0 < X < 3) = \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi(0) + \Phi(1.5) \approx 0 + 0.4332 = 0.4332.$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределённой случайной величины X по абсолютному значению меньше заданного положительного числа δ, т.е. $P(|X-a| < \delta)$. Найдём эту вероятность, заменив неравенство эквивалентным ему двойным неравенством:

$$P(|X-a| < \delta) = P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$
$$= \Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Поскольку $\Phi(x)$ – нечётная функция, то $\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, и окончательно имеем $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

ПРИМЕР

Найти вероятность того, что отклонение нормально распределённой случайно величины X с параметрами a и σ не превышает утроенного среднеквадратического отклонения.

Решение

Поскольку среднеквадратическое отклонение X равно σ, то искомая вероятность равна

$$P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0.49865 = 0.9973.$$

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормальной случайной величины превысит утроенное среднеквадратическое отклонение, очень мала, а именно равна $1 - 0.9973 = 0.0027$.

Такое событие является очень маловероятным, можно считать его практически невозможным. Это означает, что на практике можно пренебречь этой вероятностью, которая составляет всего 0.27%. В этом состоит так называемое *правило трёх сигм*:

если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратического отклонения.

Подведём итоги этой главы, собрав все результаты в следующей таблице:

Дискретные распределения				
Название	*Параметры*	*Закон распределения*	$M(X)$	$D(X)$
Биномиальное	$n \in N$, $0 \le p \le 1$, $q = 1 - p$	$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$	np	npq
Пуассона	λ	$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, k, \ldots$	λ	λ

Непрерывные распределения					
Название	*Параметры*	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$M(X)$	$D(X)$
Равномерное	$a < b$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a,b), \\ 0, x \notin (a,b). \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in (a,b), \\ 1, x \ge b. \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Показа-тельное	λ	$\begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$a, \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$	a	σ^2
Нормиро-ванное нор-мальное	—	$\varphi(x)$	$\frac{1}{2} + \Phi(x)$	0	1

Таблица 2. Некоторые распределения случайных величин.

6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Как мы знаем, нельзя заранее с уверенностью предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в результате испытания. Что же мы можем в таком случае сказать о поведении суммы достаточно большого числа случайных величин? Казалось бы, эта сумма есть величина в ещё большей мере непредсказуемая, чем каждая из случайных величин, но это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях поведение достаточно большого числа случайных величин в совокупности почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Эти необходимые условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*. К их числу относятся рассматриваемые ниже теоремы Чебышева и Бернулли, а также другие теоремы, которые мы рассматривать не будем. Заметим, что теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, а теорема Бернулли, наоборот, простейшим.

Доказательства этих теорем (которые мы по понятной причине в данном пособии опускаем) опираются на важное и интересное само по себе следующее

НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Сформулированная ниже теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым. Иными словами, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин (при определённых условиях) есть величина «почти» не случайная.

ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***– попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены, т.е. не превышают константы С, то как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства***

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Иными словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

При формулировке теоремы мы предполагали, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто встречается случай, когда математическое ожидание случайных величин одно и то же. Если дисперсии этих величин ограничены, то при применении к ним теоремы Чебышева мы получим следующее

СЛЕДСТВИЕ

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***– попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание, равное а, и если дисперсии этих ве-***

личин равномерно ограничены, то как бы ни было мало число ε>0, имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

По определению предела и с учётом свойств вероятности это означает, что для любого ε>0 найдётся такое δ>0, зависящее от n и ε, что

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1-\delta$$

Давайте рассмотрим случайную величину $X=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ и, воспользовавшись неравенством Чебышева, оценим значение δ сверху. Пусть $M(X_i)=a$, как в условиях следствия, а $D(X_i)=\Delta$. Тогда $M(X)=a$ и $D(X)=\frac{\Delta}{n}$ по свойствам математического ожидания и дисперсии. Подставив эти значения в неравенство Чебышева, получим

$$P(|X-a|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\Delta}{n\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

В этом неравенстве можно также заменить случайные величины X_1, X_2, ..., X_n на наблюдаемые при независимых испытаниях значения случайной величины с математическим ожиданием a и дисперсией Δ.

Итак, сущность теоремы Чебышева такова: *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины.*

Вспомним теперь схему испытаний Бернулли. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Пусть в этой серии испытаний ровно m раз появилось событие A, т.е. m – случайная величина, распределённая по закону Бернулли. Можно ли предвидеть, какова будет примерно относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующая

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Заметим, что из теоремы Бернулли не вытекает равенство $\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$. В теореме речь идёт лишь о **вероятности** того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события в каждом испытании. Именно из этого факта вытекает эквивалентность классического и статистического определений вероятности, но мы по понятным причинам не будем этого строго доказывать – поверьте на слово.

Для ситуации, описанной в теореме Бернулли, тоже можно получить оценку, аналогичную (3). Она будет иметь вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1

Симметричную монету подбросили 1200 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты выпадения «орла» от вероятности его появления меньше, чем на 0.1.

Решение

В этом примере мы имеем дело с последовательностью испытаний Бернулли с параметрами $p=0.5$ и $n=1200$. Найдем искомую оценку по формуле (4):

$$P\left(\left|\frac{m}{1200}-0.5\right|<0.1\right)\geq 1-\frac{0.5\cdot 0.5}{1200\cdot(0.1)^2}=1-\frac{0.25}{12}\approx 0.979.$$

ПРИМЕР 2

Пусть в результате 200 независимых опытов найдены значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$. Известно, что $M(X)=10$ и $D(X)=2$. Оценить снизу вероятность того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины и математическим ожиданием будет меньше 1/2.

Решение

В этом примере для нахождения искомой оценки используем формулу (3):

$$P\left(|X-10|<\frac{1}{2}\right)\geq 1-\frac{2}{200\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1-\frac{1}{100\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}=0.96.$$

На этом мы завершаем наш краткий курс теории вероятностей. Если вы заинтересовались этой замечательной наукой, гораздо более полное и подробное изложение её основ вы найдёте в учебниках, ссылки на которые содержатся в странице 50.

Авторы выражают надежду, что сведения и примеры, содержащиеся в этом пособии, послужат вам в будущем (по крайней мере, на экзамене).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия: испытание, событие, вероятность.
2. Алгебра событий: операции над событиями, их свойства. Достоверные и невозможные события. Совместные и несовместные события.
3. Классическое и статистическое определения вероятности.
4. Основной закон комбинаторики, основные комбинаторные формулы: число перестановок, размещений, сочетаний, размещений с повторениями.
5. Независимые и независимые в совокупности события.
6. Свойства вероятности. Условная вероятность. Вероятность суммы и произведения событий.
7. Формула полной вероятности и формула Бейеса.
8. Геометрическое определение вероятности.
9. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
10. Вероятность попадания числа успехов в заданный интервал.
11. Наивероятнейшее число успехов в серии испытаний Бернулли.
12. Локальная теорема Муавра-Лапласа и теорема Пуассона, вытекающие из них формулы. При каких условиях лучше применять эти формулы.
13. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Вытекающая из неё формула. Функция Лапласа и её свойства.
14. Понятие дискретной случайной величины. Закон распределения и функция распределения.
15. Числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение), их свойства и вероятностный смысл.
16. Непрерывная случайная величина.
17. Плотность распределения и функция распределения непрерывной случайной величины. Их свойства.
18. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
19. Биномиальное распределение. Его числовые характеристики.
20. Распределение Пуассона. Его числовые характеристики.
21. Равномерное распределение. Его числовые характеристики.
22. Показательное распределение. Его числовые характеристики.
23. Нормальное распределение. Его числовые характеристики. Нормированное нормальное распределение. Кривая Гаусса и её свойства. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал.
24. Вероятность попадания отклонения нормальной случайной величины в симметричный интервал. Правило трёх сигм.
25. Понятие о законе больших чисел. Неравенство Чебышева.
26. Теорема Чебышева. Её сущность. Следствие из теоремы Чебышева.
27. Оценка вероятности отклонения суммы одинаково распределённых случайных величин от математического ожидания.

28. Теорема Бернулли. Связь между классическим о статистическим определениями вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972 (и др. издания).
2. Бородихин В.М., Джафаров К.А., Путинцева А.П. Теория вероятностей и математическая статистика. – Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 1997.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975 (и др. издания).
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1996 (и др. издания).
5. Червяков Ю.П. Лекции по теории вероятностей. – Новосибирск: изд-во НЭТИ, 1971.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.В. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986 (и др. издания).