ПОДРОБНЫЙ ПЛАН ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ "ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

ЛЕКЦИЯ 1.

Множество. Операции над множествами. Диаграммы Венна. Теоретико-множественные тождества. Декартово произведение множеств. Основные числовые множества: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Их связь с решениями уравнений.

Комплексные числа $\mathbb{C}$. Комплексная плоскость. Алгебраическая форма записи. Действия над комплексными числами.

ЛЕКЦИЯ 2.

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). Следствие о сопряженном корне уравнения с действительными коэффициентами.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел в тригономептрической форме. Формула Муавра-Лапласа. Извлечение корней из комплексных чисел.

Многочлены и действия над ними. Алгоритм деления с остатком.

ЛЕКЦИЯ 3.

Теорема Безу. Следствие. Разложение многочлена из $\mathbb{C}[x]$ на линейные множители. Разложение многочлена из $\mathbb{R}[x]$ на множители.

Координатная ось. Проекция точки на координатную ось.
Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Координаты точки на плоскости.

ЛЕКЦИЯ 4.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Правая и левая системы координат.

Координаты точки в пространстве: $M(\text{пр}_x M,\ \text{пр}_y M,\ \text{пр}_z M)-$ упорядоченная тройка чисел.

Геометрический вектор. Обозначение. Начало и конец вектора. Обозначение длины вектора. Нулевой вектор.

Коллинеарные векторы. Равенство векторов.

Проекция вектора на координатную ось: $\text{пр}_x\overline{a}$. Пример.

Координаты вектора в декартовой прямоугольной системе координат:
– на плоскости,
– в пространстве.

Нахождение координат вектора: $\overline{AB}(\text{пр}_x B - \text{пр}_x A,\ \ \text{пр}_y B - \text{пр}_y A,\ \ \text{пр}_z B - \text{пр}_z A)$.

$$A(a_1, a_2, a_3),\ \ B(b_1, b_2, b_3) \Longrightarrow\ \overline{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Пример.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты !!!

Длина вектора в прямоугольной декартовой системе координат:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Действия над векторами: сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Свойства операций.

Действие над векторами в координатной форме.

БАЗИС НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Линейная комбинация векторов. Нетривиальная линейная комбинация. Пример.

Линейная зависимость и независимость системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$. Пример линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

Разложение вектора $\overline{a}$ по системе векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$.

Свойства линейно зависимых систем векторов:

1.Если система векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$ содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

2. Если часть системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$ линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

3. Система векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них можно записать как линейную комбинацию остальных, то есть один из них можно разложить по остальным векторам.

Теорема (о линейной зависимости двух векторов в пространстве.) Два вектора $\overline{a}, \overline{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны $\overline{a} \mid\mid \overline{b}$.

Доказательство.

ЛЕКЦИЯ 5.

Теорема (о коллинеарных векторах). Два вектора $\overline{a}(a_1, a_2, a_3), \overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3 = \lambda.$$

Доказательство.

Компланарные векторы

Теорема (о линейной зависимости трех векторов в пространстве.) Три вектора в пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Следствие. Любые три (и более) векторов на плоскости линейно зависимы.

Доказательство.

Теорема (о линейной зависимости четырех векторов в пространстве.) Четыре и более векторов в пространстве всегда линейно зависимы.

Доказательство (геометрическое).

Базис на плоскости – упорядоченная пара неколлинеарных векторов.

Равносильное определение – упорядоченная пара линейно независимых векторов.

Теорема (о разложении по базису на плоскости) Пусть $\{\overline{a_1}, \overline{a}_2\}$ – базис на плоскости, $\overline{a}$ – произвольный вектор на этой плоскости. Тогда вектор a можно разложить по базису $\{\overline{a_1}, \overline{a}_2\}$, то есть

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2},$$

причем числа α_1, α_2 находятся однозначно.

Доказательство

Координаты вектора в базисе.

Задача

Базис в пространстве – упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Равносильное определение – упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

Теорема (о разложении по базису в пространстве.) Пусть $\{\overline{a_1}, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ – базис на плоскости, $\overline{a}$ – произвольный вектор на этой плоскости. Тогда вектор a можно разложить по базису $\{\overline{a_1}, \overline{a}_2\}$, то есть

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3},$$

причем числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ находятся однозначно.

Доказательство.

ЛЕКЦИЯ 6.

Ортонормированный базис на плоскости и в пространстве. Правый и левый базис. Орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение скалярного произведения $\overline{a}\,\overline{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\ \overline{a} = |\overline{a}|^2$.

2. $\overline{a}\overline{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} \perp \overline{b}$.

3. $cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \overline{a}\overline{b}/(|\overline{a}||\overline{b}|)$

4. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$, $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c}$, $(\alpha\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\alpha\overline{b}) = \alpha(\overline{a}\overline{b})$

Теорема о выражении скалярного произведения через координаты векторов.

Задачи

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение векторного произведения.

Свойства векторного произведения:

1.$|\overline{a}\times\overline{b}|$ равен площади параллелограмма.

2. $\overline{a}\times\overline{b} = 0 \Longleftrightarrow \overline{a}||\overline{b}$.

3. $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$.

4. $(\lambda\overline{a})\times\overline{b} = \overline{a}\times(\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a}\times\overline{b})$.

5. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.

Теорема о выражении векторного произведения через координаты векторов в правом о.н.б.

Задачи

ЛЕКЦИЯ 7.

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$.

Теорема о геометрическом смысле смешанного произведения.

Замечание: $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = V$, если $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – правая тройка. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = -V$, если $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – левая тройка.

Следствие. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны.

Теорема о выражении смешанного произведения через координаты векторов в правом о.н.б.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{b},\overline{c},\overline{a}) = (\overline{c},\overline{a},\overline{b}) = -(\overline{b},\overline{a},\overline{c}) = -(\overline{c},\overline{b},\overline{a}) = -(\overline{a},\overline{c},\overline{b})$.

2. $(\lambda\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = \lambda(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

3. $(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b},\overline{c}) = (\overline{a_1},\overline{b},\overline{c}) + (\overline{a_2},\overline{b},\overline{c})$.

Задача

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ.

Определение. Пусть на плоскости зафиксирована некоторая система координат XoY. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0, \qquad (*)$$

где $f(x, y)$ некоторая функция двух переменных. Говорят, что точка $M(x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению, если после подстановки вместо неизвестных x, y координат точки x_0, y_0 получим тождество, то есть

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Теорема об уравнении прямой на плоскости. Пусть a, b, c – действительные числа, причем a и b не равны одновременно нулю, то есть $a^2 + b^2 > 0$. Пусть XoY – декартова прямоугольная система координат на плоскости. Тогда множество всех точек на плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$ax + by + c = 0$$

образуют прямую, ортогональную вектору $\overline{n}(a, b)$. И наоборот, всякую прямую на плоскости можно задать уравнением

$$ax + by + c = 0$$

при подходящем выборе чисел a, b, c.

Доказательство.

Определение. Вектор $\overline{n}(a, b)$ называется нормальным к прямой $l : ax + by + c = 0$.

Определение. Линейное уравнение $ax + by + c = 0, \ x \neq 0$ или $y \neq 0$ от неизвестных x, y называется общим уравнением прямой на плоскости.

Угол между прямыми. Условие параллельности и ортогональности прямых на плоскости.

ЛЕКЦИЯ 8.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ.

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, ортогонально вектору $\overline{n}(a, b)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

2. Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1.$$

Смысл A, B.

3. Параметрическое уравнение прямой

$$x = x_0 + pt,$$

$$y = y_0 + qt.$$

Направляющий вектор $\overline{s}(p, q)$.

4. Каноническое уравнение прямой на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Пример.

5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + \beta$.

Смысл k и β. Условие параллельности и ортогональности прямых $y = k_1x + \beta_1$ и $y = k_2x + \beta_2$.

7. Расстояние от точки до прямой

$$r(l, M) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Нормирование общего уравнения прямой.

Пример.

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Теорема (об общем уравнении плоскости). Пусть a, b, c, d – действительные числа, причем a, b и c не равны одновременно нулю, то есть $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Пусть XYZ – декартова прямоугольная система координат в пространстве. Тогда множество всех точек пространства, удовлетворяющих уравнению

$$ax + by + cz + d = 0$$

образуют плоскость, ортогональную вектору $\overline{n}(a, b, c)$. И наоборот, всякую плоскость можно задать уравнением

$$ax + by + cz + d = 0$$

при подходящем выборе чисел a, b, c, d.

Определение. Вектор $\overline{n}(a, b, c)$ называется нормальным к плоскости $P : ax + by + cz + d = 0$.

Угол между плоскостями. Условие параллельности и ортогональности плоскостей.

ЛЕКЦИЯ 9.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ.

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, ортогонально вектору $\overline{n}(a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Пример. Уравнения координатных плоскостей $XY,\ XZ,\ YZ$.

2. Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1.$$

Смысл A, B, C.

3. Параметрическое уравнение плоскости

$$x = x_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2,$$

$$y = y_0 + q_1 t_1 + q_2 t_2,$$

$$z = z_0 + r_1 t_1 + r_2 t_2,$$

Направляющие векторы $\overline{s_1}(p_1, q_1, r_1)$ и $\overline{s_2}(p_2, q_2, r_2)$
Пример. Уравнения координатных плоскостей $XY,\ XZ,\ YZ$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$: $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$. Запись через определитель.
Пример. $M_1(1, 0, 0), M_2(0, 1, 0), m_3(0, 0, 1)$

5. Расстояние от точки до плоскости

$$r(P, M_0) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Нормирование общего уравнения плоскости.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

1. Задание прямой в виде пересечения двух не параллельных плоскостей.
Пример. Записать уравнение осей координат в пространстве.
Ось $X : XoY \bigcap XoZ$, то есть $X : Y = 0, Z = 0$.

2. Параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$x = x_0 + pt, y = y_0 + qt, z = z_0 + rt.$$

Пример. Ось $X : x = t, y = 0, z = 0$.

3. Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\frac{x - x_o}{p} = \frac{y - y_o}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Пример. Написать каноническое уравнение оси Z.

4. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример.

5. Угол между прямой в пространстве, заданной параметрически, и плоскостью

$$sin(\varphi) = \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Пример. Найти угол между осью Z и плоскостью $x + y + z = 0$

ЛЕКЦИЯ 10.

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.

Определение матрицы. Обозначение. Элементы матрицы. Строки и столбцы матрицы. Размерность матрицы. Равенство матриц. Примеры.

Квадратная матрица. Порядок квадратной матрицы. Единичная матрица. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу). Алгебраическое дополнение.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Определитель единичной матрицы.

Операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц

$$A_{m\times n}B_{n\times l} = C_{m\times l},$$

транспонирование квадратной матрицы A^T.

Умножение на единичную матрицу.

Матричная запись систем линейных уравнений.
Некоммутативность умножения матриц.

Определитель произведения матриц $|AB| = |A||B|$.

Невырожденная матрица. Произведение невырожденных матриц – невырожденная матрица.

Обратная матрица A^{-1}.
Нахождение обратной матрицы. Алгоритм:
1. Вычисление определителя $|A|$.
2. Вычисление матрицы $\widetilde{A} = (A_{ij})$.
3. Вычисление присоединенной матрицы $A^* = \widetilde{A}^T$.
4. Вычисление обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

Пример. Вычислить обратную матрицу для матрицы второго порядка.

ЛЕКЦИЯ 11.

Пример 1. Вычислить обратную матрицу для матрица третьего порядка.

Основные равенства для операций над матрицами:

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$
$$(AB)C = A(BC).$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$
$$(A + B)C = AC + BC, \;\; A(B + C) = AB + AC.$$
$$AE = EA = A.$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Пример 2. Решить методом обратной матрицы систему уравнений.

Определение. $n-$мерным вектором называется упорядоченная последовательность n действительных чисел.

Действия над $n-$мерными векторами.

Понятие линейной зависимости $n-$мерных векторов.

Определение. Конечное множество векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_m\}$ принято называть системой векторов.

Определение. Часть $\{\overline{a}_{i_1}, \ldots, \overline{a}_{i_r}\}$ системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_m\}$ называется подсистемой.

Определение. Максимальной линейно независимой подсистемой системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_m\}$ называется такая подсистема, что ее векторы, во-первых, линейно независимы, и во-вторых, добавление к ним любого другого вектора системы дает линейно зависимую систему.

Теорема. Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_m\}$ содержит одинаковое число векторов.

Определение. Ранг r системы векторов $\{\overline{a_1}, \ldots, \overline{a}_m\}$ – число векторов в любой ее максимально независимой подсистеме.

Пример 3. Определить ранг системы векторов.

Теорема. Пусть ранг системы векторов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a}_m\}$ равен r. Предположим, что $\{\overline{a}_{i_1}, \dots, \overline{a}_{i_r}\}$ – максимальная линейно независимая подсистема векторов. Тогда любой вектор системы векторов $\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m\}$ является линейной комбинацией векторов подсистемы $\{\overline{a}_{i_1}, \dots, \overline{a}_{i_r}\}$

Определение. Ранг матрицы – ранг системы ее строк = ранг системы ее столбцов.

Определение. Базисный минор – минор наибольшего порядка данной матрицы, отличный от нуля.

Определение Базисные строки и столбцы – те строки и столбцы матрицы, которые входят в базисный минор.

Теорема (о базисном миноре). Ранг матрицы равен порядку ее базисного минора.

Пример 4. Найти ранг матрицы, исходя из определения и используя теорему о базисном миноре.

Определение. Пусть в матрице A задан минор $r-$ го порядка. Минор $r+1-$го порядка, содержащий данный минор, называется окаймляющим минором.

ЛЕКЦИЯ 12.

Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.

Алгоритм:

Шаг 1. Находим ненулевой элемент матрицы.

Если такого нет, то ранг матрицы равен 0 и вычисление ранга закончено.

Шаг 2. Предположим, что в матрице найден ненулевой элемент, то есть ненулевой минор первого порядка. Среди окаймляющих его находим минор второго порядка, не равный нулю. Если все окаймляющие миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы r равен единице и вычисления закончены.

Шаг 3. Предположим, что в матрице найден ненулевой минор второго порядка. Ищем окаймляющий его ненулевой минор третьего порядка и т.д.

Вычисления заканчиваются, если все окаймляющие для найденного ненулевого минора $r-$ го порядка равны нулю.

Базисные строки и столбцы матрицы.

Пример 12-1. Методом окаймляющих миноров вычислить ранг матрицы, найти ее базисные строки и столбцы.

Элементарные преобразования матрицы:

1. Перестановка строк (столбцов);

2. Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на ненулевое число;

3. Прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) элементов других строк (столбцов), умноженных на какие угодно числа.

Теорема. Элементарными преобразованиями любую матрицу можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг такой матрицы равен количеству единиц в ней.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Пример 12-2. Вычислить ранг матрицы, применив к ней элементарные преобразования.

Исследование и решение систем линейных уравнений.

Определение. Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества решений.
Пример 12-3.

Определение. Системы линейных уравнений называются совместной если она имеет хотя бы одно решение.В противном случае система называется несовместной.
Примеры 12-4.

Определение. Система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение. Система, имеющая бесконечно много решений называется неопределенной.
Пример 12-5.

Определение. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей системы, матрица $\overline{A}$, полученная добавлением к A столбца свободных членов, называется расширенной матрицей.

Теорема Кронекера-Капели Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы A совпадал с рангом расширенной матрицы $\overline{A}$.

Пример 12-6. Совместна ли система.

Элементарные преобразования системы:
1.Умножение любого уравнения на ненулевое число.
2. Прибавление к уравнению другого уравнения.
3. Изменение обозначений переменных.

Трапецеидальная система уравнений.

Теорема Любую систему линейных уравнений можно привести элементарными преобразованиями к трапецеидальному виду. Полученная система эквивалентна исходной.

Исследование системы уравнений $A_{m,n} = B$:
1. $r(A) \neq r(\overline{A})$ – система несовместна.

2. $r(A) = r(\overline{A}) = r$ – система совместна.

На примере 12-6 пояснить:
2.1. Переход к эквивалентной системе r уравнений с n неизвестными.

и случай

2.1.1. $r = n$.
(Исходная система имеет единственное решение по правилу Крамера).

На примере системы 12-7 разобрать случай
2.1.2. $r < n$. Система имеет бесконечное множество решений.

Базисные и свободные переменные.

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных).

Прямой ход (приведение системы к виду трапеции.)

Обратный ход (нахождение решения)

Пример 12-8

ЛЕКЦИЯ 13.

Пример 13-1 (несовместная система)

Пример 13-2 (неопределенная система)

Однородная система линейных уравнений

Определение однородной системы уравнений. Матричная запись.

Однородная система уравнений всегда совместна. Тривиальное решение. Необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения: $r(A) < n$. Необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения квадратной системы однородных уравнений.

Теорема. Множество решений однородной системы уравнений замкнуто относительно сложений и умножений на число, то есть образует линейное пространство. (определение линейного пространства будет дано чуть позже)

Доказательство.

Базис пространства решений – фундаментальная система решений.

Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений (на примере 13-3):
1. Элементарными преобразованиями привести систему уравнений к трапецеидальному виду. Предположим, что неизвестные $x_1, \dots, x_r$ расположились на главной диагонали с коэффициентами 1. Назовем их базисными переменными. Остальные переменные$x_{r+1}, \dots, x_n$ называют свободными.

2. Оставим члены системы уравнений, содержащие базисные переменные, слева. Остальные члены, содержащие свободные переменные, перенесем направо.

4. Свободным переменным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ будем придавать значения

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

$$\overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$$

$$\overline{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0, 0),$$

$$\ldots$$

$$\overline{e}_{n-r-1}(0, 0, 0, \ldots, 1, 0),$$

$$\overline{e}_{n-r} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Для каждого вектора $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{n-r}$ обратным ходом получаем значения базисных переменных. Эти значения вместе со значениями $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{n-r}$ дают $n - r$ решений $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_{n-r}$ системы уравнений. Эти решения $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_{n-r}$ составляют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы однородных уравнений:

$$X_{o,o} = c_1\overline{E}_1 + \ldots + c_{n-r}\overline{E}_{n-r}.$$

Его смысл.

Пример 13-3. Найти общее решение системы линейных уравнений.

Частное и общее решение системы неоднородных уравнений. Алгоритм нахождения общего решения на примере 13-4:

1. Нахождение частного решения $X_{\text{ч н}}$ системы неоднородных уравнений.

2. Нахождение общего решения $X_{\text{о о}}$системы однородных уравнений $X_{\text{о о}} = c_1\overline{E}_1 + \ldots + c_{n-r}\overline{E}_{n-r}$.

3. Нахождение общего решения $X_{\text{о н}}$ системы неоднородных уравнений $X_{\text{о н}} = X_{\text{ч н}} + c_1\overline{E}_1 + \ldots + c_{n-r}\overline{E}_{n-r}$.

Линейные пространства.

Определение линейного пространства:
множество L, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, причем

1. x, $y \in L \Longrightarrow x + y \in L$.
2. $x \in L, \alpha-$ число $\Longrightarrow \alpha x \in L$.
3.

$$x + y = y + x,$$

4.

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

5. Существует элемент ноль $\mathbf{0} \in L$, такой что для любого $x \in L$, $\mathbf{0} + x = x + \mathbf{0}$,
6. Для любого $x \in L$ существует элемент $-x$ такой что $x + (-x) = \mathbf{0}$,
7. Для любого $x \in L$ верно $1\dot{x} = x$,
8. Для любого $x \in L$ и любых чисел α, β верно $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

9. Для любых $x, y \in L$ и любых чисел α, β верно

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y.$$

называется линейным пространством над полем действительных чисел.

Примеры линейных пространств:
1. Все векторы на плоскости $\mathbb{R}^2$
2. Все векторы в пространстве $\mathbb{R}^3$.
3. Все матрицы одинаковой размерности $\mathbb{R}_{m,n}$.
4. Все непрерывные функции FN.
5. Все дифференцируемые функции FD.
6. Все решения системы однородных! уравнений S_0

ЛЕКЦИЯ 14.

Определение. Линейная комбинация элементов пространства.

Определение. Нетривиальная линейная комбинация.

Определение. Линейная зависимость элементов пространства.

Определение. Базис линейного пространства – максимальная упорядоченная линейно независимая система его элементов.

Теорема. Любая максимальная линейно независимая система элементов линейного пространства содержит одинаковое число элементов.
Доказательство

Определение. Размерность пространства - количество элементов в максимальной линейно независимой системе. Пространство называется конечномерным, если его базис – конечное множество.

Пример: Определить размерность пространств:

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{m,n}, FN, S_0,$$

$\mathbb{R}_n[x]$– пространства многочленов с действительными коэффициентами степени $\leq n$.

Теорема. Любой элемент пространства можно разложить по базису, причем однозначно.
Доказательство

Определение. Координаты элементов пространства в заданном базисе.

Координаты векторов в различных базисах. Матрица перехода.

Задача.14-1 На плоскости задан о.н.б. $\varepsilon = \{\bar{i}, \bar{j}\}$.
1. Проверить, что векторы $\bar{e}_1 = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{e}_2 = \bar{i} + 4\bar{j}$ составляют базис на плоскости.
2. Разложить через базис $\varepsilon' = \{\bar{e}_1, \ \bar{e}_2\}$ векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$.

3. Вектор a имеет координаты $(2,1)$ в базисе ε. Найти его координаты в базисе ε'.

Постановка задачи. Даны базисы

$$\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

и

$$\varepsilon' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$$

в $n-$мерном линейном пространстве. Известны координаты элемента a в одном базисе. Нужно найти координаты элемента a в другом базисе.

Обозначения:
$[a]_\varepsilon-$ столбец из координат элемента a в базисе ε.
$[a]'_\varepsilon-$ столбец из координат элемента a в базисе ε'.

Определение матрицы перехода $T_{\varepsilon\to\varepsilon'}$.

Условное обозначение

$$\varepsilon = \varepsilon' T_{\varepsilon\to\varepsilon'}.$$

Теорема(о невырожденности матрицы перехода $T_{\varepsilon\to\varepsilon'}$). Матрица перехода $T_{\varepsilon\to\varepsilon'}$ не вырождена. Обратная для нее матрица $T^{-1}_{\varepsilon\to\varepsilon'}$ является матрицей перехода от базиса ε' к базису ε, то есть

$$T^{-1}_{\varepsilon\to\varepsilon'} = T_{\varepsilon'\to\varepsilon}.$$

Доказательство

Теорема (о связи между координатами элемента в различных базисах). Имеет место формула

$$[a]_{\varepsilon'} = T_{\varepsilon\to\varepsilon'}[a]_\varepsilon.$$

Доказательство.

$$a = (e_1, \ldots, e_n)[a]_\varepsilon = \varepsilon[a]_\varepsilon = \varepsilon' T_{\varepsilon\to\varepsilon'}[a]_\varepsilon \Longrightarrow [a]'_\varepsilon = T_{\varepsilon\to\varepsilon'}[a]_\varepsilon.$$

Ч.т.д.

Задача.14-2. $\varepsilon = \{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ – базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon' = \{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \bar{i}+\bar{j},\ \overline{ki}\}$ – другой базис (проверить!). Известно $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$. Найти разложение вектора $\bar{a}$ по базису ε'.

Лекция 15.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Определение преобразования φ линейного пространства.

Определение линейного преобразования φ линейного пространства.
Образ $y = \varphi(x)$, прообраз x элемента y.

Свойства линейного преобразования

1. Образ нулевого элемента – нулевой элемент.
Доказательство.
2. Образ элемента $-a$ есть $-\varphi(a)$.
Доказательство.

Примеры преобразований:
1. $\mathbb{R}^3 : \varphi(\overline{a}) = -\overline{a}$
2. $\mathbb{R}^3 : \varphi(\overline{a}) = 2\overline{a}$
3. Дифференцирование линейного пространства многочленов $\mathbb{R}[x]$ степени не выше n.
4. Проектирование векторов пространства на координатные плоскости.

Определение матрицы $[\varphi]$ линейного преобразования φ в базисе ε.

Теорема (о координатах образа). Имеет место следующая формула

$$[\varphi(a)]_\varepsilon = [\varphi]_\varepsilon [a]_\varepsilon$$

Задача 15-1. Используя матрицу линейного преобразования, найти координаты вектора

$$\varphi(2\overline{i} - \overline{j}),$$

если

$$\varphi(\overline{i}) = 3\overline{i} + 5\overline{j}, \ \ \varphi(\overline{j}) = \overline{i} + 4\overline{j}.$$

Определение подобных матриц.

Теорема (о связи между матрицами линейного преобразования в различных базисах.) Имеет место формула

$$[\varphi]_{\varepsilon'} = T^{-1}_{\varepsilon' \to \varepsilon} [\varphi]_\varepsilon T_{\varepsilon' \to \varepsilon},$$

то есть матрицы линейных преобразований в различных базисах подобны.

Определение подпространства линейного пространства.

Примеры
1. Будет ли подпространством в $\mathbb{R}^3$ множество векторов длины 1?
2. Будет ли подпространством в $\mathbb{R}^3$ множество векторов, коллинеарных вектору $\overline{a} \neq \overline{0}$?
3. Будет ли подпространством в $\mathbb{R}^3$ множество векторов, ортогональных вектору $\overline{a} \neq \overline{0}$?
4. Будет ли подпространством в $\mathbb{R}^3$ множество векторов, сумма координат которых равна нулю.

Теорема (о ранге подпространства). Ранг $r(L_1)$ подпространства L_1 не больше ранга $r(L)$ пространства L. Если подпространство L_1 строго меньше пространства L, то $r(L_1) < r(L)$.

Определение. Образ $\varphi(L)$ линейного преобразования φ

Теорема. Образ $\varphi(L)$ линейного преобразования φ линейного пространства L является подпространством.
Доказательство.

Определение. Ядро $ker(\varphi)$ линейного преобразования φ

Теорема. Ядро $ker(\varphi)$ линейного преобразования φ линейного пространства L является подпространством.

Доказательство.

Определение суммы и произведения линейных преобразований. Произведение линейного преобразования на число.

Определение невырожденного линейного преобразования.

Определение тождественного преобразования.

Теорема.

1. Матрицей суммы линейных преобразований φ и ψ является матрица $[\varphi] + [\psi]$;
2. Матрицей произведения линейных преобразований φ и ψ является матрица $[\varphi][\psi]$;
3. Матрицей произведения линейного преобразований φ на число a является матрица $a[\varphi]$.
4. Матрица невырожденного линейного преобразования не вырождена.
5. Матрица тождественного преобразования единичная.

Важно!! Каждому линейному преобразованию соответствует квадратная матрица и наоборот, каждой квадратной матрице соответствует линейное преобразование. Операции умножения и сложения на матрицах и преобразованиях определены одинаково. Поэтому изучать матрицы – значит изучать линейные преобразования.

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ.

Определение собственного числа (значения) $\lambda \in \mathbb{R}$ линейного преобразования.

Определение собственного вектора линейного преобразования, соответствующего собственному значению λ.

Теорема(о собственных векторах). Пусть $x,\ y$ – собственные векторы линейного преобразования φ, соответствующие одному собственному значению λ и a – некоторое число. Тогда $x + y$ и ax также собственные векторы, соответствующие числу λ.

Доказательство.

Следствие. Множество собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образуют линейное пространство.

Матричная запись условия $\varphi(x) = \lambda x$:

$$[\varphi][x] = \lambda[x]$$

или

$$([\varphi] - \lambda E)[x] = 0.$$

Запись условия в виде системы линейных уравнений.

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел.

Алгоритм нахождения собственных векторов линейного преобразования.

Лекция 16.

Теорема (о независимости собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.) Пусть собственные векторы $x_1, \ldots, x_m$ соответствуют различным собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Тогда векторы $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы.
Доказательство (m=2)

Определение диагональной матрицы.

Теорема (о матрице линейного преобразования в базисе из собственных векторов.) Если для линейного преобразования φ существует базис из собственных векторов, то в этом базисе его матрица имеет диагональный вид.

Следствие. Если матрица A порядка n имеет n различных собственных чисел, то она подобна диагональной.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Окружность.
Каноническое уравнение окружности (вывод).

Эллипс.

Определение. Вывод канонического уравнения. Симметрии, точки пересечения с осями координат. Построение эллипса. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = c/a$. Директрисы. Фокальные расстояния $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$. Отношения r_1/d_1, r_2/d_2. Другое определение эллипса. Оптические свойства эллипса.

Гипербола.

Определение. Каноническое уравнение. Симметрии, точки пересечения с осями. Действительная и мнимая полуоси. Вид кривой. Асимптоты гиперболы. Эксцентриситет гиперболы. Директрисы. Фокальные расстояния. Отношения $r/d = \varepsilon$. Другое определение гиперболы.

Лекция 17.

Оптические свойства гиперболы.

Парабола.

Определение. Вывод канонического уравнения. Симметрия. График. Оптические свойства параболы.

Исследование общего уравнения второй степени.

Общее уравнение второй степени. Упрощение уравнения. Преобразования координат точки при повороте. Поворот системы координат (вывод формулы $\varphi = 1/2arctg((a-c)/b)$.) Преобразование координат при параллельном переносе осей. Перенос начала координат.

Задача 17.1. Поворот осей

Задача 17.2. Параллельный перенос осей.