Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. ЛЫКИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

2-е изд., перераб. и доп.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
В качестве учебного пособия

Новосибирск
2009

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент *В.Я. Любченко*
канд. техн. наук, доцент *А.Г.Русина*

Работа подготовлена на кафедре
автоматизированных электроэнергетических систем для студентов,
обучающихся по направлению 140200 «Электроэнергетика»

Лыкин А.В.

Математическое моделирование электрических систем и их элементов: учеб. пособие / А.В. Лыкин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 228 с.

В учебном пособии изложены методологические основы моделирования объектов и процессов при решении задач электроэнергетики. Рассматриваются три уровня представления математических моделей: микро- макро- и метауровень. Приводятся примеры моделирования основных объектов электроэнергетических систем в задачах, связанных с анализом установившихся режимов электрических сетей. Дано описание подходов к прогнозированию электропотребления и нагрузки энергосистем с использованием различных моделей. Приводятся методы построения математических моделей, выбора их структуры и вычисления параметров моделей. Примеры использования и исследования математических моделей даны в системе Mathcad.

Учебное пособие может быть полезно студентам, обучающимся по другим направлениям.

Предисловие

Моделирование является одним из самых мощных методов познания окружающего нас мира. С давних времен этот метод применялся при постройке зданий и сооружений, для предсказывания явлений природы, установления законов и т.п. Трудно сейчас назвать область деятельности человека, где бы не применялось моделирование.

Под математическим моделированием понимается описание некоторых свойств и соотношений реального объекта, процесса или явления с помощью математической символики. Наиболее известными математическими моделями являются системы целых и действительных чисел. Эти модели используются для описания таких процессов, как счет, сравнение, измерение и т.п. Модели, которые применимы к объектам произвольной формы, называются абстрактными, абстрактную модель можно определить двумя способами: аксиоматически и конструктивно.

Аксиоматическое определение основано на непротиворечивом наборе правил (определяющих аксиом), вводящих операции, которыми можно пользоваться, и устанавливающих соотношения между их результатами. Например, правила сложения и умножения действительных чисел. Конструктивное определение вводит математическую модель на основе уже известных математических понятий, например сложение и умножение матриц в терминах сложения и умножения чисел.

Моделирование как научный метод стал предметом обобщения и анализа начиная с 40-х годов XX века. Вначале появилось не совсем четкое представление о неком объекте-заместителе, материальном или идеальном, который при определенных условиях может заменять исходный объект-оригинал, воспроизводя некоторые характеристики, свойства и отношения, присущие последнему.

Преимущества объекта-заместителя заключаются в его доступности, обозримости в пространстве и времени, наглядности и неограниченных возможностях для экспериментирования.

Математическое моделирование предполагает описание свойств определенного объекта на языке математики с целью его дальнейшего исследования при решении различных задач также только методами математики. Объект, описанный на языке математики, представляется некоторой математической структурой (различными уравнениями, передаточной функцией, графиком и т. п.) с определенными параметрами; а процесс исследования математической модели заключается в применении к этой структуре совокупности математических преобразований и операций в соответствии с некоторым алгоритмом. Результатом такого исследования является новая информация об объекте, но в той части его свойств, которые нашли отражение в математическом описании.

ЭВМ позволяют исследовать эти свойства при возможных вариациях параметров, входящих в модель, определить ее вероятностные характеристики, находить оптимальные параметры и решать другие задачи.

Недостатком метода математического моделирования является то, что исследователь находится в плену существующей математики. Он пытается описать явления в новых областях с помощью известных математических структур. Но может ли математика описать изучаемые явления? Не во всех случаях. К таким случаям относятся, например, некоторые экологические, экономические и социальные задачи. Развитие этих научных направлений требует от математиков разработки новых структур, дающих исследователю возможность использовать методы математического моделирования.

В настоящем учебном пособии рассматриваются вопросы математического моделирования технических объектов и физических процессов при решении инженерных задач в области электроэнергетики.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Решение задач и моделирование

Любой материальный объект характеризуется бесчисленным множеством свойств, признаков и характеристик, но наши знания о материальном объекте конечны и относительны на любом этапе развития.

В процессе познания у человека (субъекта) в сознании формируется мысленный образ объекта, который обладает присущими этому объекту свойствами (цвет, запах, размеры, вес, изменчивость во времени и др.). Такой мысленный образ есть мысленная (идеальная) модель объекта (рис. 1.1).

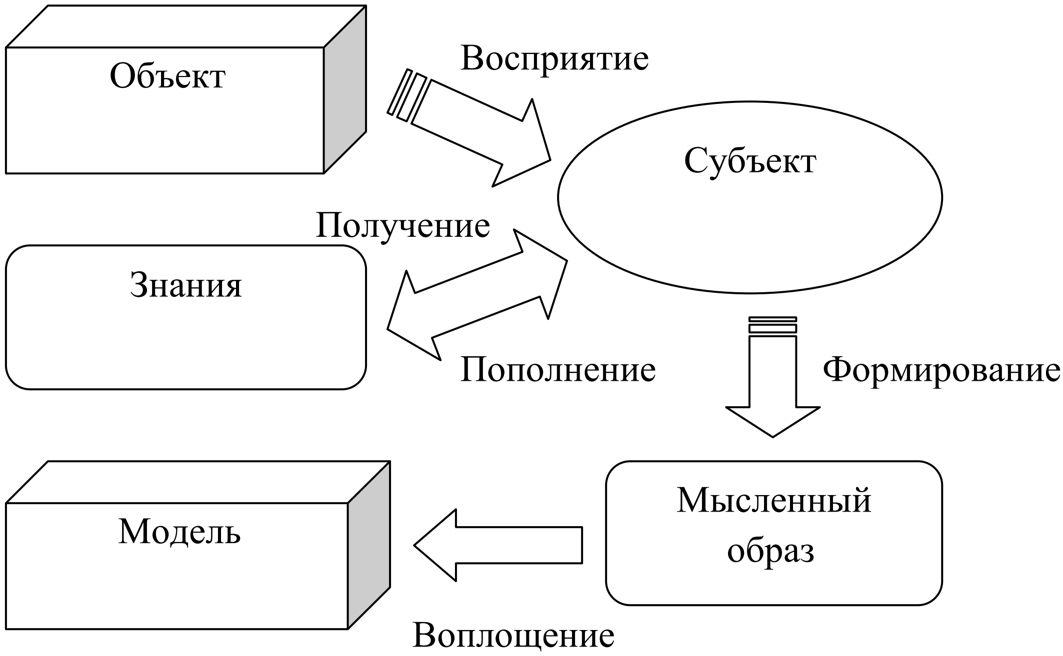


Рис. 1.1. Схема формирования модели

Познавательный процесс человека носит целенаправленный характер, а именно, во всех случаях субъект решает некоторую задачу для достижения своих целей. Задача выделяет из бесконечного множества свойств объекта конечную совокупность и позволяет перейти к обозримому по своим масштабам «заместителю» объекта – модели. Задача – это фильтр, позволяющий отсеять из всей информации об объекте несущественную.

Таким образом, задача определяет характер формируемой модели.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Сконструируем трансформатор заданной мощности и возможным диапазоном изменения напряжений на первичной и вторичной обмотках. В качестве ограничений учетем требования по допустимым потерям холостого хода и работе на линейной части характеристики намагничивания сердечника и габаритам трансформатора.

В этом случае необходимо учитывать электрические, магнитные, конструктивные, геометрические, тепловые свойства трансформатора.

Вводить понятие модели без четкого указания задачи или задач неправомерно. Вне контекста задачи или класса задач понятие модели не имеет смысла.

Фундаментальным свойством модели является простота по отношению к объекту. Модель всегда «беднее» объекта в информационном отношении. «Точная модель» недоступна, как и сам оригинал.

Задача своими условиями и требованиями позволяет определить ограничения и допущения в построении любой модели.

Пример 2. Рассмотрим маятник – груз, подвешенный на нити. Модель (геометрическая) дана на рис. 1.2. Модель (математическая) движения маятника в общем является довольно сложным нелинейным дифференциальным уравнением, но при принятых допущениях, «дозволенных» задачей, это уравнение становится довольно простым и легко решается. Перечислим допущения, которые принимаются при этом:

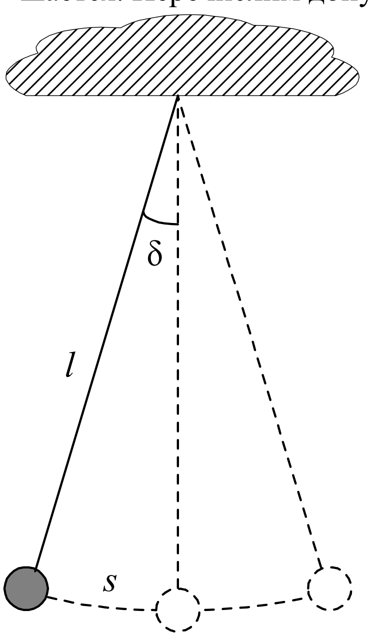


Рис. 1.2. Геометрическая модель маятника

- размерами маятника пренебрегаем, и его масса сосредоточена в одной точке (пренебрегаем сопротивлением воздуха);
- растяжением нити пренебрегаем;
- массой нити пренебрегаем.

Вводится также ограничение – амплитуда колебаний пренебрежимо мала по сравнению с длиной нити.

При таких допущениях и ограничении получается модель – математический маятник. Период малых колебаний математического маятника не зависит от массы маятника и амплитуды его колебаний. Уравнение движения маятника записывается в виде

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s, \tag{1.1}$$

где s – длина дуги, по которой маятник совершает движение; g – ускорение свободного падения; l – длина нити.

Как известно, наблюдения над колебаниями маятников используются для определения ускорения g силы тяжести в разных широтах Земного шара.

Человечество за свою жизнь накопило огромное количество теорий и законов. Это практически достоверное обобщенное описание объектов реального мира.

Иногда для решения частных задач вводятся еще большие ограничения и допущения, которые упрощают известные теории и законы. В этом случае появляются модели моделей, в которые переходят все допущения и ограничения исходных моделей.

1.2. Классификация моделей

Существуют разные способы классификации моделей:

- по классам задач;
- по области использования;
- по способу представления и др.

Из классов задач, по которым разделяют модели, можно назвать: анализ, синтез, конструирование, проектирование, управление, утилизация и т. п.

По области использования модели разделяют:

- учебные – наглядные пособия, различные тренажеры, обучающие программы;
- опытные – копии объектов, которые используются для исследования объекта и прогнозирования его характеристик в будущем;
- научно-технические, используемые для исследования процессов и явлений (различные стенды, моделирующие физические и природные явления);
- игровые – военные, экономические, спортивные и деловые игры;
- имитационные, которые моделируют с той или иной точностью работу объекта в различных условиях и, как правило, с учетом случайных факторов. Алгоритм (компьютерная программа), реализующий имитационную модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные события, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательностью протекания во времени. Это позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Примером имитационной модели может служить программа расчета аварийного переходного процесса в электроэнергетической системе, когда во время протекания процесса имитируются события срабатывания различной автоматики и коммутации оборудования системы.

Способ представления модели – наиболее важный признак классификации моделей.

Все модели можно разделить на две группы: материальные и идеальные (информационные). В свою очередь физические модели разделяют на физические, аналоговые и геометрически подобные (макеты), рис. 1.3.

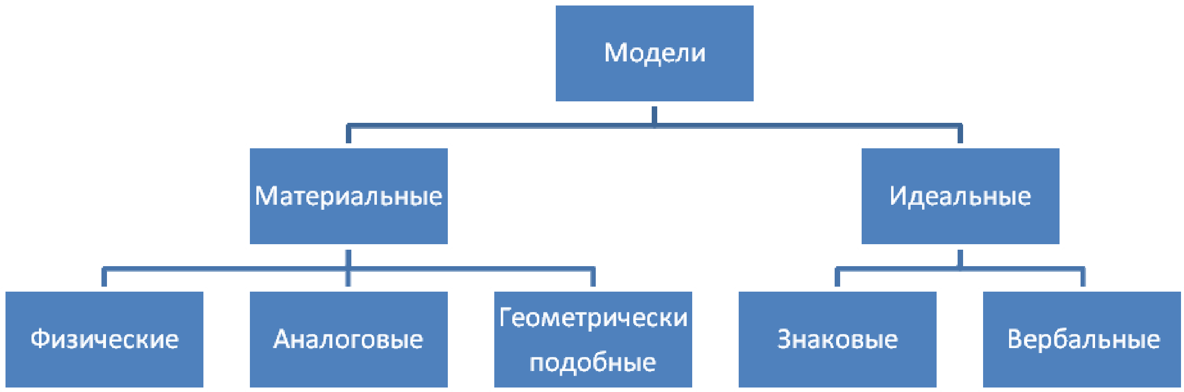


Рис. 1.3. Классификация моделей по способу представления

Физические модели имеют ту же природу, что и моделируемые объекты. Это, как правило, уменьшенные копии объектов, сохраняющие его основные физические свойства. Так, например, работу гидравлической турбины можно исследовать на лабораторной установке, воспроизводящей в масштабе настоящую турбину. Исследование работы генератора электростанции также можно выполнить на малой электрической машине переменного тока. Модели автомобилей, судов, самолетов, луноходов и других машин, которые являются физическими моделями, помогают инженерам исследовать механические, тепловые, электрические, магнитные, химические и другие свойства различных машин.

Иногда исследования проводятся на моделях, которые имеют отличную от исходного объекта физическую природу. Так механические свойства движения вращающегося объекта (вала) можно исследовать на электрической модели, и, наоборот, токи и напряжения электрической цепи можно моделировать с помощью сил и скоростей элементов механической системы. Такие модели называют аналоговыми. Получило развитие направление моделирования с помощью специальных аналоговых вычислительных машин (АВМ), в отличие от цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

Многие физические и аналоговые модели исследуются в динамике, т.е. изменении их параметров и свойств во времени. Моделирование предусматривает масштабирование не только по переменным модели, но и по времени, таким образом, процессы, протекающие в моделях, воспроизводятся в замедленном или ускоренном движении.

Геометрически подобные модели – это макеты зданий, сооружений и природных объектов. Они изготавливаются для решения учебных, архитектурных, экологических и инженерных задач.

Идеальные модели носят информационный характер. Они возникают и строятся в сознании людей и используются как любая информация. Можно сказать, что информация – это модель окружающего нас мира. Идеальные модели в зависимости от средств их изображения, передачи, хранения и использования подразделяются на знаковые и вербальные.

Знаковые модели используют какой-либо формализованный язык – литературный, математический, алгоритмический и др. Вербальными можно считать образные модели в сознании людей и передаваемые ими посредством разговорной речи.

Знаковые и вербальные модели взаимосвязаны. Мысленный образ, родившийся в мозгу человека, может быть облечен в знаковую форму, и, наоборот, знаковая модель позволяет сформировать в сознании верный мысленный образ.

Знаковые модели, записанные на каком-либо носителе (бумажном, магнитном, электрическом, оптическом и др.), передаются между людьми, обрабатываются на компьютерах и сохраняются для следующих поколений. В зависимости от этого можно выделить несколько видов знаковых моделей: дескриптивные, имитационные, алгоритмические, математические, базы данных и знаний.

Математическое представление об объекте должно согласовываться с возможностью дальнейшего анализа и исследования объекта по его математической модели. Каждый объект и система могут моделироваться на разных иерархических уровнях восприятия человеком окружающего мира. Принято разделять моделирование технических объектов по трем уровням: микро-, макро- и метауровень. На каждом из этих уровней применимы свои классы моделей, различающиеся, главным образом представлением пространства и времени. Описание моделей разных иерархических уровней дано в разд. 1.6-1.8.

1.3. Переменные в математических моделях

Переменные величины, входящие в математическую модель, различают по нескольким признакам.

По роли, которую переменные играют по отношению к объекту моделирования. На рис. 1.4 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор входных переменных, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – вектор выходных переменных. В связи с разделением переменных на входные и выходные рассматриваются прямые и обратные задачи исследования объекта по его математической модели. В прямых задачах по данным о выходах объекта исследуется его поведение в различных условиях (режимах работы), т.е. входные переменные, структура и параметры модели относятся к исходным данным, а выходные переменные представляют результат исследования: **Y** = **f**(**X**) или **F**(**X**,**Y**) = 0, где известны характеристики **X** и **f** или **F**.

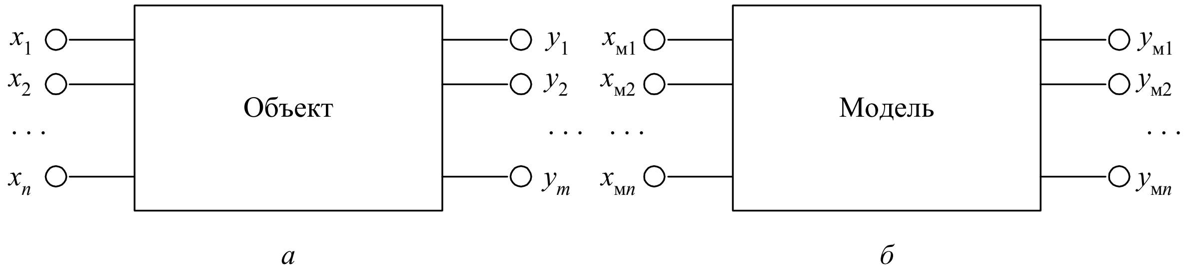


Рис. 1.4. Переменные в объекте и его модели

В обратных задачах считаются известными **X** и **Y** (доступны для измерения и исследования), а определению подлежат неизвестные структура и параметры модели (**f** или **F**). Такие задачи называют задачами идентификации.

Входные переменные разделяют на управляемые (управляющие воздействия) и неуправляемые (возмущения) Первые позволяют выполнять регулирование режима работы объекта, а вторые меняются самопроизвольно, например погодные условия.

По подверженности воздействию случайным факторам. Детерминированная (определенная) переменная означает, что для нее исключено влияние случайных факторов – она задается вполне определенным значением или меняется во времени по определенному закону. Некоторые переменные по своей природе или по влиянию на них случайных факторов являются случайными величинами. Процесс изменения такой величины во времени называется случайным или стохастическим процессом. К этим переменным можно отнести мощность нагрузки тяговой подстанции, которая зависит от загрузки контактной транспортной сети, или величину активного сопротивления провода ЛЭП, в большой степени подверженного влиянию температуры окружающей среды.

В основе описания случайных переменных лежат методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

По свойствам непрерывности и дискретности. Изменения непрерывных переменных во времени описываются непрерывными функциями, которые могут принимать континуальное множество значений в некоторых практически всегда имеющихся пределах (рис. 1.5, *а*). Непрерывность, порожденная инерционностью материальных систем, является их неотъемлемым свойством. Однако на практике возможности разрешения близких значений функций и ее аргументов всегда ограничены; для каждого конкретного случая можно указать определенную область, в пределах которой эти значения становятся неразличимыми для наблюдателей или инструментальных средств. Очевидно, что такую область достаточно характеризовать единственным значением, что приводит к понятию дискретных переменных (рис.1.5, *б,в,г*).

Дискретные переменные подразделяются на три типа:

1) дискретные относительно значений переменной (рис. 1.5, *б*);

2) дискретные относительно времени (рис. 1.5, *в*);

3) дискретные относительно значений переменной и относительно времени (рис. 1.5, *г*).

Множество дискретных значений, которые принимает переменная, как правило, является конечным: положение выключателя (включено, выключено), количество включенных генераторов на электростанции (0, 1, 2, …), значения целых чисел, представленных в цифровой вычислительной машине (например, от –32768 до 32767). С помощью дискретных относительно значений переменных удобно представлять некоторые процессы (графики нагрузок или напряжений по часам суток или месяцам года), распределение вероятностей (гистограмма) и т.п.

Дискретность во времени связана с отсчетом или замером или замером переменных в отдельные дискретные моменты времени. Так в автоматизированных системах управления измерения переменных выполняются с заданной периодичностью, например через каждые 5 минут.

Дискретность по времени и по значению дополнительно к измерениям в отдельные моменты времени предполагает использование дискретных значений переменных.

По способу получения переменные делятся на наблюдаемые и ненаблюдаемые.

Главное свойство наблюдаемых переменных – доступность для наблюдения. Однако наблюдаемость сама по себе еще не обеспечивает возможности полного исследования и описания переменной. Необходимо, чтобы последняя обладала еще свойством измеримости, т.е. возможностью построения для исследуемой величины метрики. Этому требованию удовлетворяют непосредственно измеряемые переменные. Они представляют собой количественные характеристики свойств и параметров всевозможных материальных объектов и процессов (напряжение, ток, скорость, линейные размеры и пр.), которые определяются на основе прямого измерения, т.е. сравнения с мерой, обеспечены средствами измерения и охвачены существующей системой метрологического обеспечения.

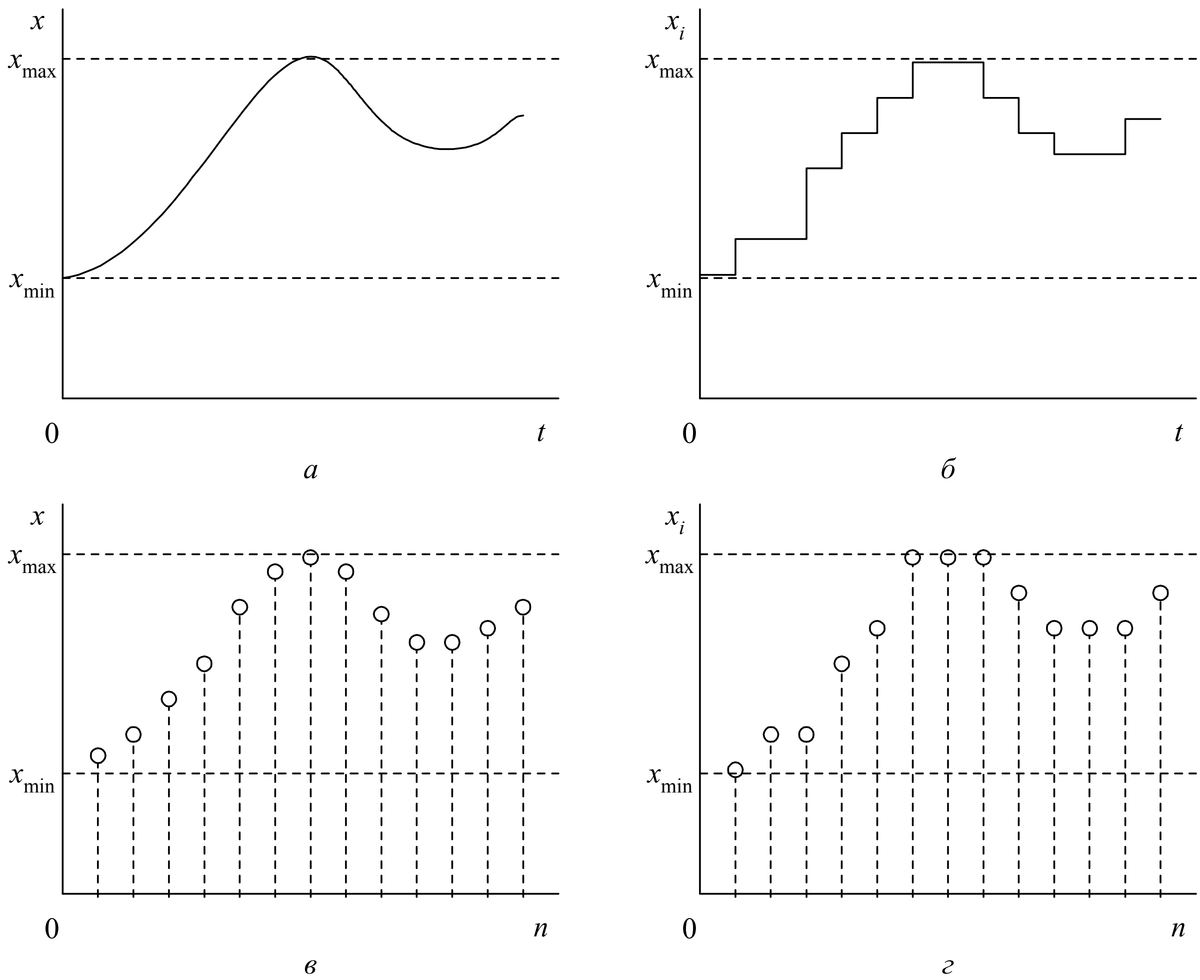


Рис. 1.5. Виды переменных по свойствам непрерывности и дискретности

Тесно связан с непосредственно измеряемыми и следующий класс переменных – косвенно измеряемые.

Косвенно измеряемая переменная x сама по себе не является объектом измерения, а часто и в принципе не может быть непосредственно измерена. Вместо нее непосредственному измерению подвергаются другие, вспомогательные переменные (α, β, γ,…), которые связаны с исследуемой переменной функциональной зависимостью $x = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Это позволяет вычислить значение искомой переменной по результатам прямых наблюдений вспомогательных величин, например, вычислить объем тела по результатам измерения его линейных размеров. При испытаниях силовых трансформаторах в электрических сетях температуру его обмоток определяют методом измерения их сопротивлений постоянному току, т.е. температура – косвенно измеряемая переменная.

К косвенно измеряемым переменным относят такие искусственно сконструированные идеальные образования, которые вообще не наблюдаемы: математическое ожидание, дисперсия, энтропия и др.

Существует класс переменных, которые при их количественном оценивании не имеют материальной эталонной базы и находятся вне сферы метрологии. К ним относятся все виды непосредственно или косвенно измеряемых переменных, приведенных к безразмерной форме и выраженных в относительных единицах. Например, некоторые величины материальной природы (интенсивность сейсмических явлений, интенсивность облачности в метеорологии, твердость материалов по Бринеллю и некоторые другие), а также искусственные идеальные конструкции, характеризующие в количественном отношении сложные и массовые объекты и явления (рентабельность, прибыль, эффективность и др.). Такие переменные называют условно измеряемыми, так как меры или единицы измерения, используемые при их количественном оценивании, носят конвенционный характер.

Существует еще один класс наблюдаемых переменных – условно количественно оцениваемые. Они представляют сложные многофакторные явления, интенсивность которой может быть различной, но для количественного оценивания этой интенсивности не удается ввести ни объективной единицы измерения, ни способа измерения. Однако в целом ряде случаев между интенсивностями рассматриваемого явления удается установить отношение порядка (равны – не равны, больше – меньше и т.д.), а затем отобразить эти отношения, вообще говоря, произвольным образом на некоторое множество (систему) чисел. Результатом такой процедуры являются, например, численные оценки качества усвоения учащимися и студентами учебного материала, степень удовлетворения работой членов некоторого производственного коллектива, степень качества исполнения музыкального произведения или выполнения спортивного упражнения. Условное количественное оценивание основано на опыте и интуиции и по сути своей субъективно.

Ненаблюдаемые переменные подразделяют на принципиально ненаблюдаемые и технически ненаблюдаемые.

Принципиально ненаблюдаемые переменные не существуют как компоненты реального мира и поэтому поддаются определению только косвенными методами, в частности на основе косвенных измерений (статистические характеристики).

Технически ненаблюдаемые переменные характеризуют такие материальные явления, которые либо не обеспечены техническими средствами, необходимыми для измерения и оценивания, либо протекают в условиях, когда инструментальный доступ к ним невозможен. Характерным примером переменной, не наблюдаемой из-за практической недоступности, является количество угля для помола в шаровой мельнице на электростанции.

Каждая переменная, связанная с материальным объектом, может изменять свои значения лишь в некоторых конечных пределах, которые обусловлены физическими свойствами объекта и характером решаемой задачи. Данные об этих пределах – ограничения на переменные – существенны при построении и использовании всех видов моделей, а в оптимизационных задачах, где необходимо найти оптимальное значение так называемой целевой функции, ограничения являются главной частью самой модели.

С математической точки зрения различают ограничения типа простых неравенств: $\mathbf{X}_{min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{max}$, $\mathbf{Y}_{min} \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}_{max}$ – параллепипедные ограничения и функциональные ограничения, фиксирующие предельные значения некоторой величины в функции от других переменных: $\mathbf{f}_{min}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{Z} \leq \mathbf{f}_{max}(\mathbf{X})$ и т.п.

В практике моделирования выделяют так называемые жесткие ограничения, которые являются абсолютными (например, угол поворота лопатки турбины – «до упора»), и ограничения мягкие, допускающие кратковременные нарушения установленной границы значений переменной (например, верхнего предела рабочего напряжения на электродвигателе).

В общем случае данные об ограничениях на переменные входят в состав модели как обязательная составная часть.

1.4. Адекватность и эффективность математических моделей

Математическое описание объекта может иметь различную степень соответствия (адекватность) объекту-оригиналу. Как правило, исследователь стремится к более полному и точному отражению в модели свойств объекта. Это естественное стремление объясняется неопределенностью, которая неизбежно присутствует при построении моделей. Нельзя заранее точно знать, какие свойства объекта важны для решаемой задачи, а какие – несущественны. Такая неопределенность тем больше, чем меньше исследователь знает исследуемый объект и меньше его опыт в решении подобных задач.

Таким образом, требование полноты соответствия модели объекту-оригиналу является мерой совершенства модели и одним из ее качеств. Мало того, излишняя полнота модели в большинстве случаев даже вредна, так как приводит к такому усложнению модели, что ее использование становится невозможным. Поэтому другое качество модели – это ее простота.

Нетрудно понять, что качества адекватности и простоты противоречат друг другу, т.е. с улучшением одного из них происходит ухудшение другого. Отыскание оптимального сочетания (как говорят, «золотой середины») этих двух качеств при построении модели есть отдельная задача, решение которой лежит на исследователе. Здесь необходим опыт, интуиция и соответствующий уровень подготовки исследователя. Идеальная квалификационная подготовка последнего не только весьма обширна, но и в значительной мере противоречива.

С одной стороны, исследователь должен досконально представлять себе задачу и глубоко изучить объект моделирования. Но, с другой стороны, исследователю, строящему модель, необходимо хорошо владеть аппаратом современной математики, представлять себе весь арсенал модельных конструкций, иметь опыт формализации знаний и использования современных вычислительных средств. Кроме того, во многих случаях от исследователя требуются знания в области планировании и проведения эксперимента на объекте-оригинале или на более сложной модели (вычислительный эксперимент).

Модель с оптимальным сочетанием качеств адекватности и простоты можно назвать эффективной (практически полезной) моделью. Математически такое сочетание соответствует максимуму так называемой «функции полезности», и, если такая функция может быть записана, отыскание ее максимума возможно известными оптимизационными методами.

Употребляя термин «точность математического моделирования», можно иметь в виду адекватность модели, например, говорят: точная или приближенная формула, линеаризованная (т.е. приближенно замененная линейной) зависимость и т.д. Но реализация математической модели, т.е. проведение «вычислителем» одного или нескольких расчетов, результатом которых будут численные значения переменной, вектора, таблицы содержит погрешности вычислений вследствие ошибок округления, прерывания итерационного процесса вычислений и ошибок в данных, которые переходят (распространяются) на результаты. Последующая обработка реализаций математической модели предполагает и подсчет погрешности исследований. В связи с этим, рассматривая вопрос об эффективности математических моделей, следует иметь в виду погрешности реализаций, которые иногда являются причиной дополнительных упрощений модели, так как учет некоторых факторов может, например, сказаться на результатах в меньшей степени, чем погрешности в исходных данных.

Рассмотрим математическую модель линии электропередачи (ЛЭП) высокого напряжения. В нее входят такие параметры, как активное сопротивление, индуктивность самоиндукции и взаимоиндукции проводов, а также емкости между проводами и проводами и землей. Высота подвеса проводов и заземленных грозозащитных тросов на линии влияет на величину емкостей между проводами и землей. Следует ли в расчетах режимов ЛЭП учитывать близость земли? В некоторых случаях при достаточно длинных ЛЭП определение емкостных параметров требует уточнения в части влияния земли, а при небольших длинах линий это необязательно.

При анализе адекватности, эффективности и точности отдельных математических моделей используются некоторые численные оценки. Получение этих оценок почти всегда связано с большими трудностями, так как требует проведения натурных (на объекте-оригинале) или вычислительных (по реализациям по более точной модели) экспериментов. Иногда такие эксперименты требуют больших материальных и временных затрат, но проводить их необходимо, так как это единственный способ оценить качество математических моделей.

Истинные значения параметров обычно отождествляются с экспериментально полученными. Однако погрешности натурного эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями математических моделей, а иногда заметно их превышают.

Пусть на выходе объекта измеряются m переменных **Y** (рис. 1.4, *а*). При исследовании на математической модели получились m модельных переменных $\mathbf{Y}_\text{м}$. Вектор погрешностей есть разница полученных векторов $\mathbf{\Delta} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\text{м}$. В целом погрешность математической модели можно оценить по норме вектора погрешностей **Δ**:

$$\|\Delta\|_1 = \max_{i\in[1...m]} |\Delta_i|. \tag{1.2}$$

Часто используют евклидову норму и среднеквадратическую погрешность:

$$\|\Delta\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2} \text{ и } \varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2}{m}}. \tag{1.3}$$

В качестве других характеристик математических моделей иногда называют экономичность (по затратам) и универсальность (применимость к группе объектов).

1.5. Свойства объектов моделирования

Технические объекты имеют самые разнообразные внутренние свойства и взаимодействия с окружающим миром. Рассмотрим внутренние свойства объектов моделирования, которые необходимо учитывать при построении моделей.

Под структурой объекта обычно понимают совокупность элементов, входящих в состав объекта, и связей между ними. Структура математической модели – это совокупность переменных и параметров, записанных в математическом выражении, например

$$z = ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy \qquad (1.4)$$

Здесь переменными являются величины x, y и z, а параметрами коэффициенты a, b, c, d, e.

Параметры – это количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются его структурой, а в математической модели они являются коэффициентами, входящими в математическое выражение.

Рассмотрим свойства объектов с точки зрения моделирования.

1) Непрерывность и дискретность

Подавляющее большинство различных технических объектов имеют свойство непрерывности переменных, т.е. свойство принимать несчетное множество сколь угодно близких значений. Состояния этих объектов описываются макроскопическими физическими величинами: температурой, скоростью, давлением, пространственными координатами, электрическим током и т.п. Математические структуры, адекватно описывающие такие объекты, очевидно, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании объектов с непрерывными переменными используют главным образом аппараты дифференциальных и интегральных уравнений, передаточные функции, частотные характеристики и др.

Дискретные переменные могут принимать некоторое, практически всегда конечное, число наперед заданных значений. Характерными примерами объектов с дискретными переменными являются релейные переключательные схемы, коммутационные системы АТС, цифровые вычислительные машины. Основой формализованного описания объектов с дискретными переменными является аппарат математической логики. Дискретные методы анализа в настоящее время получили широкое распространение для описания и исследования объектов с непрерывными переменными. При этом вследствие конечности разрядной сетки ЦВМ значения непрерывных величин округляются до дискретных значений, а исходные дифференциальные уравнения в частных производных заменяются эквивалентными конечно-разностными. В отличие от моделей с дискретными переменными по своей сути модели с непрерывными переменными, представленные дискретно, называют дискретизированными.

2) Стационарность и нестационарность

Строго говоря, какие-то изменения имеют место в любом реальном объекте, однако в тех случаях, когда они настолько малы, что могут не учитываться при моделировании, объект рассматривается как стационарный.

Стационарность предполагает неизменность и структуры и параметров объекта. Поэтому стационарный объект описывается математическим выражением, которое включает в себя только постоянные коэффициенты.

Нестационарные объекты имеют в общем случае изменяющиеся во времени структуру и параметры.

В технических объектах приходится сталкиваться с нестационарностью как структуры, так и параметров объекта. Так, например, в электроэнергетической системе в течение времени отключаются и включаются отдельные элементы (линии, трансформаторы, генераторы) и изменяются их параметры в зависимости от различных внешних факторов (температура, влажность, старение изоляции и др.).

Принципиальных затруднений учет нестационарности относительно параметров в математическом описании объекта не вызывает, хотя усложняет модель и ее исследование. В тех случаях, когда появляется необходимость исследовать объекты переменной структуры, общую нестационарную задачу, как правило, расчленяют на ряд стационарных относительно структуры подзадач, решения которых отыскивают отдельно, а затем объединяют в одно.

3) Распределенность и сосредоточенность параметров

В пространственно протяженных объектах, в частности включающих в себя непрерывные среды (газы, жидкости, твердые среды), когда время распространения физических, например колебательных явлений, оказывается соизмеримым с инерционными эффектами, адекватное описание процессов требует учета как временных, так и пространственных координат. Объекты такого рода, средством описания которых служат дифференциальные уравнения в частных производных, относятся к классу объектов с распределенными параметрами. С математической точки зрения объекты с распределенными параметрами представляют собой поле, существующее в пространственно-временном континууме, а переменные соответствующих моделей в общем случае суть функции времени и пространственных координат. Типичными примерами одномерных объектов с распределенными параметрами служат всевозможные «длинные линии»: проводные линии связи, длинные трубопроводы, линии электропередачи на большие расстояния. Примерами моделей двухмерного объекта с распределенными параметрами являются сечения различных трубопроводов, кабелей, проводов, где рассматриваются в плоскостях поля температур, плотностей и напряженностей. И, наконец, пространственное электромагнитное поле с его математической моделью – уравнениями Максвелла – представляет собой классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами.

Если пространственной протяженностью можно пренебречь и считать, что независимой переменной протекающих в нем процессов является только время, принято говорить об объекте с сосредоточенными параметрами. К числу таких объектов, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, относится подавляющее большинство механизмов, машин, устройств, а также все системы, у которых расстояния между отдельными элементами практически не влияют на исследуемые свойства.

Математический аппарат строго описывающий объекты с распределенными параметрами, существенно сложнее, чем объекта с сосредоточенными параметрами. Поэтому на практике всегда, где это возможно прибегают к аппроксимации, т.е. заменяют распределенные параметры на сосредоточенные, например разбивая пространство на небольшие элементы (подпространства) или делая корректировку сосредоточенных параметров.

4) Одномерные и многомерные объекты

Обычно под количеством измерений понимают число выходов (выходных переменных). Для моделирования многомерных объектов используют векторно-матричное представление.

5) Статические и динамические объекты

Статические объекты находятся как бы в «застывшем» состоянии или рассматриваются в какой-либо момент времени безотносительно того, каким было его состояние в прошлом или будет в будущем. Динамика рассматривает причинно-следственные цепочки и возможность прогнозирования будущих состояний объектов. Каждый динамический объект имеет свойство последствия (инерции) – состояние движущегося тела в некоторый момент времени определяется не только силами, действующими в тот момент, но и предшествующими воздействиями: состояние объекта имеет предысторию его движения. В дифференциальных уравнениях предыстория объекта задается начальными условиями.

Развитие механики пространственных протяженных сред, а также теории колебаний и волн выявило еще один источник последствия, не связанный непосредственно с инерционными эффектами. Речь идет о конечной скорости распространения механических возмущений, например колебательных в сплошной среде, результатом чего является зависимость текущего состояния некоторой точки от прошлых состояний других точек и, следовательно, объекта в целом.

Нельзя связывать последствия только с традиционными представлениями об инерционных эффектах. Явление последствия имеет более общий характер. Существуют и другие физические явления, например резонанс и запаздывание в каналах связи, которые дают последствия в материальных объектах. Существуют также информационные запаздывания в управляемых системах.

Н. Винер ввел обобщенное представление о зависимости между входной и выходной переменной произвольного объекта в форме

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\left[\mathbf{u}\left(t_i \middle| t\right)\right], \quad t_0 \le t \le t_i \tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}$(t), $\mathbf{x}$(t) – вектор-функции входов и соответственно выходов;

$\hat{\mathbf{A}}$ – обобщенный оператор объекта;

$t_i - t_0 = \theta$ – интерпретируемый как внутренняя память объекта интервал времени, в пределах которого прошлые состояния объекта оказывают влияние на текущее значение $\mathbf{x}(t_i)$. При этом очевидно, что условием физической реализуемости объекта является неравенство $t \le t_i$, ибо следствие (выход) в реальной системе не может предшествовать причине (входу). θ варьируется в переделах от 10^{-9} до десятков и сотен лет – табл. 1.1.

Таблица 1.1

Время внутренней памяти объекта

Тип системы (объекта)	Память	
	Единица измерения	Порядок
Радиоэлектронные системы	с	10^{-3} … 10^{-9}
Механические и электромеханические системы (машины, агрегаты, генераторы и др.)	с	10^{-2} … 10
Крупные транспортные системы (суда, ж/д транспорт, нефте- и газопроводы)	мин	1 … 10
Крупные термические агрегаты (металлургические печи, котлы)	ч	1 …10^{2}
Производственно-экономические системы	месяцы	10^{-1} …10
Крупные производственно-экономические системы	месяцы, год	-
Крупные экосистемы, биосферные процессы	годы, десятилетия	-
Массовые социально-психологические явления (ценностные установки, убеждения, мировоззрения)	столетия	-

6) Виды физических объектов

Рассматривая объекты моделирования, часто ограничиваются исследованием физических свойств одного рода: тепловых, электрических, магнитных, механических и т.д. Но в тех случаях, когда в объекте происходит передача или преобразование энергии, требуется учет свойств различного рода, например электромагнитных, теплоэлеткрических, тепломехенических, электромеханических и др. Математический аппарат, используемый для моделирования различных физических систем, может оказаться одинаковым. Так, например, вращательная механическая система и электрическая цепь с источником ЭДС и конденсатором описываются одинаковыми с точки зрения математики уравнениями.

1.6. Математические модели на микроуровне

Рассмотрим модели технических систем на микроуровне. В большинстве случаев это распределенные модели (с распределенными моделями) и они представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных. При создании математических моделей целесообразно исходить из основных физических законов в их наиболее «чистом», фундаментальном виде. Такой подход обеспечивает наиболее адекватное описание объектов, протекания процессов и явлений окружающего нас мира.

Фундаментальными физическими законами в первую очередь являются законы сохранения массы, количества движения, энергии. Эти законы можно сформулировать в одном общем виде: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через поверхность элементарного объема. Субстанцией служат масса, количество движения, энергия. Эта формулировка остается справедливой и для некоторых других субстанций, например количества теплоты, количества зарядов, количества элементарных частиц и др. Если внутри элементарного объема происходит генерация или уничтожение рассматриваемой субстанции, то к сумме притока-стока нужно добавить соответствующий член, отражающий данное явление. В этом случае общий вид уравнений, составляющих основу большинства распределенных моделей, будет следующим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{div}\vec{J} + G, \tag{1.6}$$

где φ – некоторая фазовая переменная, выражающая субстанцию (плотность, энергию и т.п.);

$\vec{J}$ – поток фазовой переменной;

G – скорость генерации субстанции;

t – время.

Поток фазовой переменной φ есть вектор $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$. Дивергенция (расходимость) этого вектора определяется общим соотношением

$$\mathrm{div}\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \tag{1.7}$$

является скалярной величиной и характеризует сумму притока-стока через поверхность элементарного объема.

Рассмотрим основные уравнения некоторых физических процессов.

1) Уравнение непрерывности гидродинамики

В течении жидкости или газа имеем в любой точке M определенное значение скорости движущейся частицы, т.е. векторное поле скорости. Обозначим через ρ плотность жидкости в данной точке. Понятие дивергенции позволяет описать поведение этой плотности в отдельной точке:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \vec{v} \,. \tag{1.8}$$

Это уравнение описывает закон сохранения массы и называется уравнением непрерывности.

При одномерном исполнении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x} \,. \tag{1.9}$$

2) Уравнение теплопроводности

Связь изменения температуры во времени и пространстве со свойствами среды описывается с помощью уравнения теплопроводности. Это уравнение вытекает из закона сохранения энергии: изменение во времени количества теплоты в элементарном объеме равно сумме притока-стока теплоты и изменения теплоты за счет ее превращения в другие виды энергии в том же объеме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_Q + G_Q \,, \tag{1.10}$$

где Q – количество теплоты;

$\vec{J}_Q$ – вектор плотности теплового потока;

G_Q – количество теплоты, выделяемой в единицу времени в рассматриваемом элементарном объеме.

2) Уравнение непрерывности электрического тока

Движение электрических зарядов через поверхность элементарного объема записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\delta} \tag{1.11}$$

где ρ – объемная плотность электрических зарядов;

$\vec{\delta}$ – вектор плотности тока проводимости и смещения.

Приведенные примеры показывают однотипность математических моделей на микроуровне, но в то же время использование математических моделей объектов в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных возможно для простых технических систем, так как решение их наталкивается на значительные трудности. Методы дискретизации пространства (конечных разностей и конечных элементов), которые используются для приближенного решения этих уравнений, приводят к решению систем с числом уравнений 10^6 и более.

1.7. Моделирование на макроуровне

Модели макроуровня получаются, когда происходит переход от распределенных параметров к сосредоточенным – выделяются крупные элементы объектов и их параметры сосредоточиваются в одной точке: масса балки оказывается сосредоточенной в центре тяжести, поле потенциалов характеризуется величиной одного напряжения, поток электронов моделируется электрическим током и т.п. Происходит дискретизация пространства, однако время – по прежнему непрерывная величина. Математическими моделями на макроуровне являются обыкновенные дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения.

Поведение (состояние) моделируемых объектов, состоящих из физически однородных элементов, в которых описываются процессы определенной физической природы (механические, электрические, гидравлические, тепловые), можно характеризовать с помощью фазовых переменных двух типов – типа потенциала и типа потока.

В табл. 1.2 приведены типы фазовых переменных для объектов разной физической природы

Таблица 1.2

Фазовые переменные для различных физических систем

Система	Фазовые переменные	
	типа потенциала	типа потока
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток
Механическая	Скорость	Сила
Механическая вращательная	Угловая скорость	Вращательный момент
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая и пневматическая	Давление	Расход

В большинстве технических объектов можно выделить три типа пассивных простейших элементов:

- типа R – элемент рассеивания (диссипации) энергии (как правило, преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания);

- типа C и типа L – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии.

Кроме пассивных элементов существуют два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Уравнения, описывающие свойства элементов объекта, называют *компонентными.* В них входят переменные типа потенциала и типа потока. Способ связи элементов отражается с помощью других уравнений, которые называют *топологическими*. В них входят переменные одного типа: либо потенциала, либо потока. Топологические уравнения могут выражать законы сохранения, условия непрерывности, равновесия, баланса и т.п.

Математические модели объектов есть совокупность компонентных и топологических уравнений.

Рассмотрим примеры компонентных и топологических уравнений для некоторых разных по своей физической природе объектов.

1) Электрические системы. Основными фазовыми переменными электрических систем являются напряжения и токи в различных элементах систем. Компонентные уравнения элементов имеют вид

$$U = RI, \quad I = C\frac{dI}{dt}, \quad U = L\frac{dI}{dt}, \tag{1.12}$$

где U – напряжение; I – ток; R – сопротивление; C – емкость; L – индуктивность.

При соединении элементов (резисторов, емкостей, индуктивностей) между собой образуется схема, соединение элементов в которой отражается топологическими уравнениями: ими являются законы Кирхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0, \tag{1.13}$$

где уравнения токов записываются для узлов, а уравнения напряжений для контуров. В ЭЭС имеются достаточно сложные элементы, и при их моделировании применяют схемы замещения, состоящие из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

2) Механическая система. Элементами механических поступательных систем являются:

- элементы механического сопротивления, отражающие потери механической энергии на разные виды трения;
- элементы масс, отражающие свойства инерционности
- элементы гибкости, отражающие свойства упругости.

Роль фазовых переменных в механических системах выполняют либо силы и скорости, либо силы и перемещения.

Компонентные уравнения имеют вид:

$$V = R_m F, \quad F = m\frac{dV}{dt}, \quad V = L_m \frac{dF}{dt} \tag{1.14}$$

где V – скорость; F – сила; R – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости; m – масса – аналог электрической емкости; L_m – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности.

Первое выражение в (1.14) указывает на связь скорости и силы через коэффициент вязкого трения $k_т = \frac{1}{R_m}$. Второе выражение является вторым законом Ньютона. Третье выражение в (1.14) получено из уравнения перемещения пружины x под действием силы $F = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. После дифференцирования последнего выражения получаем

$$\frac{dF}{dt} = k\frac{dx}{dt} = kV. \tag{1.15}$$

Если обозначить $L_m = \frac{1}{k}$ (механическая гибкость), то получим третье выражение в (1.14).

Топологические уравнения механической системы выражают уравнение равновесия сил, являющееся аналогом первого закона Кирхгофа, и уравнение сложения скоростей, в соответствие с которым сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю (аналог второго закона Кирхгофа).

$$\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0. \tag{1.16}$$

3) Механические вращательные системы. Для механических вращательных систем наиболее просто выглядит аналогия с механическими поступательными системами. Поступательной скорости V соответствует угловая скорость Ω, силе F – вращательный момент M. Аналогиями параметрами m, L_m и R будут соответственно: J – момент инерции относительно оси вращения со скоростью Ω; $L_{вр}$ – вращательная гибкость; $R_{вр}$ – сопротивление вращению.

Компонентные уравнения механической вращательной системы имеют вид:

$$\Omega = R_{вр} M, \quad M = J\frac{d\Omega}{dt}, \quad \Omega = L_{вр}\frac{dM}{dt}. \tag{1.17}$$

Топологические уравнения механической вращательной системы выражают закон равенства суммы моментов сил и закон сложения скоростей вокруг оси вращения:

$$\sum_j M_j = 0, \quad \sum_i \Omega_i = 0 \tag{1.18}$$

4) Гидравлические и пневматические системы. Фазовыми переменными гидравлических систем являются поток жидкости (расход) q и давление p – аналоги электрического тока и напряжения соответственно. Компонентные уравнения участков трубопровода и резервуаров гидросистемы связывают фазовые переменные посредством ее параметров при ламинарном и турбулентном движении жидкости.

Топологические уравнения гидравлической системы близки по своему смыслу и идентичны по форме топологическим уравнениям электрических систем, а именно сумма потоков в любом узле системы и сумма давлений вдоль любого контура системы равна нулю.

Фазовые переменные пневматических систем – потоки газа и давления аналогичны по смыслу фазовым переменным гидравлических систем. Также одинаковы в гидравлических и пневматических системах компонентные и топологические уравнения.

5) Тепловые системы. Для этих систем основные фазовые переменные – температура T и тепловой поток $g_т$.

Одно компонентное уравнение тепловой системы связывает разность температур на участке элемента и тепловой поток через тепловое сопротивление $R_т$, которое определяется теплоотдачей посредством теплопроводности, конвекции и лучеиспускания, другое уравнение через теплоемкость $C_т$ связывает тепловой поток и температуру элемента системы. Уравнения с понятием «тепловой гибкости» в тепловых системах нет.

Топологические уравнения для сумм тепловых потоков и разностей температур тепловых систем также аналогичны законам Кирхгофа в электрических системах.

Топологические уравнения для любых из рассмотренных выше систем строго определены только для установившихся режимов. В тех случаях, когда время распределения возбуждений (изменений фазовых переменных) по ветвям системы соизмеримо с длительностью интервалов времени, на которых ведется исследование, или превышает их, применять такие уравнения в приведенной выше форме нельзя.

Границы применимости топологических уравнений определяются скоростями распространения возбуждений, размерами компонентов системы и частотами изменения фазовых переменных. Например, для электрических систем скорость распространения возбуждений есть скорость света или электромагнитных волн в соответствующей среде, а для механических, гидравлических и пневматических – это скорость распространения звука в соответствующей среде.

1.8. Моделирование на метауровне

Математические модели на микроуровне учитывали распределенностью параметров объекта в пространстве. Переход на макроуровень характеризуется дискретизацией пространства – параметры объекта считаются сосредоточенными в отдельных точках пространства. Метауровень имеет математические модели, где вводятся еще большие допущения и упрощения, что позволяет получать доступные для исследования математические модели больших объектов и систем.

Существует несколько способов построения математических моделей на метауровне, к ним относятся:

1) дискретизация времени, т.е. наряду с введением сосредоточенных параметров переменные и параметры модели считаются независящими непрерывно от времени;
2) потери энергии в объекте не учитываются;
3) переход к факторным моделям;
4) переход к функциональным моделям, в которых используется только один вид фазовой переменной – сигнал;
5) эквивалентирование – замена больших систем их упрощенными моделями – эквивалентами, созданными на основе специальных критериев и др.

Так, например, решать задачи регулирования частоты и обменной мощности в Единой энергосистеме (ЕЭС) России можно с помощью модели, которая может обозримо представить все составные части этого большого и сложного объекта с учетом пропускной способности межу объединениями энергосистем (ОЭС). На рис. 1.6 показаны связи между отдельными ОЭС, входящими в ЕЭС России. Параметрами такой модели могут служить значения пропускной способности связей, мощности отдельных ОЭС и «коэффициенты жесткости» (отношения предела статической устойчивости связи к меньшей мощности из соединяемых частей ОЭС). В такой модели параметры и переменные могут считаться неизменными на длительных интервалах времени и потери электрической энергии не учитываются.

Переход к факторным моделям может быть выполнен методами идентификации объектов или с использованием методов планирования эксперимента. Идентификация технических объектов рассматривается в разделе 4.

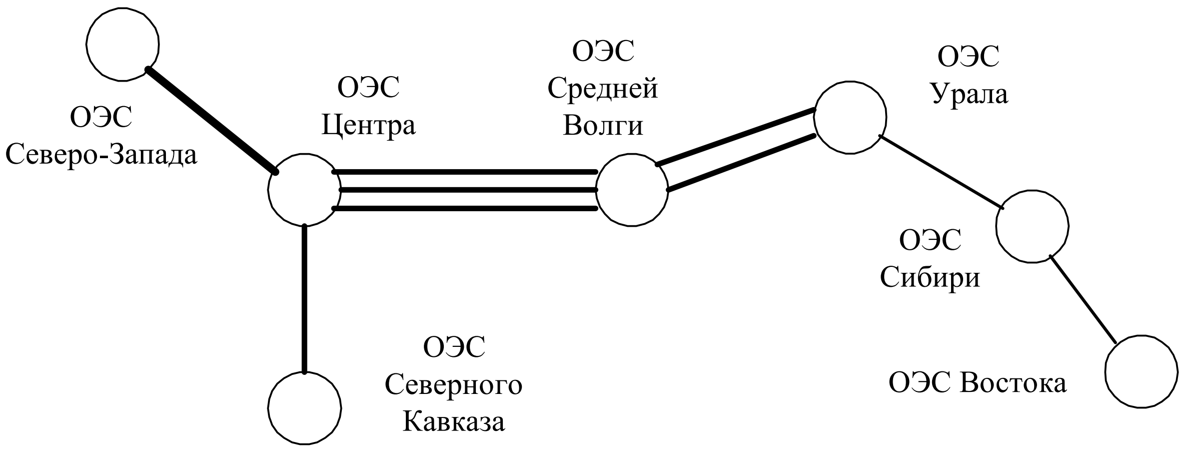


Рис 1.6. Схема связей между ОЭС ЕЭС России

Функциональное моделирование является предметом изучения отдельной дисциплины – теории автоматического регулирования.

Эквивалентирование – это преобразование электрической схемы на основе специальных критериев с целью ее упрощения. Обычно в сложной ЭЭС выделяется часть схемы сети, для которой выполняется анализ режимов работы, все остальные преобразуются в эквивалентные схемы. Так, рассматривая режимы работы отдельной ЭЭС, все соседние энергосистемы представляются их эквивалентами или в большом энергообъединении сохраняются только мощные высоковольтные линии и подстанции, а сети более низкого напряжения представляются эквивалентами.

Вопросы для самопроверки

1. Какое свойство модели является фундаментальным?
2. Как классифицируются модели?
3. По каким признакам различают переменные в математических моделях?
4. Чем различаются прямые и обратные задачи исследования объекта при его моделировании?
5. Как подразделяются дискретные переменные в математических моделях?
6. Поясните свойство адекватности математической модели.
7. Назовите попарно противоположные свойства объектов с точки зрения моделирования.
8. Что представляют собой математические модели на микроуровне?
9. Что представляют собой математические модели на макроуровне?
10. Что представляют собой математические модели на метауровне?

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЭС

2.1. Линия электропередачи

2.1.1. Конструктивное выполнение и свойства линии электропередачи

В простейшем представлении линия электропередачи – это проводники, протянутые на большое расстояние, по которым передается электрическая энергия. Возможность передачи электроэнергии обусловлена, главным образом, большим напряжением, при котором потери при передаче снижаются до приемлемого уровня.

Конструктивно воздушные ЛЭП представляет собой провода, подвешенные на безопасном расстоянии от земли, или кабели, в которых проводящие жилы изолированы друг от друга и от внешней среды и защищены различными покровами и броней. В зависимости от конструкции ЛЭП называют воздушными (ВЛ) или кабельными линиями (КЛ).

Практически во всем мире для передачи электрической энергии принята система трехфазного переменного тока 50 или 60 Гц. Однако в некоторых случаях применяются другие системы переменного тока и передачи постоянного тока. Будем рассматривать только трехфазные воздушные линии переменного тока высокого напряжения (до 1150 кВ), передающие электроэнергию на большие расстояния (до нескольких тысяч километров).

Передача электроэнергии по ЛЭП переменного тока обусловлена распространением электромагнитного поля в проводах и окружающем пространстве. Возникновение переменного электростатического поля приводит к появлению токов смещения (зарядных токов), рис. 2.1. Зарядные токи, накладываясь на нагрузочный ток, определяют постепенное изменение тока вдоль линии. Магнитное поле, обусловленное током линии, характеризуется напряженностью, также изменяющейся вдоль линии. Это приводит к наведению ЭДС самоиндукции и взаимоиндукции, неравных для различных участков линии. Неравенство этих ЭДС определяет сложный закон изменения напряжения вдоль линии, в свою очередь, определяющий изменение токов смещения вдоль линии.

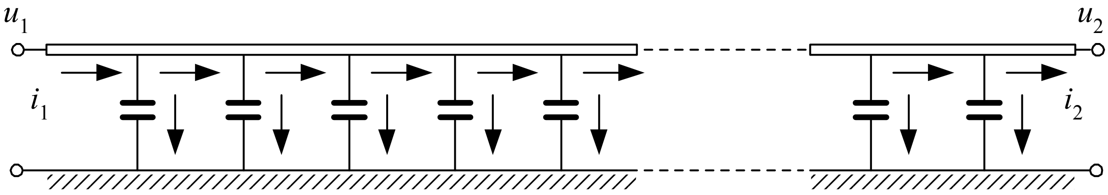


Рис. 2.1. Условное изображение распределения токов вдоль провода ЛЭП

В общем случае ЛЭП следует рассматривать как объект с распределенными вдоль одной пространственной координаты параметрами (вдоль линии). Параметры линии электропередачи, к которым относятся активное сопротивление, индуктивность, активная проводимость и емкость на единицу длины, считают равномерно распределенными вдоль ее длины. Такое свойство линий называют однородностью.

Провода ВЛ имеют в качестве проводящего материала алюминий или его сплав. Практически всегда используются сталеалюминиевые провода марки АС. Их удельное сопротивление постоянному току в среднем равно $\rho = 29{,}1$ Ом мм^2 / км. Активное сопротивление переменному току больше сопротивления постоянному току вследствие поверхностного эффекта, однако, для частоты 50 Гц это различие несущественно. Активное сопротивление в электрических схемах ЛЭП является параметром, определяющим процесс диссипации (рассеивания) энергии в виде отдачи тепла в окружающее пространство.

Индуктивность ЛЭП вызвана явлениями самоиндукции и взаимоиндукции фаз линии и определяется в зависимости от диаметра проводов фазы и расстояния между фазами. В практике расчетов электрических сетей используют индуктивной сопротивление фаз ЛЭП. Погонное индуктивное сопротивление ВЛ 330-1150 кВ x_0 в среднем равно 0,31 Ом / км.

Вследствие несовершенства изоляции ВЛ и явления короны в местах присоединения проводов к гирляндам изоляторов ВЛ имеют место потери электроэнергии от токов утечки по изоляторам ВЛ и короны. Большое влияние на эти потери оказывает влажность и загрязнение окружающего воздуха. В зависимости от погоды потери от токов утечки и на корону могут изменяться в десятки раз.

Моделирование потерь в изоляции ВЛ можно выполнить с помощью введения активной проводимости g_0, величина которой определяется по экспериментальным данным, полученных в результате наблюдений и расчетов существующих ВЛ. Для большинства ВЛ 330-1150 кВ погонная активная проводимость задается в пределах 0,01…0,1 мкСм / км.

Емкостные проводимости между фазами и между проводами и землей, грозозащитными тросами и заземленными частями опоры моделируются одним параметром – емкостной проводимостью фазы b_0. Величина погонной емкостной проводимости ВЛ 330-1150 кВ в среднем составляет 3,5 мкСм / км.

В цепи с распределенными параметрами интервал времени распространения электромагнитных волн вдоль линии сопоставим с интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на заметную величину от полного их изменения.

Другими свойствами линии электропередачи можно считать:

- непрерывность переменных,
- стационарность,
- одномерность в отношении пространства и многомерность в отношении переменных, характеризующих работы линии в разных точках линии,
- статизм или динамичность (в зависимости от исследуемых процессов),
- линейность или нелинейность (в зависимости от уравнений, описывающих режим работы линии) – при этом параметры линии считаются постоянными величинами.

В отношении свойств детерминированности и стохастичности рассматриваются разные подходы к моделированию линии – параметры и переменные могут быть представлены также и случайными величинами.

2.1.2. Математическая модель линии с распределенными параметрами

Элементы ЭЭС являются, как правило, трехфазными устройствами переменного тока, и ЛЭП имеет три фазы, которые присоединяются к другим трехфазным элементам сети, например повышающим и понижающим трансформаторам (рис. 2.2, *а*).

Здесь и далее будем рассматривать только симметричные трехфазные системы, которые вследствие симметрии можно графически изображать в однолинейном виде (рис. 2.2, *б*), имея в виду, что протекающий по фазе переменный ток замыкается через две другие фазы. Кроме того, трехфазная система имеет нейтраль *N*, которая технически может отсутствовать, но токи утечки и емкостные токи в линии могут моделироваться посредством введения нейтральной точки (линии, плоскости). На рис. 2.2 соединение обмоток трансформаторов в звезду дает нейтральные точки трехфазной системы, которые могут иметь соединение с землей (заземление).

Выделим в линии на расстоянии x от начала линии (рис.2.2, *а*, точка 1) участок бесконечно малой длины *dx*. На этом участке линии электрические параметры можно считать сосредоточенными (рис. 2.3).

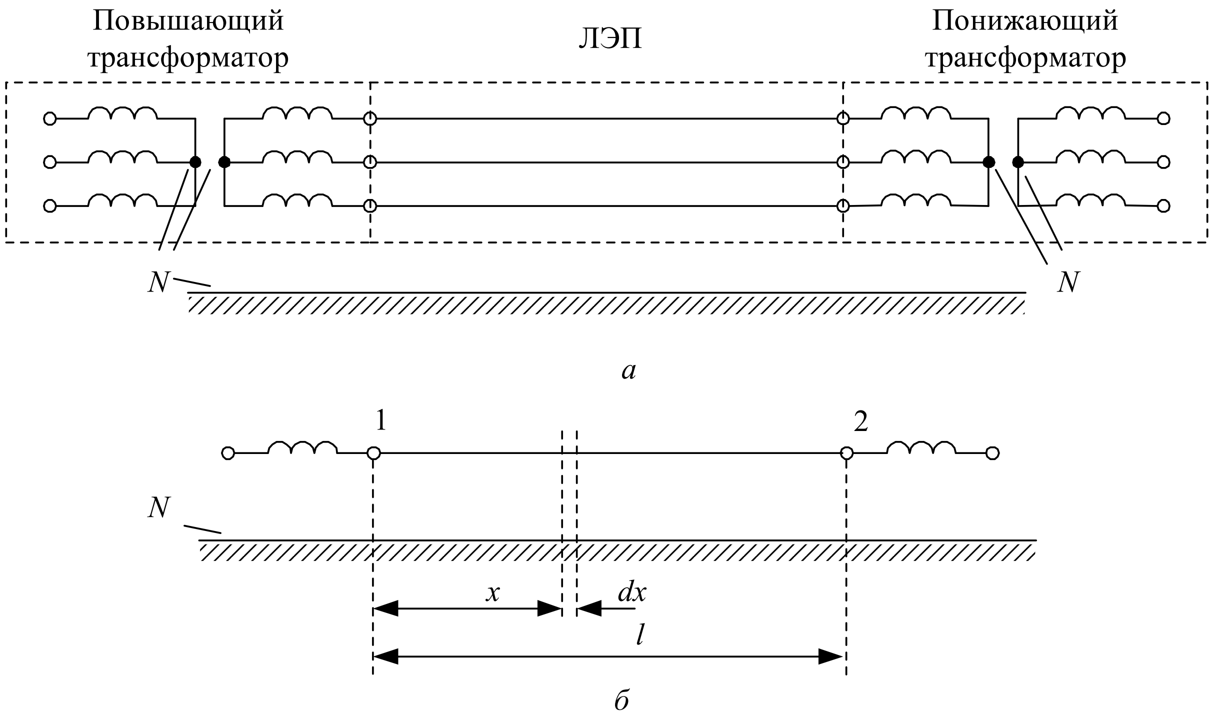


Рис. 2.2. Трехфазная линия электропередачи – (*а*) и ее однолинейное изображение – (*б*)

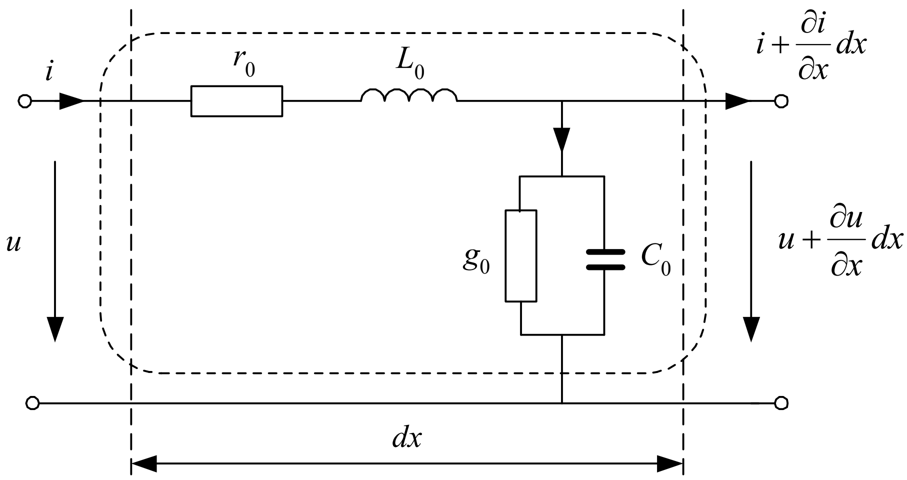


Рис. 2.3. Элементарный отрезок линии

Составим уравнения Кирхгофа для электрической цепи на выделенном участке линии:

$$\begin{aligned} &(-u)+\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)+\left(r_0 dx i+L_0 dx\frac{\partial i}{\partial t}\right)=0, \\ &(-i)+\left(i+\frac{\partial i}{\partial x}dx\right)+\left(g_0 dx u+C_0 dx\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t},$$
$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Здесь в C_0 и L_0 учтены влияния соседних фаз линии.

Полученные уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных – моделью участка линии на микроуровне. Независимыми переменными в них являются время t и одна пространственная координата x.

Используя символический метод представления синусоидальных функций времени комплексными величинами, для действующих значений токов и напряжений можно записать

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = r_0\underline{I} + j\omega L_0\underline{I} = \left(r_0 + j\omega L_0\right)\underline{I} = \underline{z}_0\underline{I},$$
$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = g_0\underline{U} + j\omega C_0\underline{U} = \left(g_0 + j\omega C_0\right)\underline{U} = \underline{y}_0\underline{U}. \tag{2.3}$$

Полученная система уравнений уже имеет одну независимую переменную x. Обозначим напряжения и токи по концам линии: $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$ при $x = 0$ и $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$ при $x = l$. Тогда из решения системы дифференциальных уравнений (2.3) получим связь между напряжениями и токами по концам линии:

$$\underline{U}_{1\text{ф}} = \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_{2\text{ф}} + \underline{Z}_C \mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2,$$
$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_{2\text{ф}} + \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2. \tag{2.4}$$

где $\underline{Z}_C = \sqrt{\dfrac{\left(r_0 + jx_0\right)}{\left(g_0 + jb_0\right)}}$ – волновое сопротивление линии;

$\underline{\gamma}_0 = \sqrt{\left(r_0 + jx_0\right)\left(g_0 + jb_0\right)} = \alpha_0 + j\beta_0$ – коэффициент распространения волны;

α_0 – коэффициент затухания волны;

β_0 – коэффициент фазы.

Полученные уравнения называются уравнениями длинной линии или телеграфными уравнениями.

В (2.4) напряжения записаны в фазных значениях. Однако в трехфазных системах принято указывать линейные значения напряжений, что приводит к пересчету на $\sqrt{3}$ некоторых слагаемых в (2.4):

$$\underline{U}_1 = \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_2 + \sqrt{3}\underline{Z}_C \mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2,$$
$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C\sqrt{3}}\mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_2 + \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2. \tag{2.5}$$

Чтобы не вводить в запись уравнений константу $\sqrt{3}$ и в то же время использовать линейные значения напряжений, используют увеличенное в $\sqrt{3}$ значение тока линии. Таким образом, математическая модель длинной линии имеет вид:

$$\underline{U}_1 = \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2,$$
$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{U}_2 + \mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}_0 l\right)\underline{I}_2. \tag{2.6}$$

Здесь $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ – фазные токи линии, увеличенные в $\sqrt{3}$.

Когда необходимо вычислить напряжение и ток в какой-либо другой точке линии, находящейся на расстоянии x от начала линии (рис. 2.4), по напряжению и току в конце, используют модель:

$$\underline{U}_x = \mathrm{ch}\left[\underline{\gamma}_0\left(l-x\right)\right]\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \mathrm{sh}\left[\underline{\gamma}_0\left(l-x\right)\right]\underline{I}_2,$$
$$\underline{I}_x = \frac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}\left[\underline{\gamma}_0\left(l-x\right)\right]\underline{U}_2 + \mathrm{ch}\left[\underline{\gamma}_0\left(l-x\right)\right]\underline{I}_2. \tag{2.7}$$

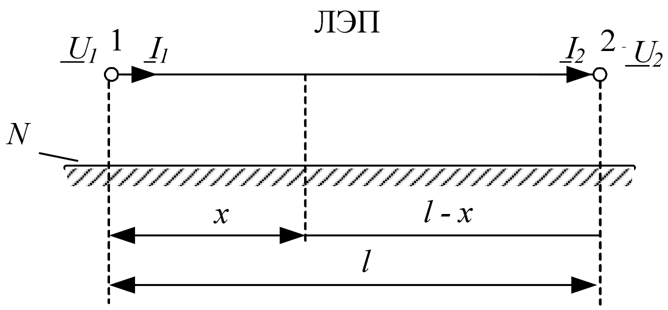


Рис. 2.4. Определение напряжения и тока в точке на линии

Формально напряжение и ток в любой точке линии можно рассматривать как результат наложения двух волн, движущихся в противоположные стороны. С течением времени волна напряжения перемещается от начала линии к ее концу; она носит название прямой или падающей волны. Волна напряжения, которая перемещается от конца линии к ее началу, носит название обратной или отраженной волны.

Расчеты показывают, что для воздушных линий электропередачи при частоте f = 50 Гц коэффициент фазы $\beta_0 \approx 0{,}001$ рад/км (0,06 град/км). С помощью этого значения можно найти длину прямой и обратной волн.

Введем понятие длины волны напряжения и тока λ, равной расстоянию между двумя точками линии, в которых фазы напряжения (тока) падающей или отраженной волны напряжения (тока) различаются на 2π.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0}, \tag{2.8}$$

где $\beta_0 = \mathrm{Im}\left(\underline{\gamma}_0\right)$ – коэффициент фазы.

Скорость перемещения падающей волны вдоль линии называется фазовой скоростью волны. Это скорость перемещения точки, фаза колебания в которой остается постоянной

$$\frac{dx}{dt} = v_ф = \frac{\omega}{\beta_0}. \tag{2.9}$$

Из этого соотношения с учетом $\omega = 2\pi f$, получим более точное значение коэффициента фазы

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v_ф} = \frac{314}{300000} = 1{,}0466 \cdot 10^{-3}\,\text{рад/км} \tag{2.10}$$

и длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_ф = \frac{v_ф}{f} = \frac{300000}{50} = 6000\,\text{км}. \tag{2.11}$$

Линии с длиной $l = \lambda = 6000$ км называют волновыми, а с $l = \lambda / 2 = 3000$ км – полуволновыми линиями.

Для упрощения исследований режимов работы ЛЭП сверхвысокого напряжения иногда пользуются уравнениями идеальной линии, в которой активные параметры считаются равными нулю: $r_0 = 0$, $g_0 = 0$. Очевидно, что при этом $\alpha_0 = 0$.

С учетом

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(j\beta_0 l) &= j\sin\left(\beta_0 l\right), \\ \mathrm{ch}(j\beta_0 l) &= \cos(\beta_0 l) \end{aligned} \tag{2.12}$$

получим математическую модель идеальной линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \cos\left(\beta_0 l\right)\underline{U}_2 + jZ_C \sin\left(\beta_0 l\right)\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= j\frac{1}{Z_C}\sin\left(\beta_0 l\right)\underline{U}_2 + \cos\left(\beta_0 l\right)\underline{I}_2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.1.3. Математические модели линии в виде схем замещения

Систему уравнений (2.6) можно представить как уравнения четырехполюсника (рис. 2.5).

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2,$$
$$\underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2. \tag{2.14}$$

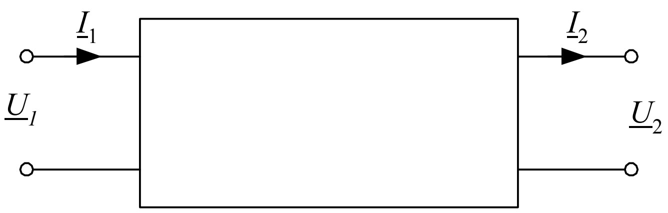


Рис. 2.5. Четырехполюсник

Здесь $\underline{A} = \underline{D} = \mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$; $\underline{B} = \underline{Z}_C \mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$; $\underline{C} = \dfrac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$, что позволяет считать данный четырехполюсник симметричным.

В практике расчетов удобно пользоваться П-образной схемой замещения линии (рис. 2.6).

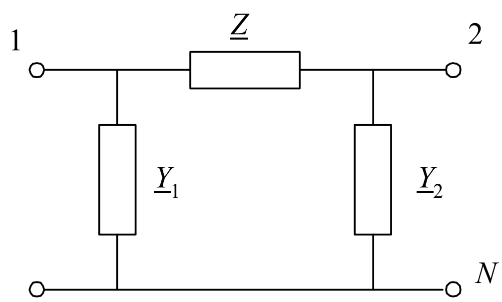


Рис. 2.6. П-образная схема замещения ЛЭП

Найдем соотношения, связывающие параметры П-образной схемы замещения $\underline{Z}$, $\underline{Y}_1$ и $\underline{Y}_2$ с параметрами модели длинной линии (2.6).

Запишем выражение, связывающее напряжения в начале $\underline{U}_1$ и конце $\underline{U}_2$ П-образной схемы замещения

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \Delta\underline{U} = \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_Z, \tag{2.15}$$

где $\Delta\underline{U}$ – падение напряжения в продольной ветви на параметре $\underline{Z}$ схемы замещения;

$\underline{I}_Z$ – ток в ветви с параметром $\underline{Z}$.

Соотношения между токами в ветвях схемы замещения получаются из первого закона Кирхгофа:

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2},$$
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1}. \tag{2.16}$$

Токи в поперечных ветвях с $\underline{Y}_1$ и $\underline{Y}_2$ вычисляются по формулам:

$$\underline{I}_{Y_1} = \underline{Y}_1\underline{U}_1,$$
$$\underline{I}_{Y_2} = \underline{Y}_2\underline{U}_2. \tag{2.17}$$

Подставим ток $\underline{I}_Z$ из (2.16) в (2.15) и с учетом (2.17) будем иметь

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\left(\underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_2}\right) = \\ = \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 + \underline{Z}\underline{Y}_2\underline{U}_2 = \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_2\right)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2. \tag{2.18}$$

Теперь запишем соотношение для тока в начале схемы замещения $\underline{I}_1$, выразив его также через напряжение и ток конца схемы замещения. Подставив в выражение для тока $\underline{I}_1$ из (2.16) выражения для тока $\underline{I}_Z$ и тока $\underline{I}_{Y1}$, получим

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_Z + \underline{I}_{Y_1} = \underline{I}_2 + \underline{I}_{Y_1} + \underline{I}_{Y_2} = \\ = \underline{I}_2 + \underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2. \tag{2.19}$$

Подставим в это выражение $\underline{U}_1$ из (2.18), будем иметь

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{Y}_1\left[\left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_2\right)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2\right] + \underline{Y}_2\underline{U}_2 = \\ = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_1\right)\underline{I}_2. \tag{2.20}$$

Окончательно получаем систему уравнений для П-образной схемы замещения:

$$\underline{U}_1 = \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_2\right)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_1\right)\underline{I}_2. \tag{2.21}$$

Модель (2.21) по своей структуре совпадает с уравнениями четырехполюсника (2.14). Из этого, с учетом вида модели длинной линии (2.6), следует, что

$$\begin{aligned} &\underline{A} = \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_2\right) = \mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l), \\ &\underline{B} = \underline{Z} = \underline{Z}_C\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ &\underline{C} = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2\right) = \frac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ &\underline{D} = \left(1 + \underline{Z}\underline{Y}_1\right) = \mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Решение (2.22) относительно параметров П-образной схемы замещения дает:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{\mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l) - 1}{\underline{Z}_C\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)}. \tag{2.23}$$

Используя известные математические соотношения

$$\mathrm{sh}(x) = 2\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right), \\ \mathrm{ch}\left(x\right) = 2\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1, \tag{2.24}$$

получаем

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C \mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l),$$
$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \mathrm{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \quad (2.25)$$

Для идеальной линии параметры П-образной схемы замещения получаются в виде:

$$\underline{Z} = jZ_C \sin(\beta_0 l),$$
$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = j\frac{1}{Z_C} \mathrm{tg} \frac{\beta_0 l}{2}. \quad (2.26)$$

Пример 1. Найдем распределение величины напряжения и тока вдоль ЛЭП 500 кВ длиной L = 500 км при холостом ходе и при передаче мощности нагрузки меньше и больше натуральной мощности линии. Конструкция фазы линии: 3хАС-400/51. Расчеты и графические построения выполним в системе Mathcad. Приведенные ниже значения параметров линии выражены в омах, сименсах и радианах. Параметры режима ЛЭП даны в киловольтах, килоамперах, мегаваттах и мегаварах.

Длина и погонные параметры линии:

$L := 500 \qquad r_0 := 0.025 \qquad g_0 := 0.023\cdot 10^{-6} \qquad x_0 := 0.306 \qquad b_0 := 3.62\cdot 10^{-6}$

$z_0 := r_0 + j\cdot x_0 \qquad y_0 := g_0 + j\cdot b_0$

Расчетные параметры линии – волновое сопротивление, коэффициент распространения волны и натуральная мощность:

$Z_c := \sqrt{\dfrac{z_0}{y_0}} \qquad \gamma_0 := \sqrt{z_0\cdot y_0}$

$Z_c = 291.016 - 10.942i \qquad \gamma_0 = 4.63\times 10^{-5} + 1.053i\times 10^{-3}$

$P_{nat} := \dfrac{U_1^{\,2}}{Z_c} \qquad P_{nat} = 857.845 + 32.255i$

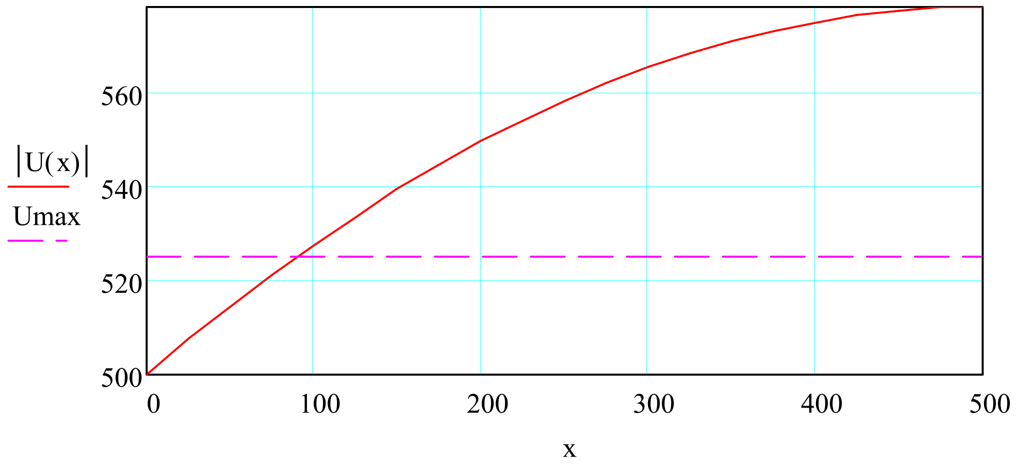
1. Режим холостого хода

Напряжение в конце линии:

$U_2 := \dfrac{U_1}{\cosh(\gamma_0\cdot L)} \qquad |U_2| = 578.152$

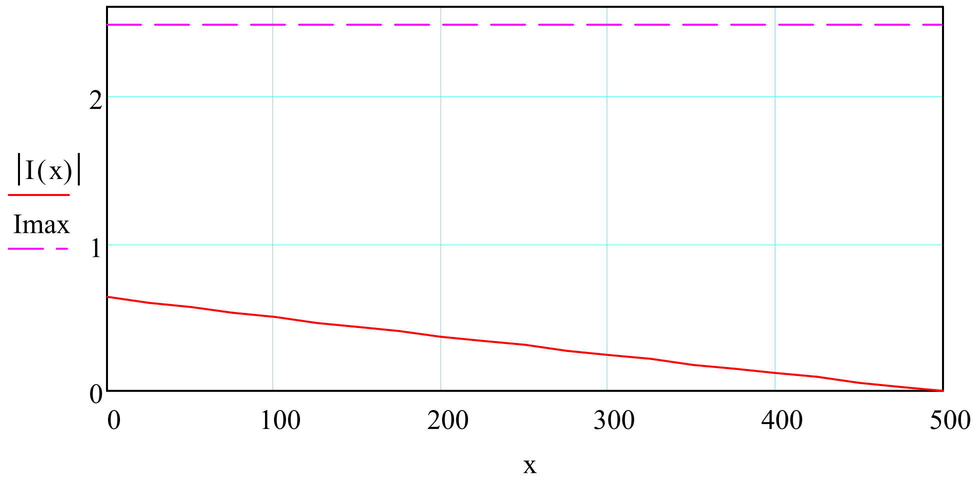
Построение графика напряжения вдоль линии в режиме холостого хода:

$$U(x) := U_2\cdot\cosh\left[\gamma_0\cdot(L-x)\right] \qquad x := 0, 25 .. L$$



Построение графика тока вдоль линии в режиме холостого хода:

$$I(x) := \frac{U_2}{\sqrt{3}\cdot Z_c}\cdot\sin\left[\gamma_0\cdot(L-x)\right] \qquad |I(0)| = 0.632$$



Из полученных зависимостей видно, что напряжение вдоль ЛЭП начинает превышать предельно допустимое значение уже на расстоянии около 100 км от начала линии; такой режим в действительности не осуществим из-за перекрытия изоляции на линии.

Ток по линии имеет наибольшее значение в начале линии и не превышает допустимое значение, равное 2,475 кА.

2. Режим передачи мощности меньше натуральной

Натуральная мощность данной ЛЭП равна 859,9 МВт. Возьмем передаваемую мощность 700 МВт, реактивную мощность в конце линии примем равной нулю

$$P_{21} := 700 \qquad Q_{21} := 0 \qquad S_{21} := P_{21} + i\cdot Q_{21}$$

Напряжение в конце ЛЭП найдем из решения системы уравнений.

Начальные приближения для неизвестных U_2, I_2:

$$U_{21} := 500 - i \cdot 100 \qquad I_{21} := \frac{\overline{S_{21}}}{\overline{U_{21}}}$$

Решающий блок:

Given

$$U_1 = U_{21} \cdot \cosh(\gamma_0 \cdot L) + I_{21} \cdot Z_c \cdot \sinh(\gamma_0 \cdot L)$$

$$I_{21} = \frac{\overline{S_{21}}}{\overline{U_{21}}}$$

$$\begin{pmatrix} U_{21} \\ I_{21} \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(U_{21}, I_{21})$$

Результаты решения системы уравнений (напряжение и ток в конце линии):

$$U_{21} = 462.558 - 210.534i \qquad |U_{21}| = 508.217$$

$$\mathrm{angle}(\mathrm{Re}(U_{21}), \mathrm{Im}(U_{21})) - 2 \cdot \pi = -24.473 \cdot deg$$

$$I_{21} = 1.254 - 0.571i \qquad |I_{21}| = 1.377$$

Вектор напряжения в конце линии отстает от вектора напряжения в начале на 24,473 градуса.

3. Режим передачи мощности больше натуральной

Примем передаваемую активную мощность по линии 900 МВт. Можно убедиться, что при реактивной мощности в конце линии, равной нулю, режим напряжений по линии является неудовлетворительным. Для поддержания удовлетворительного напряжения требуется реактивная мощность емкостного характера. Пусть мощность компенсирующего устройства, включенного в конец линии, такова, что в конце линии реактивная мощность равна минус 100 Мвар (передается в линию).

$$P_{2g} := 900 \qquad Q_{2g} := -100 \qquad S_{2g} := P_{2g} + i \cdot Q_{2g}$$

Напряжение в конце ЛЭП найдем из решения системы уравнений.

Начальные приближения для неизвестных U_2, I_2:

$$U_{2g} := 500 - i \cdot 100 \qquad I_{2g} := \frac{\overline{S_{2g}}}{\overline{U_{2g}}}$$

Решающий блок:

Given

$$U_1 = U_{2g}\cdot\cosh(\gamma_0\cdot L) + I_{2g}\cdot Z_c\cdot\sinh(\gamma_0\cdot L)$$

$$I_{2g} = \frac{\overline{S_{2g}}}{\overline{U_{2g}}}$$

$$\begin{pmatrix} U_{2g} \\ I_{2g} \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(U_{2g}, I_{2g})$$

Результаты решения системы уравнений (напряжение и ток в конце линии):

$U_{2g} = 412.797 - 270.897i$ $\qquad |U_{2g}| = 493.748$

$\mathrm{angle}(\mathrm{Re}(U_{2g}), \mathrm{Im}(U_{2g})) - 2\cdot\pi = -33.275\cdot\mathrm{deg}$

$I_{2g} = 1.635 - 0.831i$ $\qquad |I_{2g}| = 1.834$

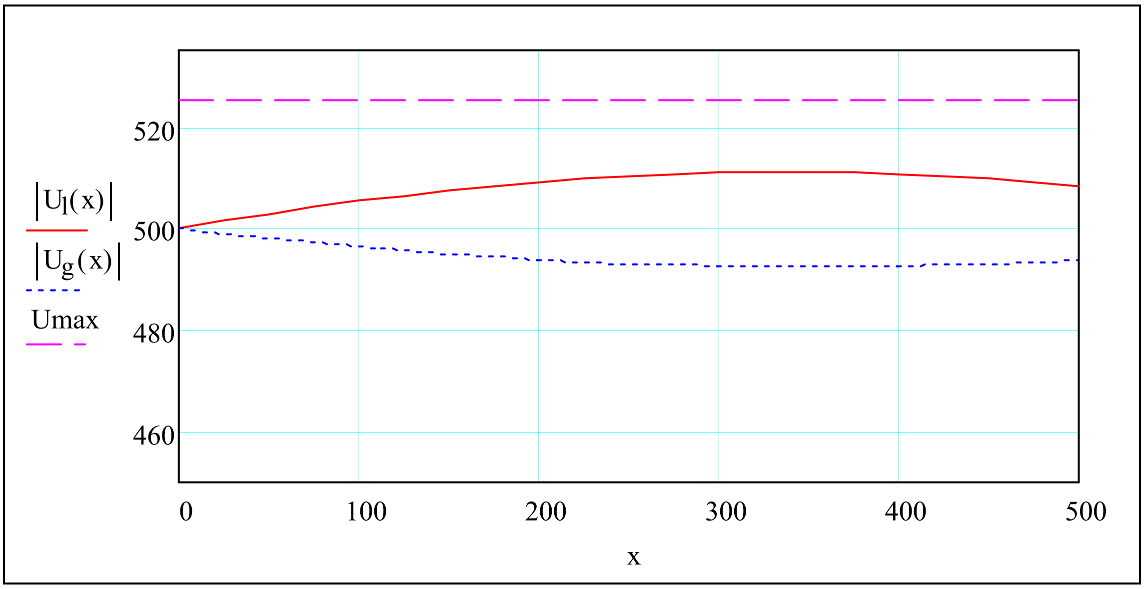
Построим графики напряжения и тока вдоль линии для обоих режимов передачи мощности.

Функция напряжения для $P_2 < P_{нат}$

$$U_l(x) := U_{2l}\cdot\cosh[\gamma_0\cdot(L-x)] + I_{2l}\cdot Z_c\cdot\sinh[\gamma_0\cdot(L-x)]$$

Функция напряжения для $P_2 > P_{нат}$

$$U_g(x) := U_{2g}\cdot\cosh[\gamma_0\cdot(L-x)] + I_{2g}\cdot Z_c\cdot\sinh[\gamma_0\cdot(L-x)]$$

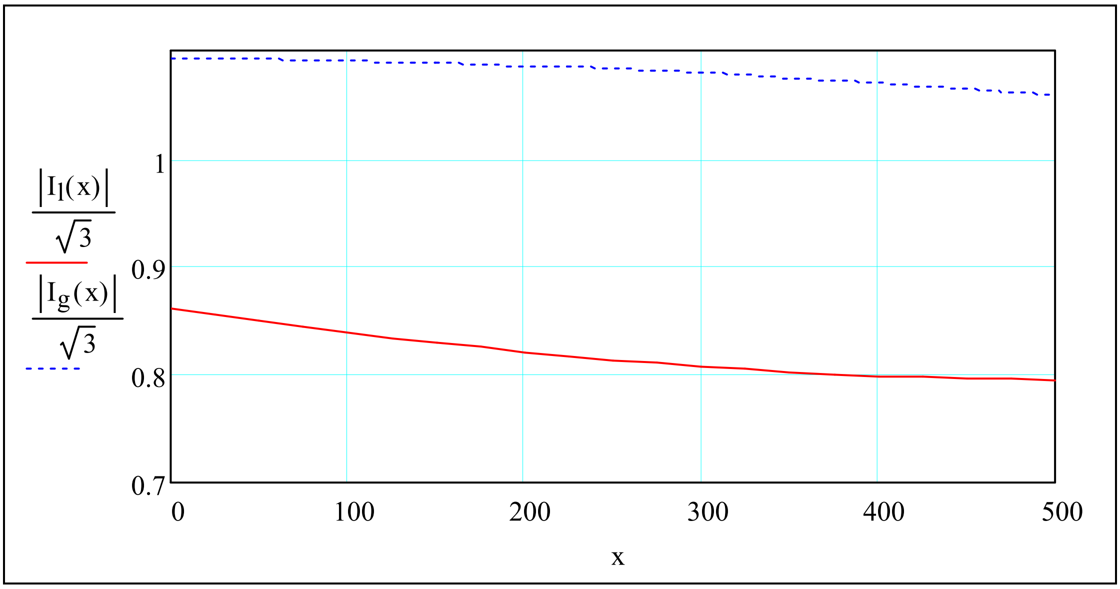


Функция тока для $P_2 < P_{нат}$

$$I_l(x) := \frac{U_{2l}}{Z_c}\cdot\sinh[\gamma_0\cdot(L-x)] + I_{2l}\cdot\cosh[\gamma_0\cdot(L-x)]$$

Функция тока для $P_2 > P_{нат}$

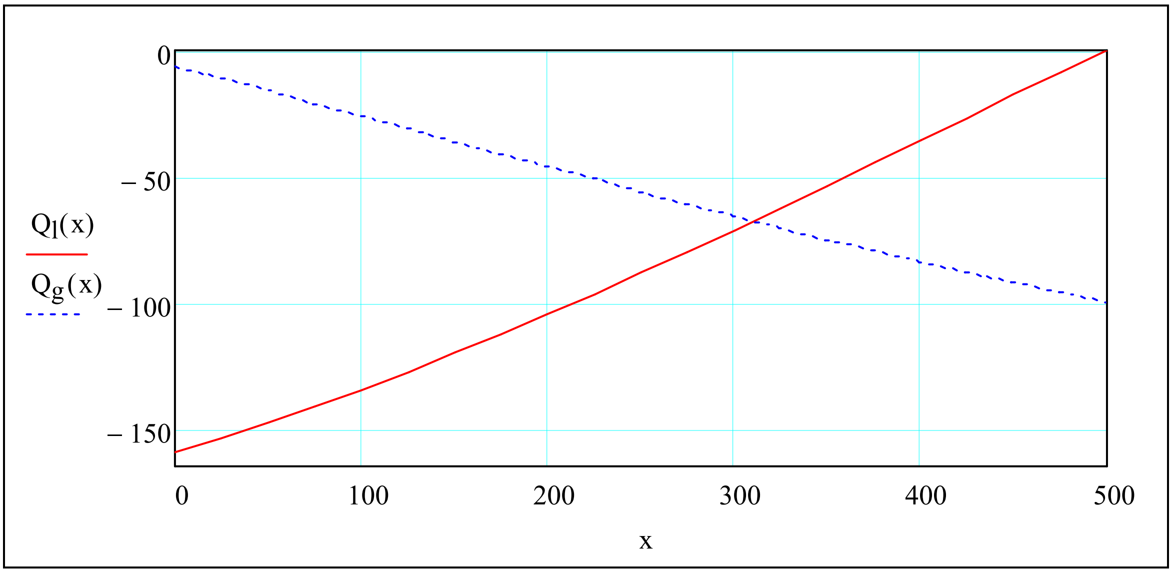
$$I_g(x) := \frac{U_{2g}}{Z_c}\cdot\sinh\left[\gamma_0\cdot(L-x)\right] + I_{2g}\cdot\cosh\left[\gamma_0\cdot(L-x)\right]$$



Изменение активной и реактивной мощности вдоль ЛЭП для двух режимов:

$$P_l(x) := \mathrm{Re}\left(U_l(x)\cdot\overline{I_l(x)}\right) \qquad Q_l(x) := \mathrm{Im}\left(U_l(x)\cdot\overline{I_l(x)}\right)$$

$$P_g(x) := \mathrm{Re}\left(U_g(x)\cdot\overline{I_g(x)}\right) \qquad Q_g(x) := \mathrm{Im}\left(U_g(x)\cdot\overline{I_g(x)}\right)$$



Значения активной мощности к началу линии возрастают в обоих случаях, так как вдоль линии имеют место потери активной мощности.

Реактивная мощность в первом случае, когда реактивной нагрузки в конце линии нет, передается к началу линии (отрицательные значения) из-за преобладания зарядной мощности над потерями реактивной мощности. Во втором случае имеет место обратная картина – потери реактивной мощности больше зарядной и потери компенсируются источником реактивной мощности в конце линии.

2.1.4. Упрощенные модели ЛЭП

Для П-образной схемы замещения ЛЭП (рис. 2.6) в п. 2.1.3 было получено

$$\begin{aligned} &\underline{Z} = \underline{Z}_C \operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l), \\ &\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} \operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Величины составляющих комплексного параметра $\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$ для линий сверхвысокого напряжения имеют порядок: $\alpha_0 - 10^{-5}$ и $\beta_0 - 10^{-3}$. Поэтому когда длина линии l невелика, приближенно можно принять

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \approx \underline{\gamma}_0 l, \\ &\operatorname{th} \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2} \approx \frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Следовательно, для параметров П-образной схемы замещения с математической моделью длинной линии получаем:

$$\begin{aligned} &\underline{Z} = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} \cdot l = \underline{z}_0 l = (r_0 + jx_0) l, \\ &\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}}} \frac{\sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0}}{2} l = \frac{\underline{y}_0}{2} = \frac{(g_0 + jb_0)}{2} l. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Подставим в уравнения для П-образной схемы замещения (2.21) полученные значения (2.29)

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}\underline{Y}_2)\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 = \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ &\underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2)\underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_1)\underline{I}_2 = \\ &= \left(\underline{y}_0 l + \frac{\underline{y}_0 l \underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{4}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{z}_0 l \underline{y}_0 l}{2}\right)\underline{I}_2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

или окончательно

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1 = \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}\right)\underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ &\underline{I}_1 = \underline{y}_0 l \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{4}\right)\underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{z}_0 \underline{y}_0 l^2}{2}\right)\underline{I}_2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Полученные уравнения являются упрощенной математической моделью ЛЭП, в которой не учитывается распределенность параметров, а сосредоточенные сопротивления и проводимости вычисляются по (2.29).

Для совсем коротких линий второе слагаемое в выражении $\left(1+\frac{\underline{z}_0\underline{y}_0 l^2}{2}\right)$ является очень маленьким, вследствие того, что проводимость $\underline{y}_0$ имеет порядок 10^{-6} … 10^{-4}. Тогда уравнения (2.31) приобретают еще более простой вид

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{z}_0 l \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{y}_0 l \underline{U}_2 + \underline{I}_2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Такая модель соответствует Г-образной схеме замещения линии, в которой только одна поперечная ветвь $\underline{Y}_1 = \underline{y}_0 l$.

Все математические модели ЛЭП удобно сопоставлять в табличной форме записи параметров четырехполюсника, табл. 2.3. Распределенность параметров в двух последних моделях не учитывается.

В других случаях пренебрегают либо сопротивлениями токоведущих жил линии (активным или реактивным), либо емкостной проводимостью между фазами линии.

Таблица 2.3

Коэффициенты четырехполюсника моделей ЛЭП

Модель	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{C}$	$\underline{D}$
Уравнения длинной линии	$\mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\underline{Z}_C \mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\frac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)$	$\mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l)$
Уравнения идеальной линии	$\cos(\beta_0 l)$	$jZ_C \sin(\beta_0 l)$	$j\frac{1}{Z_C}\sin(\beta_0 l)$	$\cos(\beta_0 l)$
Модель с сосредоточенными параметрами П-образной схемы замещения	$1+\frac{\underline{z}_0\underline{y}_0 l^2}{2}$	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l\left(1+\frac{\underline{z}_0\underline{y}_0 l^2}{4}\right)$	$1+\frac{\underline{z}_0\underline{y}_0 l^2}{2}$
Модель с сосредоточенными параметрами Г-образной схемы замещения	1	$\underline{z}_0 l$	$\underline{y}_0 l$	1

Пример 2. Выполним оценку погрешностей двух упрощенных математических моделей ЛЭП – уравнений идеальной линии и уравнений для П-образной схемы замещения без учета распределенности параметров – для конкретной ЛЭП 500 кВ. Для этого построим зависимости напряжения в начале линии U_1 от длины линии при передаче мощности нагрузки близкой к натуральной мощности линии. Конструкция фазы линии: 3хАС-

400/51. Расчеты и графические построения выполним в системе Mathcad. Приведенные ниже значения параметров линии выражены в омах, сименсах и радианах. Параметры режима ЛЭП даны в киловольтах, килоамперах, мегаваттах и мегаварах.

Длина и погонные параметры линии:

$$L := 500 \qquad r_0 := 0.025 \qquad g_0 := 0.023\cdot 10^{-6} \qquad x_0 := 0.306 \qquad b_0 := 3.62\cdot 10^{-6}$$

$$z_0 := r_0 + j\cdot x_0 \qquad y_0 := g_0 + j\cdot b_0$$

Передаваемая мощность и напряжение в конце линии:

$$P2 := 800 \qquad Q2 := -33.5 \qquad\qquad S2 := P2 + i\cdot Q2 \qquad U2 := 500$$

Расчетные параметры ЛЭП:

$$z0 := r0 + j\cdot x0 \qquad y0 := g0 + j\cdot b0$$

$$Zc := \sqrt{\frac{z0}{y0}} \qquad \gamma := \sqrt{z0\cdot y0}$$

$$Zc = 291.016 - 10.942i \qquad \gamma = 4.63\times 10^{-5} + 1.053i\times 10^{-3}$$

Для идеальной линии:

$$ZC := \mathrm{Re}(Zc) \qquad \beta := \mathrm{Im}(\gamma)$$

$$ZC = 291.016 \qquad \beta = 1.053\times 10^{-3}$$

Определим функции напряжения и тока в начале линии для трех моделей ЛЭП:

$$U_I(x) := \cosh(\gamma\cdot x)\cdot U2 + Zc\cdot \sinh(\gamma\cdot x)\cdot I2$$ Модель длинной линии

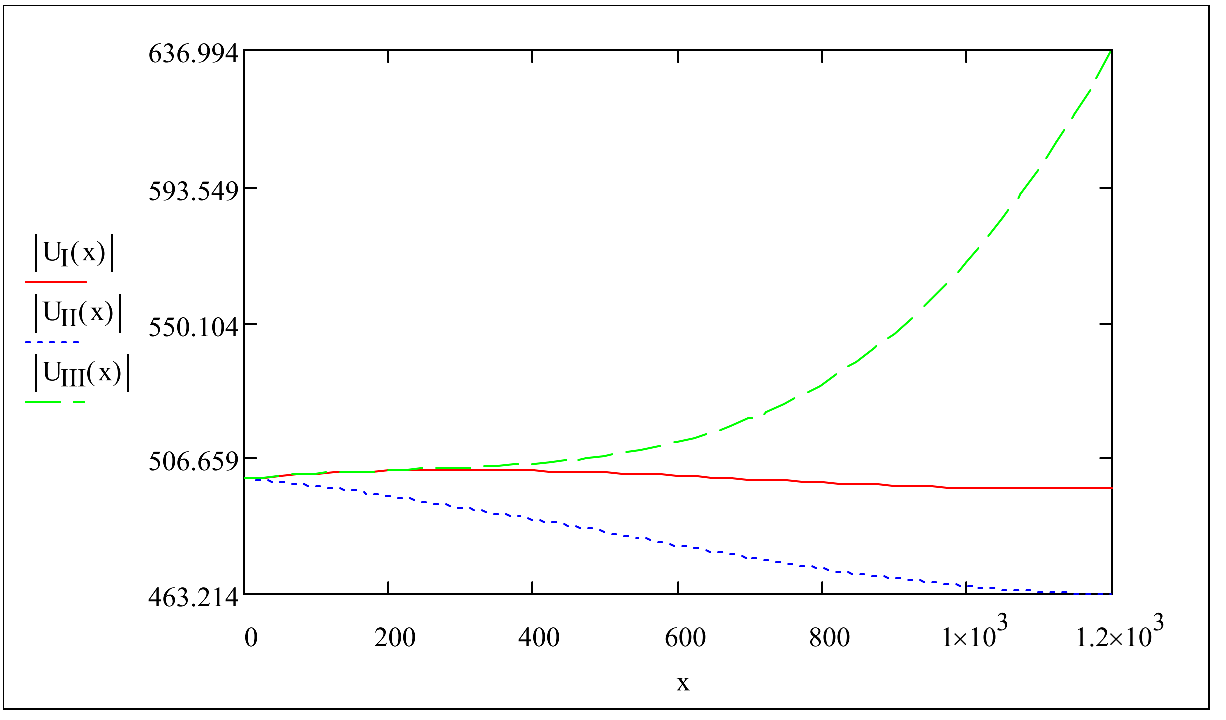
$$U_{II}(x) := \cos(\beta\cdot x)\cdot U2 + j\cdot ZC\cdot \sin(\beta\cdot x)\cdot I2$$ Модель идеальной линии

$$U_{III}(x) := \left(1 + \frac{z0\cdot y0\cdot x^2}{2}\right)\cdot U2 + z0\cdot x\cdot I2$$ Модель линии без учета распределенности параметров

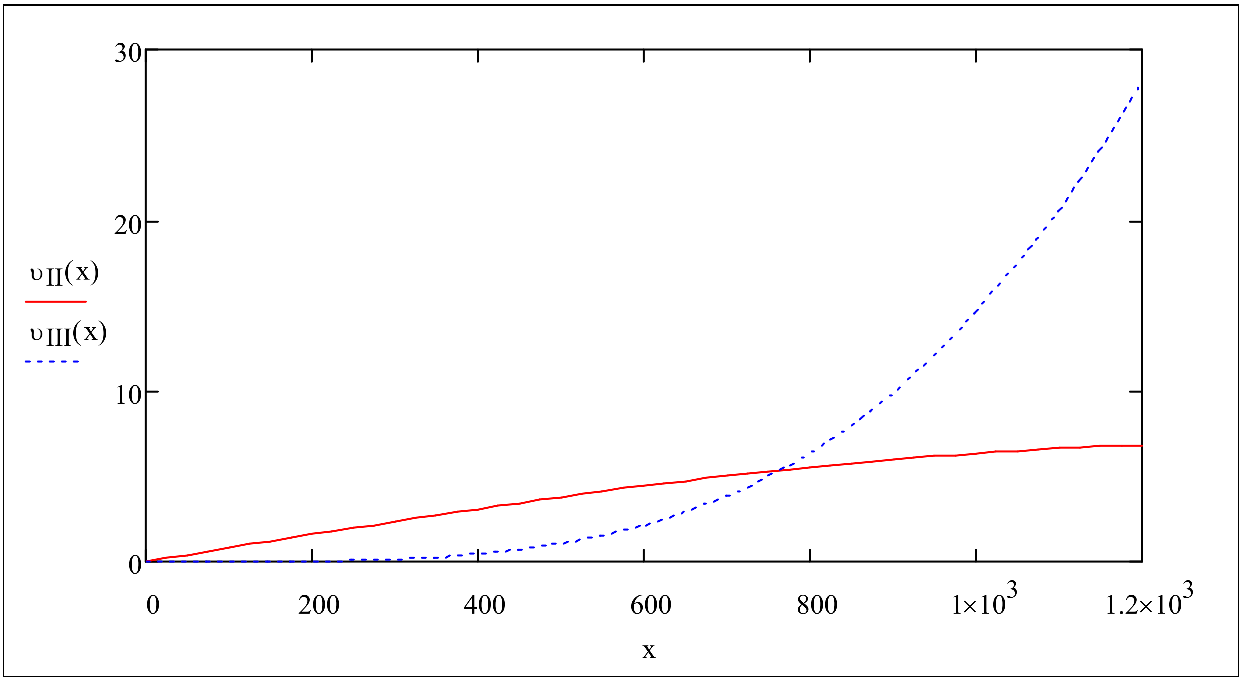
Относительные погрешности напряжения в начале линии

$$\upsilon_{II}(x) := \frac{\left|\left|U_{II}(x)\right| - \left|U_I(x)\right|\right|}{\left|U_I(x)\right|}\cdot 100 \qquad \upsilon_{III}(x) := \frac{\left|\left|U_{III}(x)\right| - \left|U_I(x)\right|\right|}{\left|U_I(x)\right|}\cdot 100$$

Графики напряжений в начале линии



Графики относительных погрешностей напряжения в начале линии для упрощенных математических моделей:



Примем допустимую относительную погрешность в вычислении напряжения – 1%. Из графиков погрешностей видно, что погрешности в определении напряжения в начале линии для модели идеальной линии превышает допустимую уже при 120 км, а по току при 600 км; погрешности для модели без учета распределенности параметров допустима для линий длиной до 500 км.

Аналогичные графики погрешностей можно построить для указанных моделей для тока в начале линии.

2.2. Силовой трансформатор

2.2.1. Конструктивное выполнение и принцип действия силового трансформатора

Трансформатором называют статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной системы переменного тока в другую систему переменного тока. При этом число фаз, форма кривой напряжения (тока) и частота остаются неизменными.

Силовые трансформаторы применяются в системах передачи и распределения электроэнергии; для установок с преобразователями переменного тока в постоянный (выпрямители) или постоянного в переменный (инверторы); для получения требуемых напряжений питания у электроприемников. Силовые трансформаторы устанавливаются на электростанциях, на понижающих подстанциях, в центрах питания потребителей и непосредственно у потребителей электрической энергии.

В электрических сетях используются трехфазные или группы из трех однофазных трансформаторов. Силовые трансформаторы выполняют двухобмоточными и трехобмоточными. Существуют также трехобмоточные автотрансформаторы и двухобмоточные трансформаторы с расщепленной вторичной обмоткой.

Основными элементами силовых трансформаторов являются: магнитопровод, обмотки, изоляция, бак, расширитель и высоковольтные вводы. Другие части – это элементы системы охлаждения, устройства регулирования напряжения, а также защитные и измерительные устройства.

Магнитопровод является магнитной системой силового трансформатора и служит конструктивным основанием для установки и крепления обмоток, отводов от обмоток и других деталей. Магнитопровод выполняется из электротехнической стали.

Обмотки являются частью электрической цепи и состоят их обмоточного провода (медного или алюминиевого) и изоляционных деталей. К обмоткам также относят вводные концы обмоток, ответвления для регулирования напряжения и регулировочную обмотку, емкостные кольца и электростатические экраны емкостной защиты от перенапряжений.

Обмотки состоят из последовательно соединенных катушек, которые могут наматываться непрерывно, т.е. без паек. Между катушками ставятся прокладки из электрокартона. Фазы обмоток одного напряжения соединяются между собой в звезду или треугольник.

В трансформаторах с масляным охлаждением магнитопровод с обмотками помещают в бак с трансформаторным маслом. Омывая обмотки и магнитопровод, трансформаторное масло отбирает от них тепло и, обладая большей теплопроводностью, чем воздух, через стенки радиатора отдает ее в окружающую среду.

Существуют так же сухие трансформаторы.

Вводы предназначены для присоединения к сборным шинам распределительных устройств станций и подстанций. Ввод состоит из токопроводящей части, металлического фланца, служащего для крепления на крышке бака, и фарфорового изолятора.

Для компенсации температурных изменений применяется расширитель, помещенный в верхней части бака трансформатора или отдельным выносным баком.

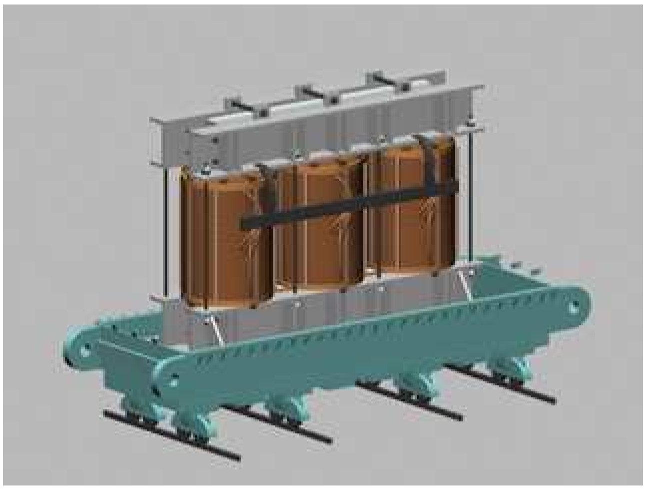


Рис. 2.7. Магнитопровод с обмотками силового трансформатора

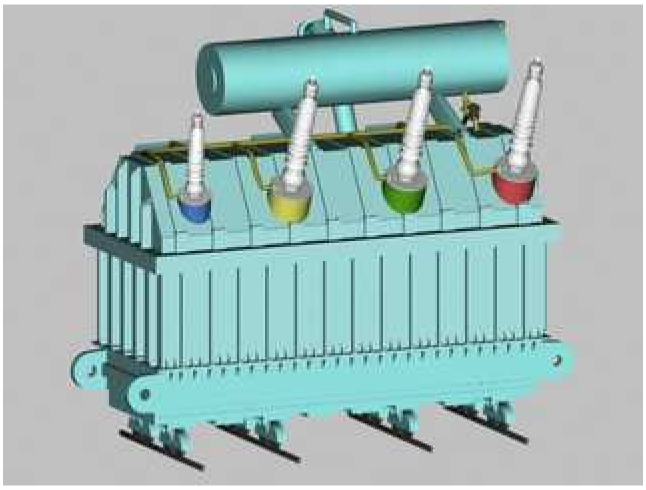


Рис. 2.8. Общий вид силового трансформатора

Принцип действие трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции. При подключении первичной обмотки к источнику переменного тока с напряжением u_1 в витках этой обмотки протекает переменный ток i_1, который создает в магнитопроводе переменный магнитный поток Ф.

Замыкаясь на магнитопроводе, этот поток сцепляется с обеими обмотками (первичной и вторичной) и индуктирует в них ЭДС:

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi}{dt},$$
$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2.33)$$

где w_1 и w_2 – число витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора.

При подключении нагрузки к выводам вторичной обмотки трансформатора под действием ЭДС e_2 в цепи этой обмотки создается ток i_2, а на выводах вторичной обмотки устанавливается напряжение u_2.

Из (2.33) следует, что ЭДС. e_1 и e_2, отличаются друг от друга числом витков обмоток, в которых они наводятся. Поэтому, применяя обмотки с требуемым соотношением витков, можно изготовить трансформатор на любое отношение напряжений.

Обмотку трансформатора, подключенную к сети с более высоким напряжением, называют обмоткой высшего напряжения (ВН); обмотку, присоединенную к сети меньшего напряжения, – обмоткой низшего напряжения (НН).

Трансформаторы обладают свойством обратимости; один и тот же трансформатор можно использовать в качестве повышающего и понижающего. Но обычно трансформатор имеет определенное назначение: либо он является повышающим, либо понижающим.

Трансформатор – это аппарат переменного тока. Если же его первичную обмотку подключить к источнику постоянного тока, то магнитный поток и магнитопроводе трансформатора также будет постоянным как по величине, так и по направлению ($d\Phi/dt = 0$). Поэтому и в обмотках трансформатора не будет наводиться ЭДС.

2.2.2. Электрические и магнитные свойства и параметры силового трансформатора

Основными электрическими элементами силового трансформатора являются обмотки, имеющими электрическое сопротивление. Ток, протекая по этим обмоткам, вызывает нагрев обмотки. Потоки рассеивания обмоток обуславливают собственные индуктивности обмоток. Следовательно, в обмотках трансформатора, по которым протекают токи, имеются активные и индуктивные сопротивления.

Процесс намагничивания активной стали магнитопровода характеризуется кривой намагничивания $B = f(H)$. Эта зависимость является нелинейной: на кривой имеется участок, после которого дальнейший рост напряженности магнитного поля практически не приводит к увеличению индукции в стали. Эта зона характеризует насыщение электротехнической стали. Отношение индукции к напряженности поля в любой точке кривой намагничивания называют магнитной проницаемостью (μ), которая характеризует способность материала к намагничиванию. Зависимость магнитной проницаемости электротехнической стали от индукции является также нелинейной.

Вследствие непрерывного изменения величины и направления намагничивающего тока, протекающего в первичной обмотке трансформатора, в магнитопроводе создается переменный магнитный поток, изменение которого приводит к перемагничиванию электротехнической стали.

Электрическая энергия, затраченная на перемагничивание, преобразуется в тепловую энергию, приводящую к нагреву магнитопровода трансформатора.

Потери в активной части магнитопровода обусловливаются природой процессов намагничивания ферромагнитных материалов и состоят из трех частей: потерь на гистерезис. ($P_{\text{г}}$), потерь на вихревые токи ($P_{\text{в}}$) и потерь на магнитное последействие ($P_{\text{П}}$)

Потери на гистерезис при перемагничивании вызываются затратой энергии на перестройку границ доменов, и направления их самопроизвольной намагниченности в электротехнической стали зависят от ее микроструктуры и параметров внешнего магнитного поля.

Потери на вихревые токи вызываются затратой энергии на нагрев активной стали от вихревых токов, наводимых в ней переменным магнитным потоком. Вихревые токи циркулируют в листах в плоскостях, перпендикулярных направлению магнитного потока, т. е. в плоскостях поперечного сечения магнитопровода.

Величина потерь на вихревые токи пропорциональна квадрату толщины и обратно пропорциональна удельному электрическому сопротивлению активного материала, поэтому с целью уменьшения потерь па вихревые токи магнитопровод набирается из тонких, изолированных друг от друга слоев, толщина которых в основном определяется толщиной электротехнической стали. Слои магнитопровода выполняются из отдельных пластин или лент.

Измеренные потери в стали всегда больше, чем расчетная сумма потерь па гистерезис и на вихревые токи, за счет наличия потерь на магнитное последействие или, как их иногда называют, «дополнительных» потерь. Природа этих потерь в настоящее время недостаточно ясна, и они не поддаются аналитическому расчету. Увеличение общих потерь в стали магнитопровода может быть вызвано также за счет механических воздействий на нее при технологической обработке и несовершенства межлистовой изоляции. Кроме того, потоки рассеивания обмоток частично замыкаются через бак и другие стальные элементы трансформатора, что вызывает дополнительные потери на перемагничивание и вихревые токи. Для снижения этих потерь стальные баки трансформатора экранируют пакетами электротехнической стали или пластинами из немагнитных материалов (меди, алюминия).

Ток намагничивания и ток, вызывающий потери в стали трансформатора также протекают по первичной обмотке. Вследствие нелинейности характеристики намагничивания, ток намагничивания не является синусоидальным – зависимость тока намагничивания от времени является периодической функцией, но с несколько вытянутой по отношению к функции синуса формой кривой. Так как нагрузочный ток обычно в десятки раз больше тока намагничивания, то суммарный ток (намагничивания и нагрузочный) первичной обмотки является практически синусоидальным. В режимах работы трансформатора близких к холостому ходу следует считаться с несинусоидальностью тока трансформатора. Несинусоидальность тока трансформатора сильно увеличивается при возрастании тока намагничивания, что происходит при превышении напряжения, поданного на трансформатор.

2.2.3. Математические модели силового трансформатора

Рассмотрим математические модели силовых трансформаторов, которые применяются в задачах, связанных с расчетом установившихся режимов схем электрических сетей. В таких моделях не учитываются емкостные связи между витками каждой из обмоток, между самими обмотками и обмотками и землей, а также распределенность электрических и магнитных параметров. Кроме того, ограничимся рассмотрением симметричных режимов нагрузки трансформаторов.

Получим математическую модель однофазного двухобмоточного трансформатора. Вначале предположим, что трансформатор не имеет магнитопровода (воздушный трансформатор), тогда он может быть представлен схемой рис 2.6, в которой активные сопротивления обмоток изображены отдельно. Полярности обмоток на схеме отмечены звездочками.

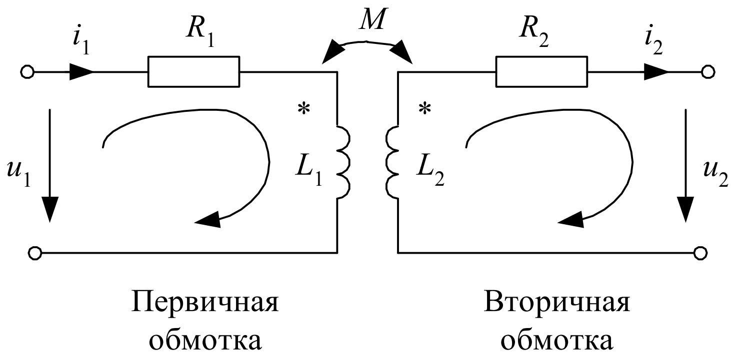


Рис. 2.6. Схема трансформатора без магнитопровода

При обходе контуров на схеме рис. 2.6 в соответствии с заданными направлениями по второму закону Кирхгофа получим уравнения трансформатора в дифференциальной форме

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt},$$
$$-u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \tag{2.34}$$

Так как направления токов на схеме ориентированы не одинаково по отношению к звездочкам, то полярность $M\dfrac{di_1}{dt}$ не совпадает с i_2 и, наоборот, полярность $M\dfrac{di_2}{dt}$ не совпадает с i_1.

При синусоидальных токах и напряжениях уравнения (2.34) в комплексной форме записываются в следующим образом:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2,$$
$$-\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1. \tag{2.35}$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega\left(L_1 - M\right)\underline{I}_1 + j\omega M\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right),$$
$$-\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega\left(L_2 - M\right)\underline{I}_2 - j\omega M\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right). \tag{2.36}$$

Последним уравнениям соответствует схема замещения рис. 2.7. В отличие от рис. 2.6 в схеме замещения первичная и вторичная цепи трансформатора связаны не индуктивно, а гальванически.

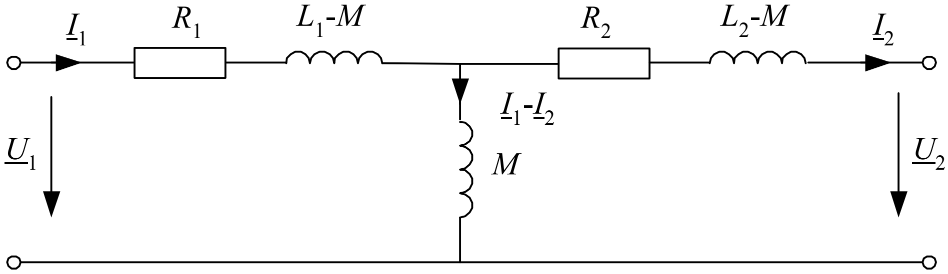


Рис. 2.7. Схема замещения трансформатора без магнитопровода

Входящие в схему рис. 2.7 разности $L_1 - M$ и $L_2 - M$ имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной w_1 и вторичной w_2 обмоток ($w_1 = w_2$). В этом случае они представляют собой индуктивности рассеяния L_{s1} и L_{s2} первичной и вторичной обмоток трансформатора.

В реальных трансформаторах для моделирования потерь в стали в схему замещения трансформатора вводят активную проводимость G_μ. Для моделирования эффекта намагничивания сердечника вводят реактивную проводимость B_μ.

Если взять за основу математической модели трансформатора так называемый идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $n = \dfrac{w_1}{w_2}$, для которого относительная магнитная проницаемость равна бесконечности и ток намагничивания равен нулю, то путем добавления к нему элементов, учитывающих основные паразитные эффекты, можно получить полную схему замещения трансформатора (рис 2.8). Потери энергии в обмотках трансформатора при протекании по ним токов учитываются активными сопротивлениями R_1 и R_2, включенными последовательно с индуктивностями рассеяния, учитывающими эффект запасания энергии и наведения напряжения в обмотках от потоков рассеяния. Этим индуктивностям соответствуют индуктивные сопротивления обмоток X_1 и X_2. Ток намагничивания обусловливает намагничивающую силу, которая создает поток взаимной индукции. Величина тока намагничивания I_μ пропорциональна напряжению первичной обмотки. Параллельно индуктивной проводимости намагничивания B_μ включают активную проводимость G_μ, учитывающую потери в сердечнике.

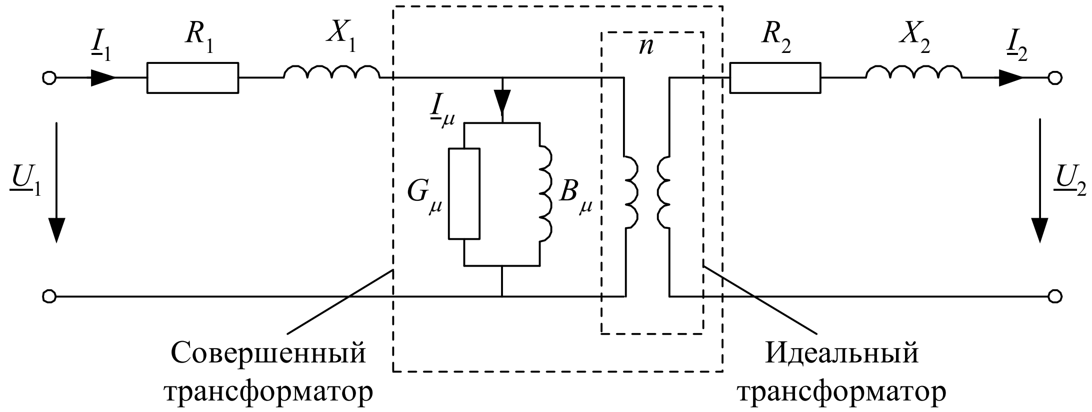


Рис. 2.8. Полная Т-образная схема замещения трансформатора

Таким образом, *идеальным трансформатором* является трансформатор, для которого при любых условиях $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{I_2}{I_1} = n$.

Трансформатор, для которого при любой нагрузке $\frac{U_1}{U_2} = n$, называется *совершенным трансформатором*, см. рис 2.8.

Во многих случаях пользуются приведенной Т-образной схемой замещения трансформатора (рис 2.9). Получается она приведениям сопротивлений вторичной обмотки к напряжению первичной обмотки по соотношениям:

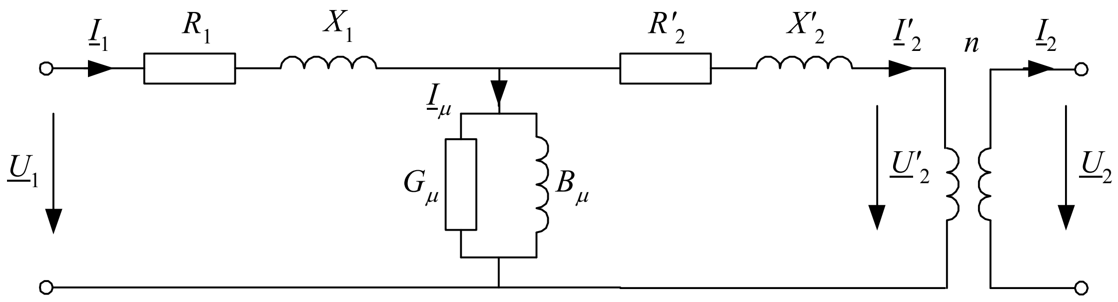


Рис. 2.9. Приведенная Т-образная схема замещения трансформатора

На схеме рис. 2.9 отмечены ток и напряжение:

$$\underline{U}'_2 = n\underline{U}_2, \quad \underline{I}'_2 = \frac{1}{n}\underline{I}_2. \tag{2.37}$$

2.2.4. Г-образная и П-образная схемы замещения силового трансформатора

Обычно для силовых трансформаторов более целесообразна так называемая Г-образная схема замещения, элементы которой имеют простой физический смысл и могут быть вычислены или измерены. Получается она следующим образом.

Ветвь намагничивания переносится на зажимы первичной обмотки и оказывается включенной на напряжение U_1. Это вносит погрешность в математическую модель, так как в действительности ток намагничивания (ток холостого хода) протекает по первичной обмотке. Обычно ток холостого хода силовых трансформаторов меньше одного процента от номинального тока трансформатора и такое упрощение считается допустимым. Сопротивления первичной обмотки оказываются последовательно включенными с приведенными сопротивлениями вторичной обмотки, и при их сложении получаются так называемые сопротивления трансформатора $R_т$ и $X_т$ (рис. 2.10):

$$R_т = R_1 + R'_2, \quad X_т = X_1 + X'_2.$$

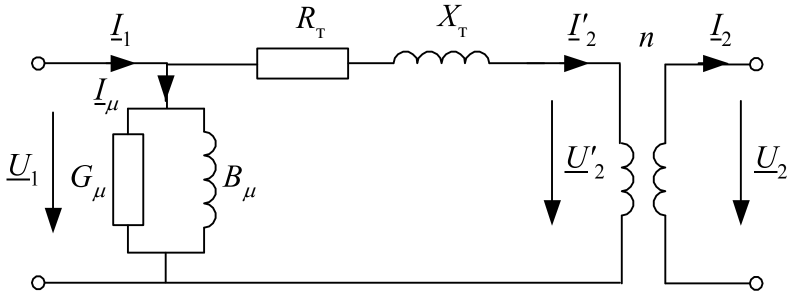


Рис. 2.10. Г-образная схема замещения трансформатора

Полученная схема носит название Г-образной схемы замещения трансформатора и применяется для выполнения расчетов схем электрических сетей, где она еще больше упрощается путем представления ветви холостого хода в виде постоянных величин потерь активной и реактивной мощности на холостой ход (рис 2.11).

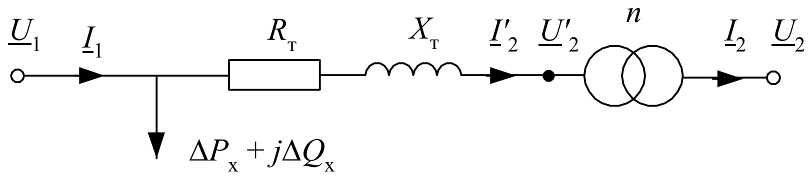


Рис. 2.11. Упрощенная Г-образная схема замещения трансформатора

Все полученное выше для однофазных трансформаторов можно распространить на каждую фазу трехфазного трансформатора.

Сопротивления и проводимости Г-образной схемы замещения трансформатора, приведенные к напряжению обмотки первичного напряжения, определяются по формулам:

$$R_т = \frac{P_к U_{1ном}^2}{S_{ном}^2}; \quad X_т = \frac{U_к U_{1ном}^2}{100 S_{ном}};$$
$$G_\mu = \frac{P_х}{U_{1ном}^2}: \quad B_\mu = \frac{I_х S_{ном}}{100 U_{1ном}^2} = \frac{Q_х}{U_{1ном}^2}. \qquad (2.38)$$

Моделирование элементов схем электрических сетей при использовании специальных программ для расчета их режимов работы удобно выполнять по П-образным схемам замещения. Такую схему замещения можно получить и для трансформатора.

Получим параметры П-образной схемы замещения (рис. 2.5), на основе Г-образной схемы замещения двухобмоточного понижающего трансформатора, с коэффициентом трансформации $n > 1$ (рис. 2.10).

Найдем напряжение и ток первичной обмотки:

$$\underline{U}_1 = n\underline{U}_2 + \Delta\underline{U}_т = n\underline{U}_2 + \left(R_т + jX_т\right)\frac{\underline{I}_2}{n} \qquad (2.39)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_\mu + \frac{\underline{I}_2}{n} = \left(G_\mu - jB_\mu\right)\underline{U}_1 + \frac{\underline{I}_2}{n} \qquad (2.40)$$

После подстановки (2.52) в (2.53) получим

$$\underline{I}_1 = n\left(G_\mu - jB_\mu\right)\underline{U}_2 + \frac{1}{n}\left(\left(R_т + jX_т\right)\left(G_\mu - jB_\mu\right) + 1\right)\underline{I}_2 \qquad (2.41)$$

Сопоставляя полученные выражения (2.39) и (2.41) с уравнениями четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{aligned} \qquad (2.42)$$

и учитывая соотношения между коэффициентами четырехполюсника и параметрами П-образной схемы замещения [см. (2.21)]:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_2, \\ \underline{B} &= \underline{Z}, \\ \underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2, \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_1, \end{aligned} \qquad (2.43)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_2 = n, \\ \underline{B} &= \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_т}{n}, \\ \underline{C} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_1\underline{Z}\underline{Y}_2 + \underline{Y}_2 = n\underline{Y}_\mu, \\ \underline{D} &= 1 + \underline{Z}\underline{Y}_1 = \frac{1}{n}\left(1 + \underline{Z}_т\underline{Y}_\mu\right). \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Из полученных соотношений можно найти параметры П-образной схемы замещения трансформатора:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Z}_т}, \\ \underline{Y}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_т}(1 - n) + \underline{Y}_\mu, \\ \underline{Y}_2 &= \frac{n}{\underline{Z}_т}\left(n - 1\right). \end{aligned} \qquad (2.45)$$

П-образная схема замещения трансформатора в отличии от П-образной схемы замещения ЛЭП является несимметричной, т. е. $\underline{Y}_1 \neq \underline{Y}_2$.

2.2.5. Построение внешней характеристики трансформатора

Внешней характеристикой трансформатора называют зависимость изменения вторичного напряжения U_2 от тока нагрузки I_2 при постоянном коэффициенте мощности приемника cosφ = const и номинальном первичном напряжении $U_1 = U_{ном}$. Сопоставляя внешние характеристики, полученные для различных математических моделей трансформатора с экспериментально полученной характеристикой трансформатора, можно оценить величину погрешности различных моделей и определить, таким образом, область их использования.

Выполним построение внешней характеристики силового трансформатора по его математической модели при изменении тока вторичной обмотки от нуля до $I_{ном}$ для трех различных коэффициентов мощности: 0,8; 0,9 и 1,0.

Внешнюю характеристику $U_2 = f(I_2)$ построим по уравнению

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \sqrt{3}\underline{B}\underline{I}_2 \qquad (2.46)$$

Примем $\underline{U}_1 = U_1$ = const (совместим с вещественной осью), тогда векторная диаграмма токов и напряжений трансформатора будет иметь вид как на рис. 2.12.

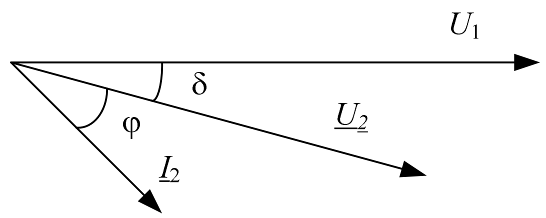


Рис. 2.12. Векторная диаграмма токов и напряжений 1

Выразим из (2.46) напряжение $\underline{U}_2$:

$$\underline{U}_2 = \frac{U_1 - \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{A}} \qquad (2.47)$$

Здесь ток $\underline{I}_2$ имеет угол сдвига относительно вещественной оси –(δ + φ), а напряжение вторичной обмотки представлено в комплексном виде: $|\underline{U}2|$ и δ, где δ входит в левую часть уравнения: $\underline{U}_2 = U_2 e^{-j\delta}$ и в правую: $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j(\varphi + \delta)}$.

Чтобы получить зависимость величины (модуля) U_2 от величины (модуля) I_2 необходимо перейти к уравнениям с вещественными переменными. Для удобства примем совмещенным с действительной осью вектор $\underline{U}_2$, тогда векторная диаграмма токов и напряжений примет вид, рис. 2.13.

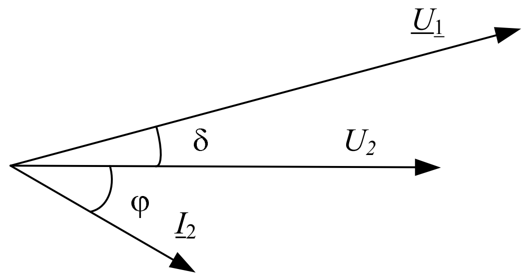


Рис. 2.13. Векторная диаграмма токов и напряжений 2

и напряжение U_2:

$$U_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{A}}, \tag{2.48}$$

где $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\delta}$; $\underline{I}_2 = I_2 e^{-j\varphi}$.

Разделим уравнение (2.48) на два уравнения с вещественными переменными. С учетом $\underline{A} = A = n$ и $\underline{B} = B' + jB''$, будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A}\left[U_1' - \sqrt{3}\left(B'I_2' + B''I_2'\right)\right], \\ 0 &= \frac{1}{A}\left[U_1'' - \sqrt{3}\left(B''I_2' - B'I_2''\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Так, как $I_2' = I_2\cos\varphi$, $I_2'' = I_2\sin\varphi$ и $U_1\sqrt{U_1'^2 + U_1''^2}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{A}\left[U_1' - \sqrt{3}\left(B'I_2\cos\varphi + B''I_2\sin\varphi\right)\right], \\ 0 &= \frac{1}{A}\left[U_1'' - \sqrt{3}\left(B''I_2\cos\varphi - B'I_2\sin\varphi\right)\right], \\ U_1^2 &= U'^2 + U''^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

с неизвестными U_2, U_1' и U_1''.

Изменяя ток I_2 в пределах от нуля до $I_{2ном}$ будем искать решение системы уравнений (2.50) для каждого значения I_2 и строить зависимость $U_2 = f(I_2)$.

В Mathcad имеется возможность определения функции как решения системы уравнений. Для этого выражение с Find имеет вид определения функции: f(x) := Find(x) и далее в документе Mathcad $f(x)$ становится определенной и является функцией аргумента x.

В нашем случае аргументами функции с Find будет U_2 (по условию с углом равным нулю) и cosφ, который также будет различным для разных выходных характеристик.

Пример 1

Определение функции как решения системы уравнений.

Для удобства записи введем еще две переменных $I'_2 = I_2\cos\varphi$ и $I''_2 = I_2\sin\varphi$.

Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

$$\text{Given}$$

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3}\cdot\frac{\left(\mathrm{Re}(B)\cdot I'_2 + \mathrm{Im}(B)\cdot I''_2\right)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3}\cdot\left(\mathrm{Im}(B)\cdot I'_2 - \mathrm{Re}(B)\cdot I''_2\right)$$

$$U_1^2 = U'^2_1 + U''^2_1$$

$$I'_2 = I\cdot \mathrm{cosf}$$

$$I''_2 = I\cdot\sqrt{1-\mathrm{cosf}^2}$$

Функция как решение системы уравнений:

$$F(I,\mathrm{cosf}) := \mathrm{Find}\left(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2\right)$$

Здесь функция F является вектор-функцией, т.е. содержит пять элементов (по числу неизвестных). Первый элемент дает функцию U_2, второй – U'_1 и т.д. Нас интересует только первый элемент: функция U_2 от I_2 и cosφ. Если переменная ORIGIN в Mathcad имеет заданное по умолчанию значение 0, то наша функция будет использоваться в виде: $F(I_2,\cos\varphi)_0$. Так, например, для cosφ = 0,8 выходная характеристика будет строиться по функции $F(I_2,0.8)_0$ при изменении тока от 0 до $I_{\text{ном}}$.

Пример 2

Построить внешнюю характеристику силового трансформатора ТРДЦН-63000/110 по его математической модели – Г-образной схеме замещения.

Расчеты и построение характеристики выполним в Mathcad. Напряжения в киловольтах, мощности в кВА, токи в килоамперах, сопротивления в омах, проводимости в сименсах.

Параметры трансформатора:

$$U_{1nom} := 115 \quad U_{2nom} := 10.5 \quad S_{nom} := 63000 \quad P_x := 59.0 \quad Q_x := 410$$

$$R := 0.8 \quad X := 22$$

Номинальный ток, коэффициент трансформации и параметры ветви намагничивания:

$$I_{2nom} := \frac{S_{nom}}{\sqrt{3}\cdot U_{2nom}}\cdot 10^{-3} \quad n := \frac{U_{1nom}}{U_{2nom}} \quad G_\mu := \frac{P_x}{U_{1nom}^2}\cdot 10^{-3} \quad B_\mu := \frac{Q_x}{U_{1nom}^2}\cdot 10^{-3}$$

$$I_{2nom} = 3.464 \quad n = 10.952 \quad G_\mu = 4.461\times 10^{-6} \quad B_\mu = 3.1\times 10^{-5}$$

Коэффициенты <u>A</u> и <u>B</u> четырехполюсника:

$$A := n \qquad B := \frac{R + j \cdot X}{n} \qquad B = 0.073 + 2.009i$$

Условия построения характеристики:

$$U_1 := U_{1nom} \qquad I := 0, 0.1 \cdot I_{2nom} .. I_{2nom}$$

Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \qquad U'_1 := U_1 \qquad U''_1 := 0 \qquad I'_2 := 0 \qquad I''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

Given

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{\left(Re(B) \cdot I'_2 + Im(B) \cdot I''_2\right)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot \left(Im(B) \cdot I'_2 - Re(B) \cdot I''_2\right)$$

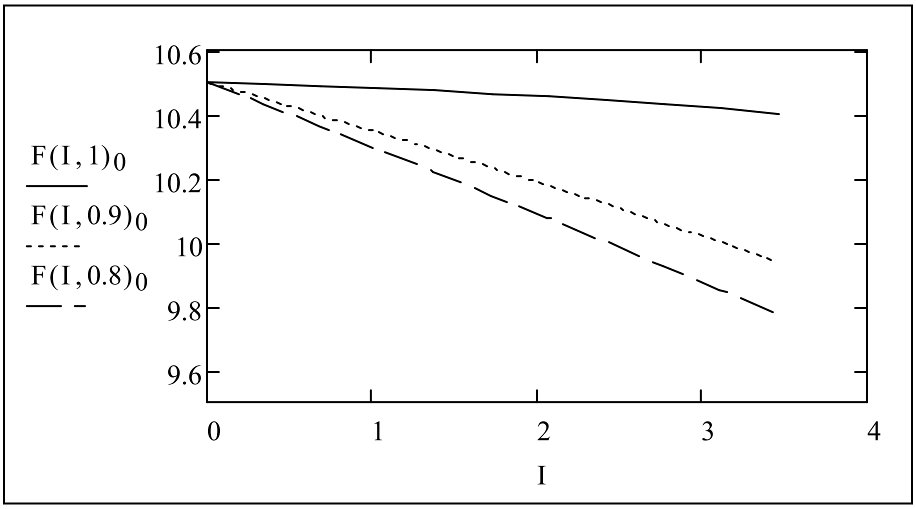
$$U_1^2 = U'^2_1 + U''^2_1$$

$$I'_2 = I \cdot cosf$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - cosf^2}$$

$$F(I, cosf) := Find\left(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2\right)$$

Внешние характеристики для трех значений коэффициента мощности: 1; 0,9 и 0,8:



Снижение напряжения на вторичной обмотке с ростом тока нагрузки вызвано потерей напряжения в сопротивлениях обмоток трансформатора. Для того чтобы не допустить снижения напряжения у потребителей электроэнергии в силовых трансформаторах предусмотрено специальное устройство – регулятор напряжения, который при росте тока нагрузки изменяет коэффициент трансформации таким образом, чтобы обеспечить необходимое напряжение на шинах вторичного напряжения трансформатора.

Получим внешнюю характеристику трансформатора по его упрощенной модели, в которой не учитываются активные параметры: $R_т = 0$ и $G_μ = 0$, и сопоставим полученные характеристики с характеристиками, полученными по полной модели.

Коэффициенты <u>*A*</u> и <u>*B*</u> четырехполюсника для упрощенной модели:

$$A := n \qquad B := \frac{j \cdot X}{n} \qquad B = 2.009i$$

Начальные приближения:

$$U_2 := \frac{U_1}{n} \quad U'_1 := U_1 \quad U''_1 := 0 \quad I'_2 := 0 \quad I''_2 := 0$$

Решающий блок Mathcad:

$$U_2 = \frac{U'_1}{A} - \sqrt{3} \cdot \frac{\left(\mathrm{Re}(B) \cdot I'_2 + \mathrm{Im}(B) \cdot I''_2\right)}{A}$$

$$0 = U''_1 - \sqrt{3} \cdot \left(\mathrm{Im}(B) \cdot I'_2 - \mathrm{Re}(B) \cdot I''_2\right)$$

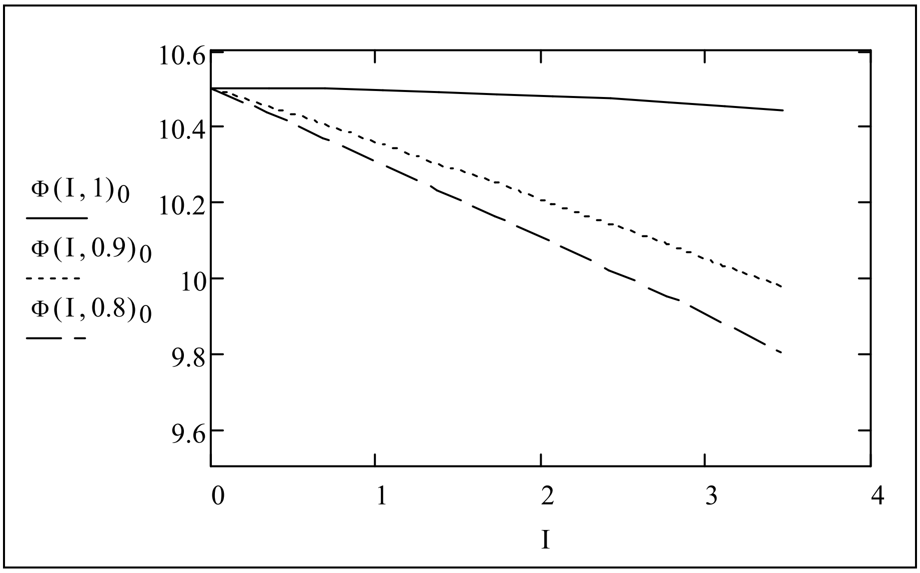
$$U_1^{\,2} = U'^{\,2}_1 + U''^{\,2}_1$$

$$I'_2 = I \cdot \mathrm{cosf}$$

$$I''_2 = I \cdot \sqrt{1 - \mathrm{cosf}^2}$$

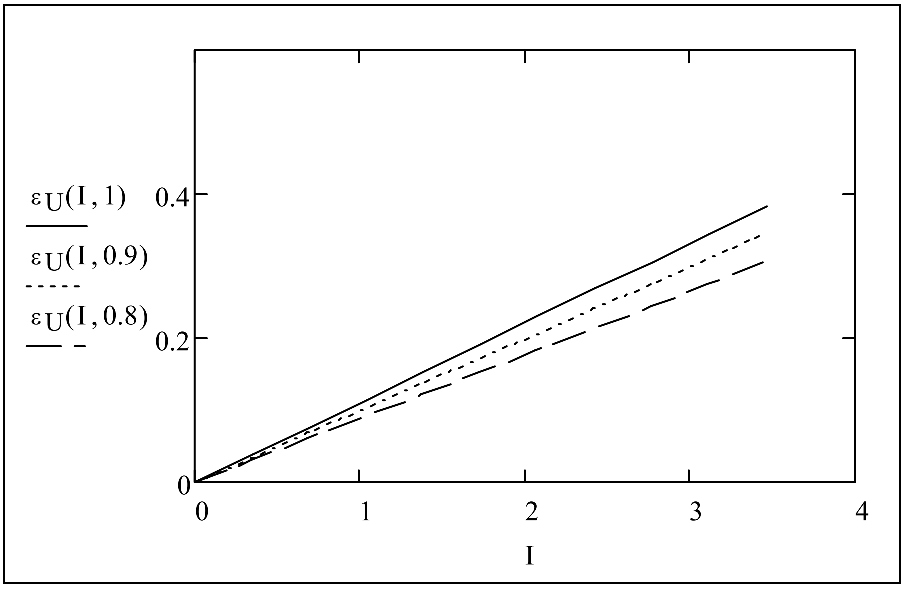
$$\Phi(I, \mathrm{cosf}) := \mathrm{Find}\left(U_2, U'_1, U''_1, I'_2, I''_2\right)$$

Внешние характеристики для трех значений коэффициента мощности: 1; 0,9 и 0,8:



Вычислим и построим функции погрешностей внешних характеристик упрощенной модели:

$$\varepsilon_U(I, \mathrm{cosf}) := \frac{\left|F(I, \mathrm{cosf})_0 - \Phi(I, \mathrm{cosf})_0\right|}{\left|F(I, \mathrm{cosf})_0\right|} \cdot 100$$



Из последнего рис. видно, что погрешности характеристик упрощенной модели не превышают 0,4 %. Такая погрешность вполне допустима во многих задачах расчета установившихся режимов и токов короткого замыкания в электрических системах и поэтому иногда активным сопротивлением обмоток трансформатора и потерями в стали пренебрегают. Следует, однако, заметить, что для трансформаторов малой мощности такая картина не сохраняется и применение упрощенной модели становится более ограниченным.

2.3. Электрическая нагрузка

2.3.1. Статические характеристики электрической нагрузки

Процесс потребления электрической энергии потребителями отождествляется с понятием электрической нагрузки, которая характеризуется мощностью и энергией. Нагрузкой может быть один электроприемник, группа однотипных электроприемников или совокупность различных электроприемников – смешанная нагрузка.

К основным электроприемникам в электрической системе относятся:

- асинхронные двигатели,
- синхронные двигатели,
- лампы накаливания,
- люминесцентные лампы,
- печи сопротивления.
- дуговые печи.

Существует также большое число устройств и бытовых приборов, в которых сочетаются различные по типу электроприемники.

В задачах анализа установившихся режимов электрических систем необходима величина активной и реактивной мощности нагрузки. Физическая природа потребления энергии электрической нагрузкой такова, что ее активная и реактивная мощности зависят от подведенного напряжения и частоты в электрической системе. Такие зависимости носят название статических характеристик нагрузок по частоте и по напряжению. Разные типы электрических нагрузок имеют различные статические характеристики. В совокупности различных типов электроприемников рассматриваются статические характеристики смешанной нагрузки.

Статические характеристики используются при регулировании частоты и напряжения в ЭЭС. В общем они записываются как: $P = \varphi(f, U), Q = \psi(f, U)$.

Здесь мы будем рассматривать зависимости мощности нагрузки только от напряжения – статические характеристики нагрузки по напряжению $P(U)$ и $Q(U)$. При этом будем считать частоту в ЭЭС неизменной величиной. По статическим характеристикам, построенным в относительных номинальных единицах, могу быть определены регулирующие эффекты нагрузки – как производные $\frac{\partial P}{\partial U}, \frac{\partial Q}{\partial U}$ в какой либо рабочей точке характеристики, например при $U = U_{ном}$.

Регулирующий эффект показывает степень снижения активной и реактивной нагрузки при изменении напряжения. Чем больше регулирующий эффект, тем сильнее изменяется мощность, потребляемая нагрузкой при изменении напряжения или частоты.

Для различных электроприемников и их сочетаний статические характеристики получаются разными и зависящими от их рабочих режимов. Практически приходится пользоваться статическими характеристиками, полученными экспериментально. В некоторых случаях их удается получить расчетным путем.

Статические характеристики изображают в координатах относительных величин – активной и реактивной мощности от частоты и напряжения, рис.2.14.

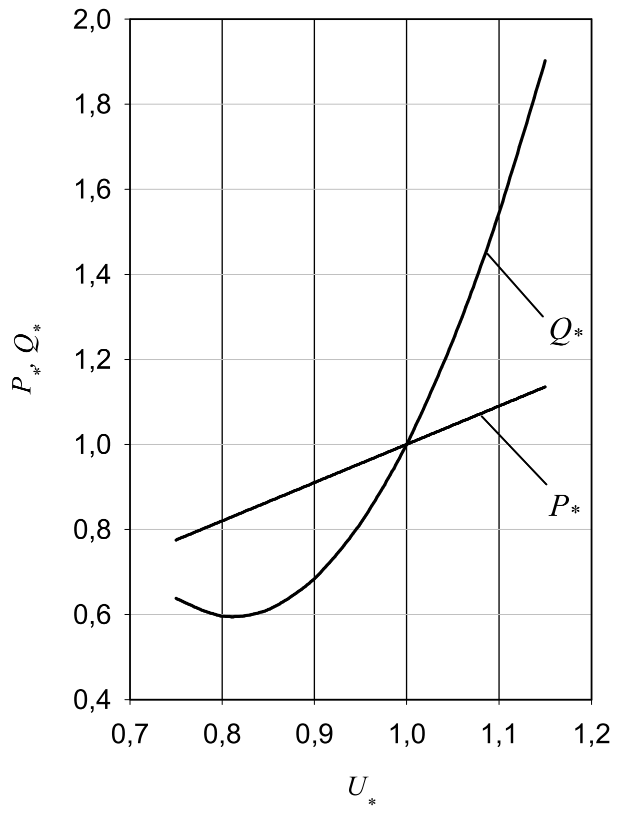


Рис. 2.14 Средние статические нагрузки по напряжению для смешанной нагрузки

На рис.2.14 относительная величина напряжения $U_* = U\ /\ U_{ном}$, а относительные мощности определяются по отношению к номинальной или какой либо выбранной величине мощности нагрузки: $P_* = P\ /\ P_{ном}$, $Q_* = Q\ /\ Q_{ном}$.

Следует отметить, что в ЭЭС и конкретно у потребителей устанавливаются специальные автоматические регулирующие устройства, которые компенсируют изменение напряжения на электроприемниках, что в значительной мере снижает регулирующие эффекты нагрузки. В простейшем случае это стабилизаторы напряжения, а в высоковольтных сетях – мощные регулируемые компенсирующие устройства реактивной мощности и регуляторы напряжения силовых трансформаторов. Рассмотрим статические характеристики отдельных видов нагрузки.

Асинхронные двигатели. Принцип действия асинхронного двигателя основан на явлении электромагнитной индукции. В неподвижную трехфазную обмотку статора асинхронного двигателя подается переменный ток, который формирует в статоре вращающееся магнитное поле. Это поле пересекает проводники замкнутой обмотки ротора и наводит в них ЭДС, под действием которых по обмотке ротора будет протекать ток. Взаимодействие этого тока с полем статора создает на проводниках обмотки ротора электромагнитные силы – вращающий момент, направление которого определяется по правилу «левой руки». Эти силы увлекают ротор в сторону вращения магнитного потока. Скорость вращения ротора всегда меньше скорости вращения магнитного поля статора. Если предположить, что в какой-то момент времени частота вращения ротора оказалась равной частоте вращения поля статора, то проводники обмотки ротора не будут пересекать магнитное поле статора и тока в роторе не будет. В этом случае вращающийся момент станет равным нулю, и частота вращения ротора уменьшится по сравнению с частотой вращения поля статора, пока не возникнет вращающейся момент, уравновешивающий момент нагрузки на валу двигателя и момента сил трения в подшипниках.

Асинхронные двигатели имеют различные статические характеристики. Активная мощность двигателей в сильной мере зависит от характеристик машин, приводимых во вращение двигателями. Реактивная мощность имеет разную зависимость от напряжения в зависимости от номинальной мощности двигателя. Маломощные двигатели имеют более крутые характеристики по сравнению с мощными двигателями.

Реактивная мощность, потребляемая асинхронными двигателями, складывается из намагничивающей мощности, связанной с намагничивающим током, и мощности рассеяния, связанной с созданием полей рассеяния в статоре и роторе. При снижении напряжения реактивная мощность рассеяния растет, а намагничивающая мощность снижается. Суммарная мощность вначале снижается, а затем вновь начинает расти. При определенном напряжении, называемом критическим, двигатель останавливается и его дальнейшая работа становиться невозможной.

Синхронные двигатели. Вращающееся магнитное поле статора синхронной машины увлекает за собой ротор, который является электромагнитом – индуктором. Разноименные полюса магнитного поля статора и ротора притягиваются и ротор вращается с постоянной скоростью. Для того, чтобы ротор стал электромагнитом на него подается постоянный ток – ток возбуждения. Этот ток при вращении ротора вызывает магнитное поле в статоре – реакцию якоря. В зависимости от величины тока возбуждения синхронный двигатель может работать в режиме перевозбуждения или недовозбуждения. Режим перевозбуждения – это нормальный режим работы двигателя. Мощные синхронные двигатели изготавливают с номинальным коэффициентом мощности 0,9 и 0,8 при работе с перевозбуждением.

В режиме перевозбуждения синхронный двигатель выдает реактивную мощность, т.е. имеет емкостной характер реактивной мощности по отношению к сети. При недовозбуждении синхронный двигатель имеет реактивную мощность индуктивного характера, но вследствие ограничений по устойчивости работы и перегреву лобовых частей машины максимально возможная потребляемая реактивная мощность не превышает 30 % от номинальной реактивной мощности при перевозбуждении.

Синхронные двигатели используются как источники реактивной мощности в ЭЭС и применяются для регулирования напряжения. Ток возбуждения синхронных машин изменяется в соответствии с законом регулирования напряжения в сети, поэтому статические характеристики синхронного двигателя по реактивной мощности зависят от закона регулирования напряжения в узле нагрузки, к которому он присоединен. В целом синхронные двигатели имеют положительный регулирующий эффект как по активной, так и по реактивной мощности.

Осветительная нагрузка. Установки электрического освещения с лампами накаливания, люминесцентными, дуговыми ртутными, натриевыми, ксеноновыми применяются на всех предприятиях для внутреннего и наружного освещения, для бытовых потребителей, нужд городского освещения и т.д.

Лампы накаливания излучают свет за счет свечения нити накаливания при большой температуре. При этом значительная часть потребляемой лампами накаливания энергии тратится на превращение в тепловую энергию. Если считать сопротивление R нити накаливания неизменным, а индуктивным сопротивлением пренебречь, то активная мощность лампы будет пропорциональна квадрату подведенного напряжения:

$$P(U) = \frac{U^2}{R}. \tag{2.51}$$

Однако, с изменением тока, протекающего по нити накаливания, ее температура и сопротивление меняются: с увеличением тока растет температура и увеличивается сопротивление нити, и наоборот, при снижении напряжения нить остывает и сопротивление снижается.

Экспериментально установлено, что потребляемая лампами накаливания мощность пропорциональна напряжению в степени 1,5–1,6. Реактивная мощность лампами накаливания практически не потребляется.

Люминесцентные лампы менее чувствительны к отклонениям напряжения. При повышении напряжения потребляемая мощность и световой поток увеличиваются, а при снижении – уменьшаются, но не в такой степени как у ламп накаливания. Однако, при снижении напряжения на люминесцентных лампах до величины $0{,}9U_{\text{ном}}$ они начинают мерцать, а при величине напряжения $0{,}8U_{\text{ном}}$ просто не загораются. Регулирующий эффект люминесцентных ламп по схеме с расщепленной фазой равен примерно 1,9 для активной мощности, а для реактивной мощности может быть оценен величиной 1,5.

Печи сопротивления имеют характеристики схожие с характеристиками ламп накаливания.

Дуговые печи представляют собой сложную и тяжелую нагрузку для энергосети – это крупный, несимметричный и в высокой степени нестабильный потребитель по реактивной мощности. Флуктуации реактивной мощности, особенно выраженные на стадии расплава, приводят к падениям напряжения уменьшающим активную мощность поступающую к электропечи и другим электрическим нагрузкам подсоединенным к тем же шинам распределительного устройства. Активная мощность, потребляемая печью, меняется пропорционально квадрату напряжения.

Компенсирующие устройства типа индуктивности и емкости имеют квадратичные зависимости реактивной мощности от напряжения (если их реактивные сопротивления постоянны). Емкостная нагрузка имеет отрицательный регулирующий эффект.

Большинство компенсирующих устройств в настоящее время выпускаются с регулирующими устройствами, т.е. при изменении напряжения на шинах, где подключены компенсирующие устройства, последние изменяют свою мощность в соответствие с законом регулирования. Чаще всего компенсирующие устройства стабилизируют напряжение, т.е. поддерживают его на заданном уровне, что эквивалентно положительному регулирующему эффекту.

2.3.2. Моделирование электрических нагрузок

Статические характеристики для каждого типа электрической нагрузки и их совокупностей могут быть получены экспериментально. Однако в каждом конкретном случае это затруднительно и чаще всего пользуются так называемыми типовыми характеристиками. Так, например, можно выделить статические характеристики асинхронных двигателей малой, средней и большой мощности или статические характеристики определенного состава смешанной нагрузки. Полученные по таким нагрузкам статические характеристики обобщаются и представляются в виде математических моделей. В общем случае статические характеристики нагрузки по напряжению могут быть представлены в виде:

$$P(U) = P_0 P_*(U) = P_0\left[a_P\left(\frac{U}{U_{\text{ном}}}\right)^2 + b_P\left(\frac{U}{U_{\text{ном}}}\right) + c_P\right];$$
$$Q(U) = Q_0 Q_*(U) = Q_0\left[a_Q\left(\frac{U}{U_{\text{ном}}}\right)^2 + b_Q\left(\frac{U}{U_{\text{ном}}}\right) + c_Q\right]. \qquad (2.52)$$

где P_0 и Q_0 – активная и реактивная мощности нагрузки при номинальном напряжении; $P_*(U)$ и $Q_*(U)$ – статические характеристики нагрузок в относительных единицах; $U_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение нагрузки или сети; a_P, a_Q, b_P, b_Q, c_P и c_Q – коэффициенты (параметры) моделей, полученные в результате обработки экспериментальных данных.

Средние статические характеристики примерно соответствуют следующему составу нагрузки, %:

Крупные асинхронные двигатели	15
Мелкие асинхронные двигатели	35
Крупные синхронные двигатели	9
Печи и ртутные выпрямители	11
Освещение и бытовая нагрузка	22
Потери в сетях	8

Обычно принимается $a_P = 0$, т.е. линейная зависимость активной нагрузки от напряжения. Коэффициенты b_P и c_P в зависимости от характеристики узла нагрузки приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения коэффициентов b_P и c_P

Характер нагрузки	Статические характеристики					
	пологие		средние		крутые	
	b_P	c_P	b_P	c_P	b_P	c_P
Преобладают крупные промышленные предприятия	0,3	0,7	0,6	0,4	0,9	0,1
В среднем	0,4	0,6	0,9	0,1	1,4	–0,4
Крупных промышленных предприятий нет	0,9	0,1	1,2	–0,2	1,5	–0,5

Коэффициенты a_Q, b_Q и c_Q в зависимости от коэффициента мощности приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значения коэффициентов a_Q, b_Q и c_Q

Коэффициент мощности	Статические характеристики								
	пологие			средние			крутые		
	a_Q	b_Q	c_Q	a_Q	b_Q	c_Q	a_Q	b_Q	c_Q
0,83…0,87	10	–18	9	9,6	–15,3	6,7	10	–14,4	5,4
0,88…0,90	11,9	–21,8	10,9	11,4	–18,5	8,1	11,9	–17,4	6,5
0,91…0,93	14,1	–26,2	13,1	13,5	–22,2	9,7	14,1	–21	7,9

Моделирование электрических нагрузок статическими характеристиками по напряжению в расчетах установившихся режимов считается наиболее точным способом учета потребляемой мощности нагрузки. Однако, для получение действительных статических характеристик требуются экспериментальные исследования, а для подбора типовых статических характеристик должен быть известен состав нагрузки, который может сильно изменяться во времени. Кроме того, в этом случае в расчетах обязательно следует учитывать действие регуляторов напряжения, что сильно усложняет подготовку данных и требует знание законов регулирования.

Поэтому в большинстве случаев пользуются самой простой моделью нагрузки – постоянными значениями активной и реактивной мощности: P = const, Q = const.

В некоторых задачах, в которых выполняются расчеты установившихся режимов, токов короткого замыкания в электрической сети или расчеты устойчивости ЭЭС, нагрузки принято представлять схемами замещения. Такое представление является точным в том случае, если для нагрузки известны ее статические характеристики и величина подведенного напряжения. В других случаях такие модели являются приближенными.

Рассмотрим электрическую цепь, в которой имеется нагрузка, представленная в виде сопротивления $\underline{Z}_{\text{н}}$. Это сопротивление в общем случае является переменной величиной – получается нелинейная электрическая цепь. Даже если считать мощность, потребляемую нагрузкой постоянной, сопротивление будет меняться в зависимости от напряжения по формуле:

$$\underline{Z}_{\text{н}} = \frac{U_{\text{н}}^2}{\underline{S}_{\text{н}}^*} \tag{2.53}$$

Кроме того, мощность также зависит от напряжения по статической характеристике и поэтому

$$\underline{Z}_{\text{н}} = \frac{U_{\text{н}}^2}{P_{\text{н}}(U_{\text{н}}) - jQ_{\text{н}}(U_{\text{н}})} \tag{2.54}$$

Нагрузка может быть представлена в виде двух схем замещения – с последовательным и параллельным соединением элементов, рис. 2.15.

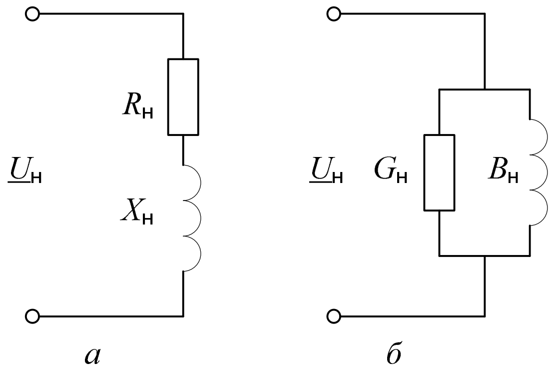


Рис. 2.15. Схемы замещения нагрузки

При последовательном соединении:

$$\underline{Z}_н = \frac{U_н^2}{\overset{*}{\underline{S}}_н} = \frac{U_н^2}{S_н}\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = R_н + jX_н, \qquad (2.55)$$

а при параллельном:

$$\underline{Y}_н = \frac{\overset{*}{\underline{S}}_н}{U_н^2} = \frac{S_н}{U_н^2}\left(\cos\varphi - j\sin\varphi\right) = G_н - jB_н. \qquad (2.56)$$

При постоянной величине заданного сопротивления или проводимости моделирование с помощью выражений (2.55) и (2.56), дает характеристики:

$$P_н(U_н) = \frac{S_н^2}{U_н^2}R_н, \quad Q_н(U_н) = \frac{S_н^2}{U_н^2}X_н, \quad P_н(U_н) = U_н^2 G_н, \quad Q_н(U_н) = U_н^2 B_н. \quad (2.57)$$

Моделирование постоянным сопротивлением дает обратную квадратичную зависимость от напряжения, а постоянной проводимостью – зависимость пропорционально квадрату напряжения. Вторая модель хорошо согласуется с моделью статической характеристики реактивной мощности нагрузки (2.52), поэтому для реактивной мощности вполне приемлема. Для активной мощности можно, например, воспользоваться линейной моделью, тогда будем иметь:

$$P_н(U_н) = U_н U_{ном} G_н, \quad Q_н(U_н) = U_н^2 B_н, \qquad (2.58)$$

где $G_н$ и $B_н$ вычислены при номинальном напряжении нагрузки.

На рис. 2.16 представлены действительные статические характеристики нагрузки – сплошные линии – и характеристики, полученные по моделям (2.58) – пунктирные линии.

Иногда в качестве данных по нагрузке бывают известны измеренные токи нагрузки. Принимая какое либо значение коэффициента мощности нагрузки, ее можно моделировать постоянными значениями токов $I_н$:

$$P_н(U_н) = \sqrt{3} U_н I_н \cos\varphi;$$
$$Q_н(U_н) = \sqrt{3} U_н I_н \sin\varphi, \quad (2.59)$$

что дает линейные статические характеристики как активной, так и реактивной мощности. Такие модели нагрузки используются в низковольтных сетях и сетях среднего напряжения.

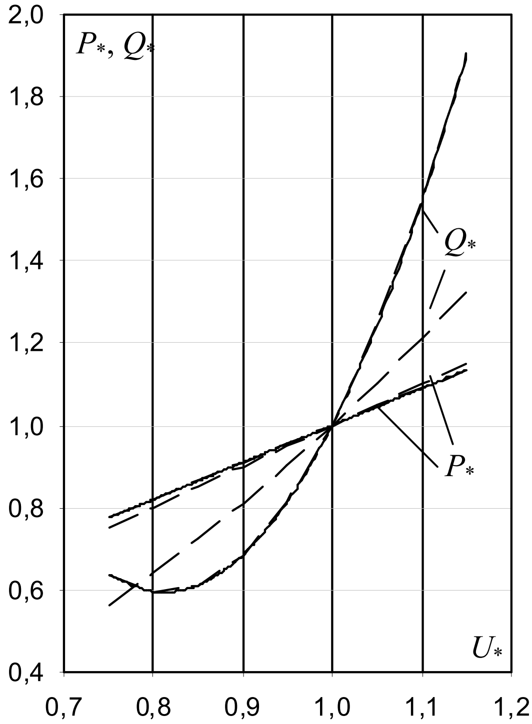


Рис. 2.16. Действительные статические характеристики нагрузки и зависимости мощностей от напряжения при моделировании нагрузки схемой замещения

Все математические модели электрических нагрузок, рассмотренные выше, сведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6.

Математические модели электрических нагрузок

Математические модели	Мощность нагрузки	Примечания
Статические характеристики нагрузки по напряжению	$P_н = \varphi(U_н), \quad Q_н = \psi(U_н)$	Получаются по данным эксперимента или подбором типовых характеристик
Постоянные значения мощности нагрузки	$P_н = \text{const}, \quad Q_н = \text{const}$	
Схема замещения: $\underline{Y}_н = G_н - jB_н = \text{const}$	$P_н = U_н^2 G_н$ или $P_н = U_н U_{ном} G_н$, $Q_н = U_н^2 B_н$	$\underline{Y}_н = \frac{S_{н0}}{U_{ном}^2}(\cos\varphi - j\sin\varphi)$

Схема замещения: $\underline{Z}_н = R_н + jX_н = \text{const}$	$P_н(U_н) = \frac{S_{н0}^2}{U_н^2} R_н, \quad Q_н(U_н) = \frac{S_{н0}^2}{U_н^2} X_н$	$\underline{Z}_н = \frac{U_{ном}^2}{S_{н0}} \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$
Постоянное значение тока нагрузки: $I_н = \text{const}$ ($\varphi = \text{const}$)	$P_н = \sqrt{3} U_н I_н \cos\varphi, \quad Q_н = \sqrt{3} U_н I_н \sin\varphi$	$I_н = \frac{S_{н0}}{\sqrt{3} U_{ном}}$

Примечание. Во всех формулах $S_{н0}$ – полная мощность нагрузки, которая может быть принята равной номинальной или максимальной мощности, а также мощности некоторого исходного или начального режима работы электроприемника или потребителя.

Пример.

Найти коэффициенты статической характеристики нагрузки по опытным данным для активной и реактивной мощности и определить их регулирующие эффекты.

Используем линейную модель для активной мощности и параболу для реактивной мощности. Построение характеристик выполним в Mathcad.

Все величины приведены в относительных единицах.

Исходные данные (результаты эксперимента):

$$D := \begin{pmatrix} 0.82 & 0.82 & 0.61 \\ 0.86 & 0.86 & 0.69 \\ 0.91 & 0.93 & 0.79 \\ 0.95 & 0.96 & 0.90 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.05 & 1.04 & 1.13 \\ 1.09 & 1.09 & 1.27 \\ 1.14 & 1.13 & 1.41 \end{pmatrix} \qquad U := D^{\langle 0 \rangle} \qquad P := D^{\langle 1 \rangle} \qquad Q := D^{\langle 2 \rangle}$$

Коэффициенты функции полиномиальной регрессии:

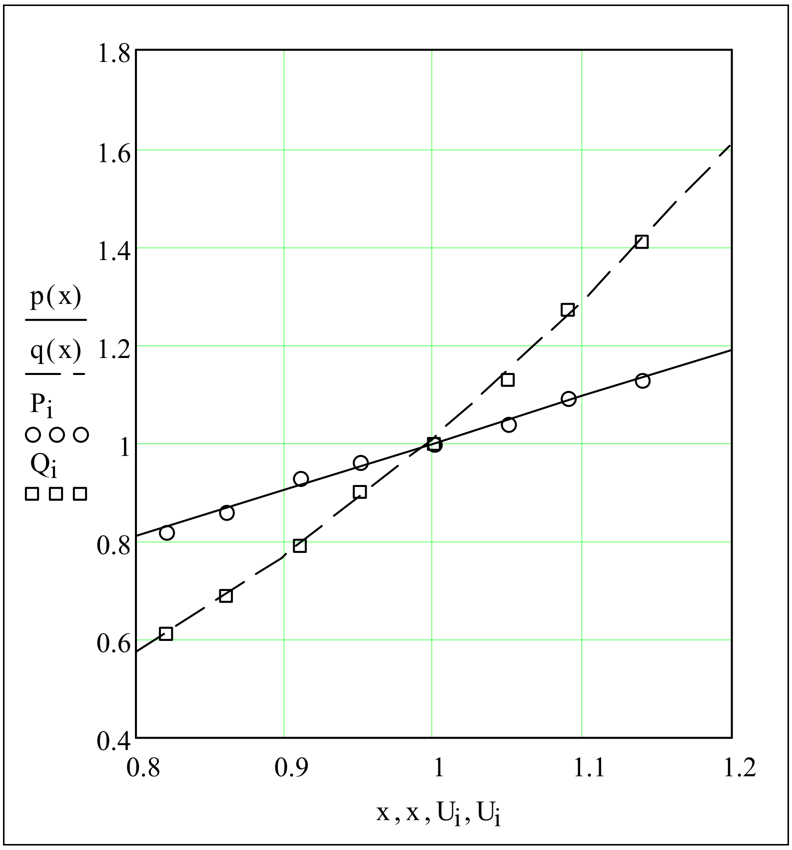
$$vsp := regress(U, P, 1) \quad vsp = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.045 \\ 0.955 \end{pmatrix} \quad vsq := regress(U, Q, 2) \quad vsq = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0.539 \\ -1.643 \\ 2.112 \end{pmatrix}$$

Определение функций статических характеристик и аргументов:

$$p(x) := interp(vsp, U, P, x) \qquad x := 0.8, 0.9 .. 1.2$$

$$q(x) := interp(vsq, U, Q, x) \qquad i := 0 .. 7$$

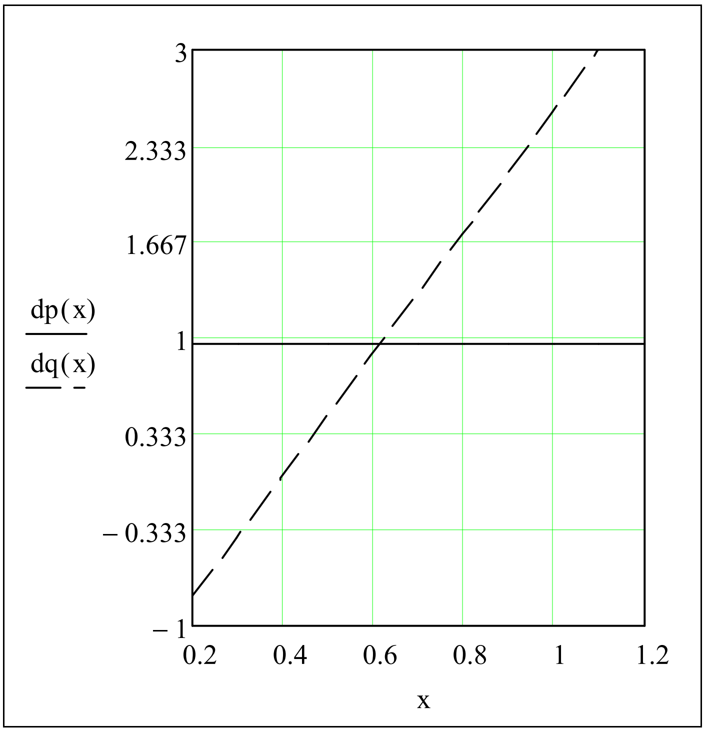
Графики статических характеристик (на графике отдельными маркерами нанесены экспериментальные данные):



Регулирующие эффекты:

$$dp(x) := \frac{d}{dx}p(x) \quad dp(1) = 0.955 \qquad dq(x) := \frac{d}{dx}q(x) \quad dq(1) = 2.582$$

Изменение регулирующих эффектов:



Регулирующий эффект активной мощности не меняется, так как модель статической характеристики была принята линейной.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите основные электрические и магнитные свойства ЛЭП.
2. Поясните физический смысл параметров ВЛ.
3. Какие уравнения называются уравнениями длинной линии?
4. Как можно вычислить напряжение и ток в произвольной точке на линии?
5. Как получаются уравнения идеальной линии?
6. Какие линии называются волновыми (полуволновыми)?
7. Как найти параметры П-образной схемы замещения линии?
8. В каких случаях можно пользоваться упрощенными моделями ВЛ?
9. Поясните физический смысл параметров схемы замещения трансформатора.
10. Запишите уравнения трансформатора в дифференциальной форме записи.
11. Какой трансформатор называется идеальным и совершенным?
12. Нарисуйте Г-образную схему замещения трансформатора.
13. Как определяются параметры П-образной схемы замещения трансформатора?
14. Как построить внешнюю характеристику трансформатора?
15. Что такое статические характеристики нагрузки?
16. Что такое регулирующий эффект нагрузки?
17. Какие существуют основные виды электрических нагрузок?
18. Какие нагрузки не потребляют реактивной мощности?
19. Какой регулирующий эффект имеют печи сопротивления и лампы накаливания?
20. Как изменяется регулирующий эффект по реактивной мощности асинхронного двигателя при снижении напряжения?
21. Какие математические модели используются для моделирования электрической нагрузки в установившихся режимах?
22. Что такое типовые статические характеристики?
23. Какие схемы замещения используются для моделирования нагрузки?

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

3.1. Основы теории графов

Графы широко используются в различных областях науки и техники для моделирования отношений между объектами. На макроуровне графы применяются для графического изображения топологических уравнений.

Считается, что теория графов зародилась в XVIII столетии в г. Кенигсберге (ныне г. Калининград), жители которого пытались решить задачу о переходе мостов города (река Прегель) по такому маршруту, в котором бы были пройдены все мосты, но каждый мост был пройден только один раз (рис. 3.1, *а*). Эту задачу удалось решить Эйлеру. Он показал, каким условиям должен удовлетворять граф, полученный по схеме мостов, рис. 3.1, *б*, чтобы такая задача имела решение.

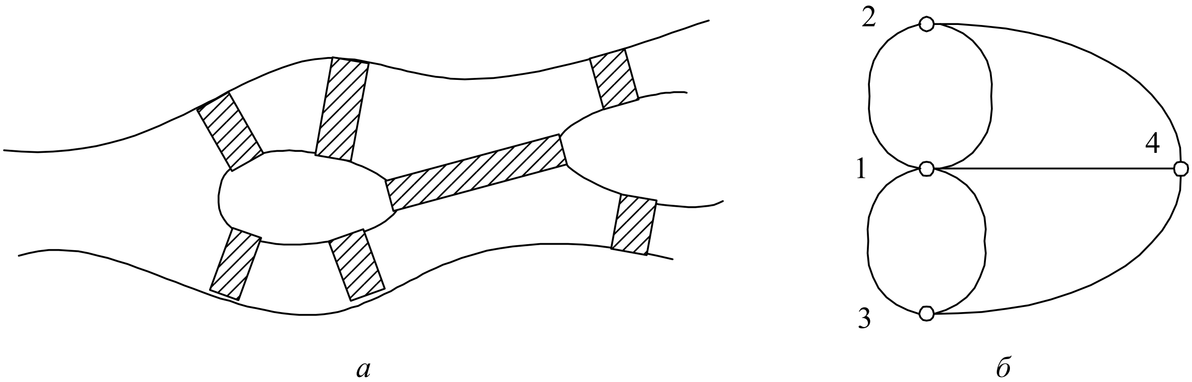


Рис. 3.1. Схема мостов (*а*) и граф маршрутов (*б*)

Графом называется совокупность вершин (узлов) и связанных с ними ребер (ветвей). Граф можно задать в виде $G = \langle V,E \rangle$, где V – множество вершин; E– отношение на $V(E \subset V \times V)$ – множество ребер. На рис. 3.2, *а* показан граф G, в котором множество ребер E есть $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, а множество вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Подграфом называют такую часть графа, которая включает в себя некоторые вершины и ребра графа, причем среди ребер могут быть только те, которые связывают вершины подграфа. На рис. 3.2, *б* показан подграф G' графа G.

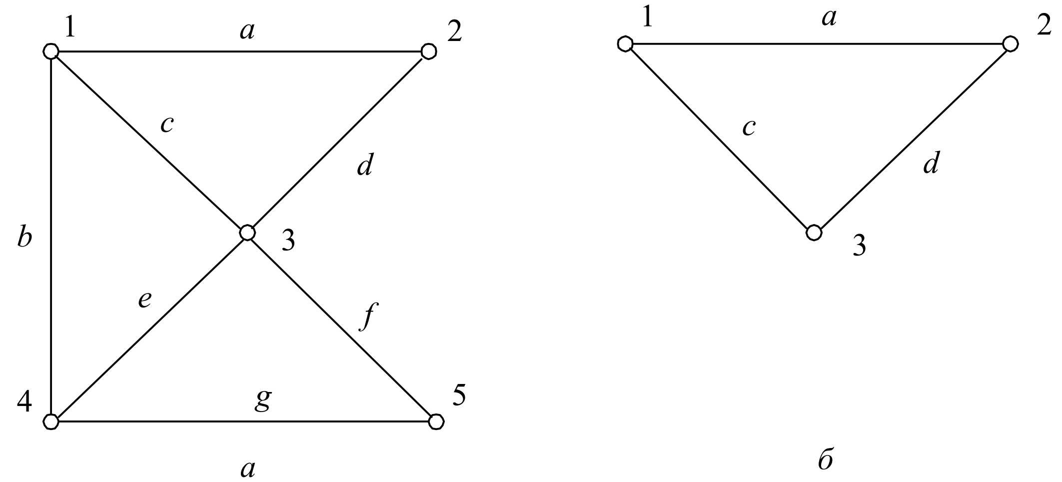


Рис. 3.2. Граф G (*а*) и его подграф G' (*б*)

Направленный (ориентированный) граф имеет ребра, на которых указаны направления. Ребра направленного графа называют дугами. На рис. 3.3, *а* показан ориентированный граф.

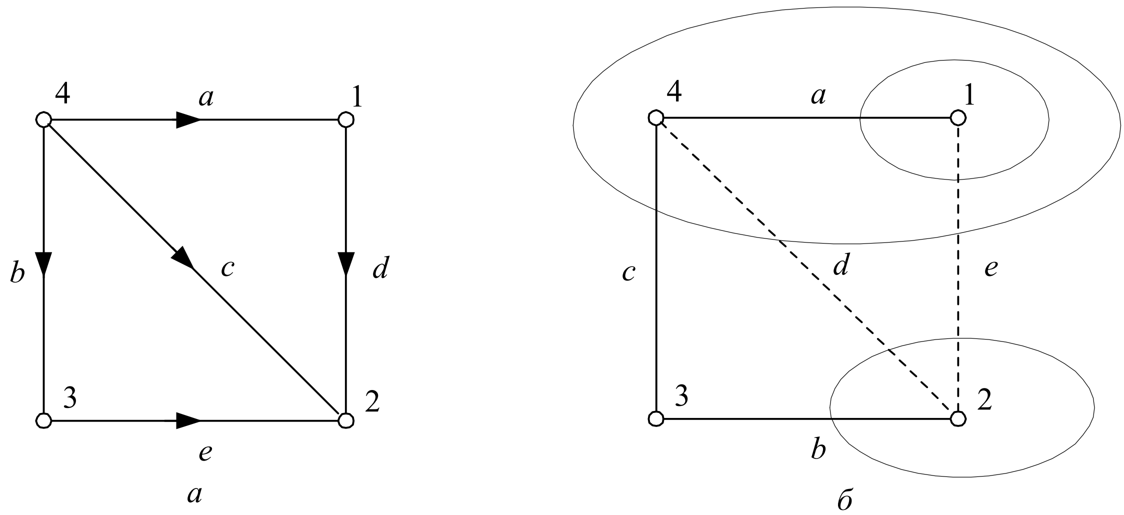


Рис. 3.3. Ориентированный граф (*а*), сечения дерева графа (*б*)

Степенью вершины V_i графа называют число ребер, инцидентных этой вершине. Термин «ицидентность» означает отношение объектов типа «проходят через…», «соединены с…». Две вершины называют смежными, если они соединены ребром. Например, на рис. 3.3, *а* вершина 4 смежна с вершиной 2, так как они соединены посредством ребра *c*.

Граничные вершины ребра – вершины, инцидентные этому ребру.

Кратные ребра – ребра с одинаковыми граничными вершинами.

Маршрутом (путем) S называют любую последовательность ребер, в которой соседние ребра инцидентны одной и той же вершине. В графе на рис. 3.2, *а* последовательности (*a, d, e, g*) и (*b, g*) – маршруты, а последовательность (*d, g*) маршрутом не является, так как ребра *d* и *g* инцидентны разным вершинам. Если в маршруте нет повторяющихся ребер, то он называется цепью. Если цепь начинается и кончается в одной и той же вершине, то она называется циклом – контуром. Количество ребер в S называют длиной маршрута.

Если каждому ребру графа приписано какое-то число (вес), то граф называют взвешенным.

Связным называют граф, в котором можно указать маршрут, связывающий любые вершины.

В задаче о кенигсбергских мостах, рис. 3.1, Эйлер показал, что такой граф не представляет собой единого цикла; иными словами, с какой бы вершины мы не начали обход, мы не сможем обойти весь граф и вернуться обратно, не проходя никакого ребра дважды. Если бы такой цикл существовал, то выйдя из начальной вершины, нужно туда вернуться, а для всех промежуточных вершин нужно в них войти и выйти – степени всех вершин должны быть четными числами. Это условие не выполняется для кенигсберских мостов.

Если на графе можно найти цикл, содержащий все его ребра, причем каждое ребро в точности по одному разу, то такой цикл называется эйлеровой линией, а граф, обладающий эйлеровой линией – эйлеровым графом.

Если необходимо найти путь S в связанном графе, содержащий все его ребра по одному разу, в котором начальная и конечная вершины не совпадают, необходимо и достаточно, чтобы начальная и конечная вершины были единственными вершинами с нечетными степенями.

Деревом связанного графа называют наименьший связный подграф данного графа.

Ветвями дерева называют ребра графа, вошедшие в дерево, а хордами – ребра графа, не вошедшие в дерево. Для одного и того же графа в общем случае можно указать несколько деревьев.

Контуром k-й хорды называют множество ребер, образующих цикл в графе, получившемся при добавлении k-й хорды к дереву.

Сечением ветви дерева называют множество ребер, пересекаемых линией сечения, если:

а) среди ветвей дерева пересекается единственная;

б) линия сечения замкнутая и любое ребро может пересекаться не более одного раза.

Для графа, показанного на рис. 3.3, *б*, сечения ветвей его дерева записываются: a – (a, e); b – (b, d, e); c – (c, d, e).

Графы можно представить с помощью различных матриц, что является удобным при использовании алгебраических методов решения многих задач теории графов. Наиболее важными матричными представлениями являются матрицы инциденций (соединений) и смежности.

Первая матрица инциденций **M** для неориентированного графа представляет собой матрицу, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элемент матрицы равен единице, если вершина инцидентна ребру. В противном случае элемент матрицы принимает значение ноль.

Для ориентированного графа элемент матрицы инциденций **M** равен +1, если вершина, инцидентная дуге, является начальной вершиной дуги (т.е. дуга исходит из этой вершины). Элемент равен –1, когда дуга входит в вершину. Если вершина не инцидентна дуге, то элемент матрицы равен 0. Так для графа на рис. 3.3, *a* матрица **M** имеет следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (3.1)$$

В каждом столбце матрицы **M** находится две единицы – одна положительная, а другая отрицательная, так как каждое ребро инцидентно только двум вершинам. В каждой строке имеется столько единиц, сколько ребер инцидентно соответствующей вершине.

Вторая матрица инциденций **N** устанавливает соответствие между ребрами графа и независимыми контурами графа. В зависимости от выбранной системы независимых контуров – дерева графа можно составить разные матрицы **N**. Число независимых контуров обозначают через *k*. Каждой строке матрицы **N** ставят в соответствие контур, таким образом, число строк в матрице **N** равно числу независимых контуров *k*; каждому столбцу матрицы **N** ставят в соответствие ребро, и число столбцов матрицы **N** равно числу ребер – *m*.

Матрица **N** составляется по следующим правилам: Независимые контуры нумеруют от 1 до *k*; выбирают направления обхода контуров; начиная с первого выполняют обход контуров в соответствии с выбранными направлениями; проверяют, совпадает ли направление очередного ребра с направлением обхода контура: если да, то в соответствующем столбце матрицы **N** ставится +1, в противном случае –1; для ребер, не вошедших в рассматриваемый контур, в соответствующие столбцы проставляют нули.

Так, если в качестве дерева графа на рис. 3.3, *a* взять подграф с ребрами (*a, b, c*), то при добавлении хорды *d* образуется контур (*a, d, c*), а при добавлении хорды e – контур (c, e, b). Для такой системы независимых контуров матрица **N** имеет вид:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3.2)$$

Матрица смежности **A** является квадратной матрицей и для невзвешенного графа состоит из нулей и единиц: $A_{i,j} = 1$, если $(i, j) \in E$, и $A_{i,j} = 0$ в противном случае. Для взвешенного графа $A_{i,j}$ равно весу соответствующего ребра, а отсутствие ребра в ряде задач удобно обозначать бесконечностью. Если граф ориентированный, то для каждого ребра ставится $A_{i,j} = 1$, если направление от i к j, а $A_{j,i} = -1$ и наоборот. Для неориентированных графов матрица смежности всегда симметрична относительно главной диагонали. Для графа на рис 2.14, a матрица **A** имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

С помощью матриц **M** и **A** легко проверить, существует ли в графе ребро, соединяющее вершину i с вершиной j. Основной недостаток этих матриц заключается в том, что они требуют, чтобы объем памяти был достаточен для хранения соответственно $n \cdot m$ и n^2 значений.

Этого недостатка лишены такие способы хранения графа, как одномерный массив длины n списков или множеств вершин. В таком массиве каждый элемент соответствует одной из вершин и содержит список или множество вершин, смежных ей.

Для реализации некоторых алгоритмов более удобным является описание графа путем перечисления его ребер. В этом случае его можно хранить в двумерном массиве из двух строк и длиной m, каждый столбец которого содержит номер начальной вершины и номер конечной вершины графа.

При работе с графами на компьютере удобно вершины графа сопоставлять с числами от 1 до n, где $n = |V|$ – количество вершин графа, и рассматривают $V = \{1, 2, \dots n\}$. Ребра нумеруют числами от 1 до m, где $m = |E|$. В дальнейшем ребра будем именовать не буквами, а цифрами.

3.2. Применение теории графов для моделирования электрических сетей

Электрические сети современных ЭЭС насчитывают сотни и даже тысячи ЛЭП и трансформаторов. Расчеты режимов сложных схем электрических сетей требуют специальных моделей представления схем и компактной записи уравнений. Такими моделями являются графы и матрицы.

Линии, трансформаторы и другие элементы электрической сети представляются в расчетах своими схемами замещения, состоящими из ветвей с сопротивлениями и проводимостями. Все шины электрических станций и подстанций являются узловыми точками сети. Количество этих узловых точек или узлов схемы сети обозначим буквой n, а количество ветвей, соединяющих эти шины m. Если сеть не содержит замкнутых контуров, то количество узлов и ветвей различается на 1: $n = m + 1$. При наличии контуров $n = m + 1 - k$, где k – количество независимых контуров.

Графы являются топологическими моделями схем электрических цепей.

По сути, изображение электрической схемы в виде графа повторяет графическое изображение схемы, но без элементов, из которых состоит электрическая цепь. Узлы (вершины графа) соединяются непрерывными линиями (ребрами), на которых при необходимости указывается положительное направление тока или потока мощности.

Элементами ЭЭС, которые моделируются ребрами графа, являются ЛЭП, трансформаторы, реакторы, батареи конденсаторов и др. Как правило, все они представляются П-образными схемами замещения и поэтому имеют элемент связи между двумя граничными узлами – продольная ветвь, и элементы, связывающие узлы с нейтральной точкой системы N поперечные ветви (рис. 3.4).

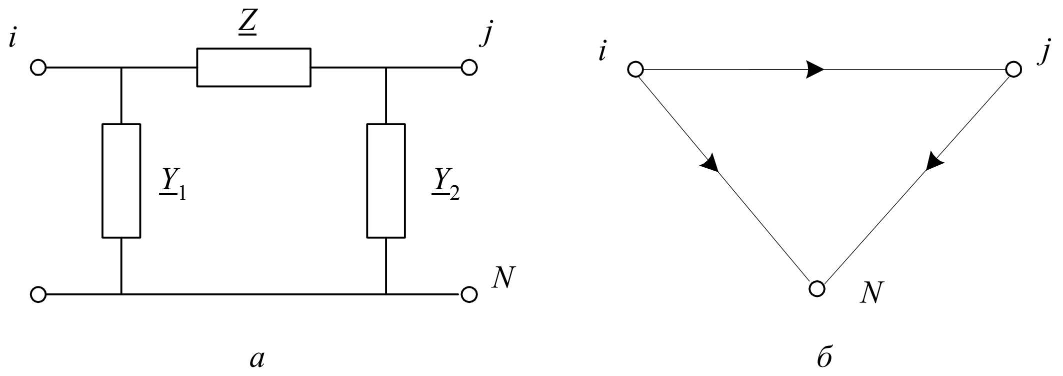


Рис. 3.4. П-образная схема замещения (*а*) и ее граф (*б*)

Для ЛЭП:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C \mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l) \tag{3.4}$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{\mathrm{ch}(\underline{\gamma}_0 l) - 1}{\underline{Z}_C \mathrm{sh}(\underline{\gamma}_0 l)} = \frac{1}{\underline{Z}_C} \mathrm{th}\left(\frac{\underline{\gamma}_0 l}{2}\right). \qquad (3.5)$$

Обычно $\underline{Z} = (r_0 + jx0)l$ и $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \dfrac{(g_0 + jb_0)\cdot l}{2}$.

Для трансформатора:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_т}{k_т},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_т}(1 - k_т) + \underline{Y}_\mu, \qquad (3.6)$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{k_т}{\underline{Z}_т}(k_т - 1).$$

при $k_т > 1$. Если $k_т = 1$, то из (3.6) получается Г-образная схема замещения трансформатора.

Для реакторов и батарей конденсаторов, включенных в виде продольных элементов сети, параметры схемы замещения: $\underline{Z} = jX_р$ и $\underline{Z} = jX_с$. $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 0$ ($\underline{Y}_1$ или $\underline{Y}_2$ может быть отлично от нуля и моделировать потери активной мощности в реакторе или батарее конденсаторов). В случае их включения в виде поперечных ветвей: $\underline{Z} = 0$, а $\underline{Y}_1$ и $\underline{Y}_2$ представляются одной поперечной ветвью – $\underline{Y}$ шунта: $\underline{Y} = -j\dfrac{1}{X_р}$ и $\underline{Y} = j\dfrac{1}{X_с}$. Аналогично могут представляться своими схемами замещения электрические нагрузки .

Рассмотрим пример схемы электрической сети, состоящей из ЛЭП и трансформатора (рис. 3.5,*а*). Ее схема замещения есть две соединенные между собой П-образные схемы замещения ЛЭП и трансформатора, а граф будет состоять из двух графов П-образных схем (рис. 3.5,*б*).

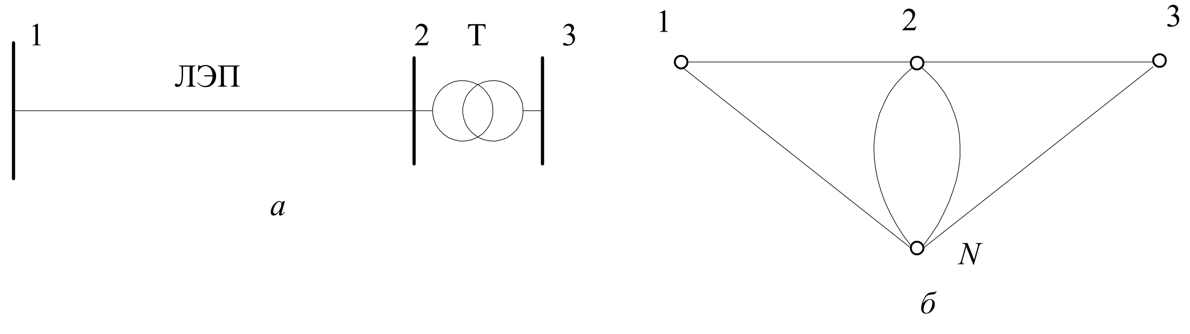


Рис. 3.5. Схема простой электрической сети (*а*) и ее граф (*б*)

Для более сложных схем, например схемы на рис. 3.6, *а*, удобно ввести в рассмотрение нейтральную плоскость в сети и рассматривать узлы графа сети «висящими» над нейтральной плоскостью N и соединенными с ней поперечными ветвями (рис. 3.6, *б*).

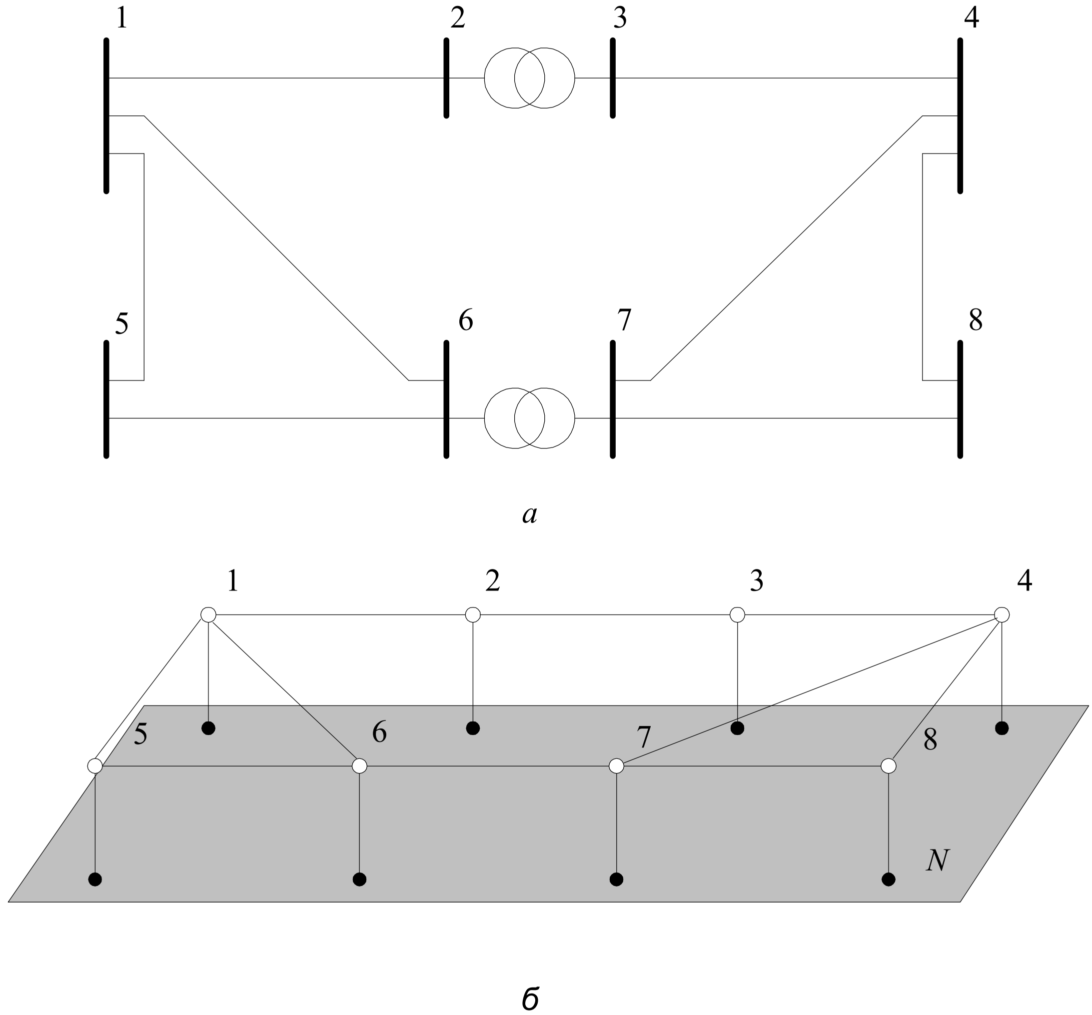


Рис. 3.6. Схема электрической сети из восьми узлов и десяти ветвей (*а*) и ее граф (*б*)

Так как в общем случае каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру, связанному с вершиной (плоскостью) *N*, то при изображении графа эти ребра не изображаются (рис. 3.7).

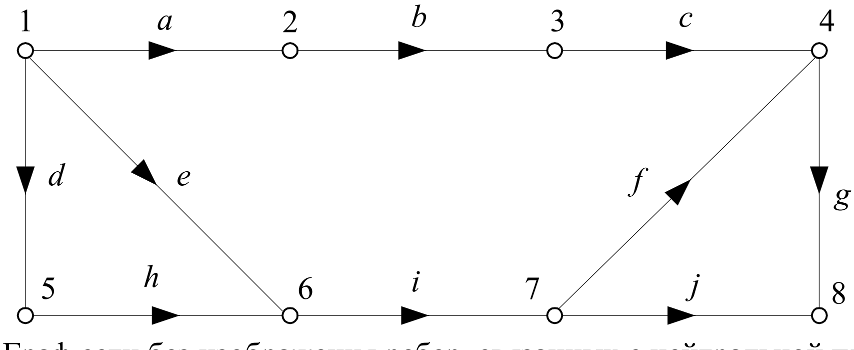


Рис. 3.7. Граф сети без изображения ребер, связанных с нейтральной плоскостью

Для моделирования топологии схем электрических сетей используют матричные модели, отражающие свойства графов. Это матрицы инциденций и смежности. В практических расчетах более удобной является компактная форма записи, например в виде перечисления ребер графа. Так для графа рис. 3.7 массив имен ребер **L** может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

В первой строке массива **L** указывается номер (имя) начального узла, а во второй, того же столбца, – номер (имя) конечного узла. Пара номеров узлов в столбце образует имя ветви, например, для ветви b это 2 – 3.

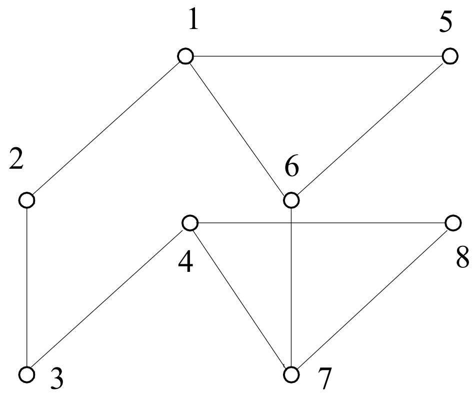


Рис. 3.8. Многослойный граф

В некоторых случаях можно использовать многослойные графы, в которых сеть каждого напряжения располагается в отдельном слое. Получается, что в горизонтальных слоях находятся ветви, моделирующие линии электропередачи, а между ними вертикально изображаются трансформаторные связи (рис. 3.8). Таких слоев может быть столько, сколько ступеней номинального напряжения имеется в сети.

3.3. Матричные формы моделей электрических сетей и их режимов

Каждая продольная ветвь в графе электрической сети характеризуется сопротивлением $\underline{Z}_j = R_j + jX_j$, а поперечная ветвь – проводимостью $\underline{Y}_i = G_i + jB_i$ ($j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$), которые образуют матрицы параметров электрической сети – матрицу сопротивлений продольных ветвей и матрицу-столбец проводимостей поперечных ветвей – шунтов:

$$\underline{\mathbf{Z}}_{\text{в}} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{\text{в}11} & & & \\ & \underline{Z}_{\text{в}22} & & \\ & & \ldots & \\ & & & \underline{Z}_{\text{в}mm} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Y}}_N = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{N1} \\ \underline{Y}_{N2} \\ \ldots \\ \underline{Y}_{Nn} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Здесь $\underline{Z}_{\text{в}jj} = \underline{Z}_j$, а $\underline{Y}_{Ni} = \underline{Y}_i$. Недиагональные элементы матрицы $\underline{\mathbf{Z}}_{\text{в}}$ обычно равны нулю, хотя в некоторых случаях учитывают взаимные сопротивления ветвей, которые могут быть отличны от нуля, например для близко расположенных ЛЭП возможно наличие взаимной индукции.

Кроме пассивных ветвей в сети существуют активные ветви, включающие источники ЭДС и тока. Эти ветви, как правило, являются поперечными и моделируют генераторы электрических станций (ЭДС) и потребителей электрической энергии (источники тока), рис. 3.9, *а*.

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{E}_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{J}_n \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Ветвь с ЭДС в действительности содержит еще и сопротивление и, по сути, является источником напряжения, которое зависит от нагрузки. В установившемся режиме достигается постоянство значения напряжения генераторов электростанций посредством специальных устройств регулирования и можно пренебречь влиянием сопротивлений генераторов на их напряжение. В дальнейшем будем считать эти ветви источниками ЭДС.

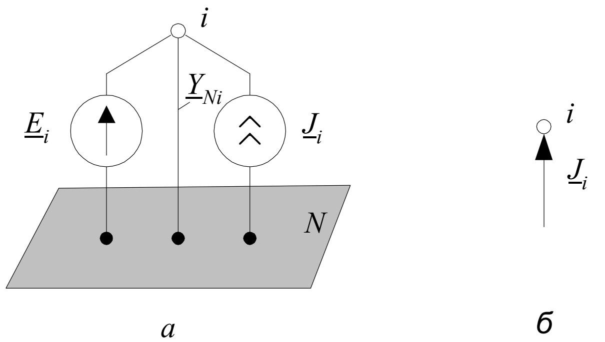


Рис. 3.9. Изображения поперечных ветвей

Принято не изображать на графе сети не только шунтирующие проводимости, но и активные поперечные ветви с ЭДС и источником тока, однако источник тока все же задают упрощенным изображением в виде стрелочки, направленной в узел (рис. 3.9, *б*). Это показывает, что в сеть «вливается» извне ток генерации или нагрузки (с обратным знаком). Такие токи называются *токами инъекции* (injection current) или *задающими токами*.

Матрицы $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{J}}$ задают режим работы электрической сети и являются векторами *независимых переменных*. Они относятся к режимным параметрам электрической сети. Другие режимные параметры называются *зависимыми переменными*. К ним относятся напряжения в узлах, токи и напряжения в продольных ветвях и ряд других параметров режима:

$\underline{\mathbf{U}}$ – матрица напряжений в узлах (узловые напряжения);

$\underline{\mathbf{I}}$ – матрица токов ветвей;

$\Delta\underline{\mathbf{U}}$ – матрица напряжений в ветвях (падения напряжения на сопротивлениях ветвей);

$\underline{\mathbf{S}}_{\text{в}}^{(\text{н})}$ – матрица потоков мощности в начале ветвей;

$\underline{\mathbf{S}}_{\text{в}}^{(\text{к})}$ – матрица потоков мощности в конце ветвей;

$\Delta\underline{\mathbf{S}}_{\text{в}}$ – матрица потерь мощности в ветвях.

3.4. Узловые уравнения установившегося режима

Рассмотрим пример направленного графа электрической сети, изображенного на рис. 3.10.

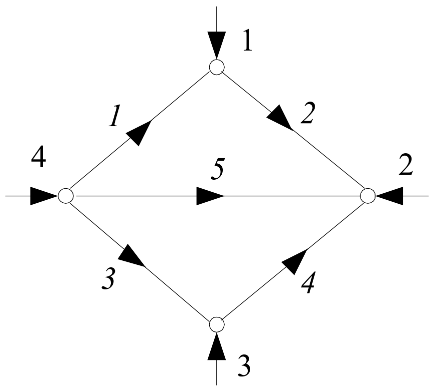


Рис. 3.10. Пример графа электрической сети

Для удобства записи в матричной форме параметров ветвей присвоим каждой ветви ее порядковый номер (на рис. 3.10 курсив). Составим матрицу соединений **M** для этого графа

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Умножим эту матрицу на матрицу токов ветвей, будем иметь:

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ -\underline{I}_2 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 \\ -\underline{I}_3 + \underline{I}_4 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ \underline{J}_4 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Полученное соотношение является первым законом Кирхгофа в матричной форме записи

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{J}}. \tag{3.12}$$

Так как к узлам графа электрической сети еще присоединены другие поперечные ветви с ЭДС и проводимостью шунта, то задающий ток в (3.12) включает в себя также токи данных ветвей

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_{\text{г}} - \underline{\mathbf{J}}_{\text{н}} - \underline{\mathbf{J}}_{Y}. \tag{3.13}$$

Здесь: $\underline{\mathbf{J}}_г$ – матрица токов генерации (ветви с ЭДС), которые определяются через мощности генерации;

$\underline{\mathbf{J}}_н$ – матрица токов нагрузки, которые определяются через мощности нагрузки (имеет обратное направление – от узла);

$\underline{\mathbf{J}}_Y$ – матрица токов в проводимостях шунтов, которые зависят от проводимости шунта из матрицы $\underline{\mathbf{Y}}_N$ и напряжения в узле из матрицы $\underline{\mathbf{U}}$ (также имеет обратное направление – от узла, так как моделирует потребление мощности).

Умножим транспонированную матрицу соединений $\mathbf{M}^T$ на матрицу узловых напряжений, получим:

$$\mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{U}_1 + \underline{U}_4 \\ \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ -\underline{U}_3 + \underline{U}_4 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\underline{U}_1 \\ \Delta\underline{U}_2 \\ \Delta\underline{U}_3 \\ \Delta\underline{U}_4 \\ \Delta\underline{U}_5 \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

или

$$\Delta\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}. \qquad (3.15)$$

По закону Ома в матричной форме записи имеем

$$\Delta\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}_в \cdot \underline{\mathbf{I}} \qquad (3.16)$$

или

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Z}}_в^{-1} \cdot \Delta\underline{\mathbf{U}}. \qquad (3.17)$$

Подставим в (3.12) выражение для матрицы токов ветвей (3.17) и затем (3.15), получим

$$\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_в^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{J}}. \qquad (3.18)$$

Введем обозначение

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_в^{-1} \cdot \mathbf{M}^T, \qquad (3.19)$$

тогда (3.18) приобретет вид

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{J}}. \qquad (3.20)$$

Полученное соотношение является уравнением узловых напряжений (потенциалов) в матричной форме записи. Матрицу $\underline{\mathbf{Y}}$ называют матрицей узловых проводимостей электрической сети. Рассмотрим структуру этой матрицы, для чего выполним матричные перемножения в (3.19). Заметим, что обратная матрица сопротивлений ветвей легко получается в силу своего диагонального вида – ее элементы суть обратные величины к сопротивлениям ветвей и являются проводимостями продольных ветвей.

Вначале перемножим первые две матрицы матричного произведения (3.19):

$$\mathbf{M}\cdot\underline{\mathbf{Z}}_{\text{в}}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&0&-1&-1\\0&0&-1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\underline{Z}_1}&&&&\\&\frac{1}{\underline{Z}_2}&&&\\&&\frac{1}{\underline{Z}_3}&&\\&&&\frac{1}{\underline{Z}_4}&\\&&&&\frac{1}{\underline{Z}_5}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\underline{Z}_1}&\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&0&0\\0&-\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}\\0&0&-\frac{1}{\underline{Z}_3}&\frac{1}{\underline{Z}_4}&0\\\frac{1}{\underline{Z}_1}&0&\frac{1}{\underline{Z}_3}&0&\frac{1}{\underline{Z}_5}\end{pmatrix}\qquad(3.21)$$

Полученную матрицу умножим справа на матрицу $\mathbf{M}^T$. В результате получим:

$$\underline{\mathbf{Y}}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_2}&0&-\frac{1}{\underline{Z}_1}\\-\frac{1}{\underline{Z}_2}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_5}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}\\0&-\frac{1}{\underline{Z}_4}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}\right)&-\frac{1}{\underline{Z}_3}\\-\frac{1}{\underline{Z}_1}&-\frac{1}{\underline{Z}_5}&-\frac{1}{\underline{Z}_3}&\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_5}\right)\end{pmatrix}.(3.22)$$

Из полученной матрицы можно сделать следующие выводы о вычислении ее элементов:

1) Элементы, расположенные на главной диагонали матрицы, вычисляются как сумма проводимостей ветвей, подходящих к соответствующему узлу:

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j}, \tag{3.23}$$

где $\underline{Y}_{ij}$ – диагональный элемент матрицы $\underline{\mathbf{Y}}$;

$\underline{Z}_j$ – сопротивление j-й ветви;

ω_i – множество номеров узлов, связанных с i-м узлом.

2) Недиагональные элементы равны проводимостям ветвей, имя каждой из которых состоит из номеров узлов, соответствующих номеру строки и номеру столбца, на пересечении которых находится данный элемент, и взятых с противоположным знаком. Матрица $\underline{\mathbf{Y}}$ является симметричной матрицей.

$$\underline{Y}_{ij} = -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}}. \tag{3.24}$$

Запишем уравнение узловых напряжений для узла с номером i:

$$\begin{gathered} \underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in}\underline{U}_n = \underline{J}_i = \\ = \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{\text{Н}i} - \underline{J}_{Yi} = \underline{J}_{\Gamma i} - \underline{J}_{\text{Н}i} - \underline{Y}_{Ni}\underline{U}_i. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Объединив подобные члены, получим, что в диагональные элементы матрицы $\underline{\mathbf{Y}}$ войдут дополнительные слагаемые $\underline{Y}_{Ni}$:

$$\underline{Y}_{ii} = \sum_{j \in \omega_i} \frac{1}{\underline{Z}_j} + \underline{Y}_{Ni}, \tag{3.26}$$

т. е. диагональный элемент будет равен сумме проводимостей всех подходящих к i-му узлу ветвей, включая поперечную ветвь – шунт $\underline{Y}_{Ni}$.

Задающие токи узлов в (3.20) будут состоять только из токов генерации и токов нагрузки.

В случае отсутствия связей с нейтральной плоскостью N система уравнений (3.20) не имеет единственного решения, так как в этом случае определитель матрицы $\underline{\mathbf{Y}}$ равен нулю. Сумма всех задающих токов в такой сети равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = 0. \tag{3.27}$$

Следовательно, среди всех n узлов можно выделить узел, например, с номером n, ток в котором равен

$$J_n = -\sum_{i=1}^{n-1} J_i. \tag{3.28}$$

Для уравнений узловых напряжений это означает, что одно уравнение лишнее, т. е. зависит от остальных уравнений и может быть получено через сумму всех остальных уравнений. Так как ток в этом узле может быть получен из баланса токов в сети (3.28), то его называют *балансирующим*. Обычно это шины мощной электростанции или системы.

Таким образом, из системы (2.20) исключается одно уравнение и тогда получается система независимых линейных уравнений порядка $n - 1$. Однако, поскольку число неизвестных напряжений по-прежнему равно n, в одном из узлов следует задать напряжение по величине и фазе так, чтобы все напряжения вычислялись относительно этого известного напряжения. Такой узел в сети называется *базисным*. Обычно фазу напряжения базисного узла принимают равной нулю, т. е. вектор напряжения базисного узла совмещают с действительной осью. Остальные узлы называют независимыми узлами.

Во многих случаях балансирующий узел и базисный узел совмещают, и в дальнейшем будем считать, что это один и тот же узел.

Таким образом, с исключением уравнения для базисного балансирующего узла с номером n будем иметь систему уравнений (3.20) с числом уравнений $n - 1$, однако в эти уравнения будет входить слагаемое с заданным напряжением базисного узла.

Изменим номер базисного балансирующего узла. Пусть его номер есть 0 (ноль). Тогда уравнение (3.20) приобретет следующий вид:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}, \tag{3.29}$$

где $\underline{\mathbf{Y}}_0$ – матрица проводимостей ветвей, связывающих независимые узлы с базисным балансирующим узлом;

U_0 – напряжение базисного узла (скаляр).

Матрица узловых проводимостей в (3.29) имеет порядок $n - 1$ и определятся через матрицу инциденций $\mathbf{M}$, в которой нет одной строки, соответствующей балансирующему узлу.

Необходимо заметить, что во всех уравнениях, где одновременно присутствуют токи и напряжения: (3.16), (3.17), (3.18), (3.20), (3.25) и (3.29), напряжения даны в фазных значениях, хотя индекс (буква «ф») для простоты не записывался. Эти же уравнения можно считать записанными и для линейных напряжений, однако токи будут увеличенными в $\sqrt{3}$ раз и для вычисления истинных токов их следует уменьшать в $\sqrt{3}$.

3.5. Формы линейных уравнений установившегося режима и их решение

Известными независимыми переменными в уравнениях установившегося режима могут быть задающие токи узлов и напряжение базисного узла. В этом случае решение уравнения (3.29) может быть записано в виде

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \left(\underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0\right) = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \left(\underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0\right). \tag{3.30}$$

Здесь $\underline{\mathbf{Z}}$ – матрица узловых сопротивлений.

Численное решение системы уравнений (3.29) выполняется методом Гаусса или другим методом решения системы линейных алгебраических уравнений.

В случае, когда известны мощности в узлах сети – задающие мощности $\underline{S}_i$, токи можно вычислить приближенно через номинальные напряжения $\underline{J}_i = \dfrac{\overset{*}{S}_i}{\sqrt{3}U_{\text{ном}}}$ (i = 1,…,n – 1). Задающие мощности, так же как и токи, складываются из мощности генерации и мощности нагрузки:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{г}} - \underline{\mathbf{S}}_{\text{н}}. \tag{3.31}$$

Другой приближенный подход связан с представлением задающих токов через напряжения и проводимости $\underline{J}_i = \underline{U}_i \underline{Y}_{Si}$, где $\underline{Y}_{Si}$ – проводимость генерации и/или нагрузки (схема замещения). Для i-го узла имеем:

$$\underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in-1}\underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0}U_0 = \underline{J}_i = \underline{Y}_{Si}\underline{U}_i. \tag{3.32}$$

Объединив подобные члены, получим

$$\underline{Y}_{i1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{i2}\underline{U}_2 + \ldots + \underline{Y}_{ii}\underline{U}_i + \ldots + \underline{Y}_{in-1}\underline{U}_{n-1} + \underline{Y}_{i0}U_0 = 0, \tag{3.33}$$

где в элемент $\underline{Y}_{ii}$ входит проводимость $\underline{Y}_{Si}$. Знак перед этой проводимостью зависит от того, какая мощность преобладает в узле: плюс, если нагрузка, и минус, если генерация. В матричной форме записи:

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = 0. \tag{3.34}$$

Решение матричного уравнения (3.34) запишется в виде

$$\underline{\mathbf{U}} = -\underline{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = -\underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0. \tag{3.35}$$

Комплексную матрицу узловых проводимостей $\underline{\mathbf{Y}}$ иногда представляют в блочной форме через ее вещественную **G** и мнимую **B** составляющие и тогда система уравнений (3.34) становится системой с вещественными величинами:

$$\left(\mathbf{G} + j\mathbf{B}\right) \cdot \left(\mathbf{U}' + j\mathbf{U}''\right) + \left(\mathbf{G}_0 + j\mathbf{B}_0\right) U_0 = 0. \tag{3.36}$$

После перемножения двучленов в (3.35), будем иметь:

$$\left(\mathbf{G} \cdot \mathbf{U}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}''\right) + j\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}''\right) + \mathbf{G}_0 U_0 + j\mathbf{B}_0 U_0 = 0. \tag{3.37}$$

Приравняем отдельно вещественные и мнимые части полученного уравнения и получим два матричных уравнения с вещественными величинами:

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}'-\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}''+\mathbf{G}_0U_0=0,\\ &\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}'+\mathbf{G}\cdot\mathbf{U}''+\mathbf{B}_0U_0=0 \end{aligned} \qquad (3.38)$$

или в компактной форме записи:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{G}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{U}''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{G}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix}U_0=0. \qquad (3.39)$$

Решение (3.39) запишется в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{U}''\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{G}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{G}_0\\ \mathbf{B}_0\end{pmatrix}U_0. \qquad (3.40)$$

Пример 2.

Рассчитать напряжения в узлах и токи в ветвях схемы электрической сети, граф которой изображен на рис. 3.10. Исходные данные для расчета и расчет представлен в системе Mathcad.

ORIGIN := 1

Единицы измерения $\quad \mathrm{kamp} \equiv 1000\cdot\mathrm{amp} \quad \mathrm{kvolt} \equiv 1000\cdot\mathrm{vol}$

Исходные данные

Напряжение базисного узла $\quad U_0 := 222\cdot\mathrm{kvol}$

Сопротивления ветвей и задающие токи узлов

$$Z_b := \begin{pmatrix} 3.63 + j\cdot 13.05\\ 4.84 + j\cdot 17.4\\ 2.42 + j\cdot 8.7\\ 5.445 + j\cdot 19.575\\ 6.05 + j\cdot 21.75 \end{pmatrix}\cdot\mathrm{ohm} \qquad J := -\begin{pmatrix} 0.525 - j\cdot 0.310\\ 0.750 - j\cdot 0.370\\ 0.420 - j\cdot 0.280 \end{pmatrix}\cdot\mathrm{kamp}$$

Расчетные данные

$$i := 1..5 \qquad Y_{b_i} := \frac{1}{Z_{b_i}} \qquad Y_b = \begin{pmatrix} 0.02 - 0.071i\\ 0.015 - 0.053i\\ 0.03 - 0.107i\\ 0.013 - 0.047i\\ 0.012 - 0.043i \end{pmatrix}\mathrm{siemen}$$

Модель электрической сети

1. Составление матрицы инциденций узлов и ветвей **M**

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Формирование диагональной матрицы проводимостей ветвей **Y**

$$Y_{i,i} := Yb_i$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.02-0.071i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015-0.053i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03-0.107i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.013-0.047i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.012-0.043i \end{pmatrix} \text{siemen}$$

3. Составление матрицы-столбца проводимостей ветвей, связывающих узлы схемы с базисным узлом $\mathbf{Y}_0$

$$Y_0 := -\begin{pmatrix} Yb_1 \\ Yb_5 \\ Yb_3 \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} -0.02+0.071i \\ -0.012+0.043i \\ -0.03+0.107i \end{pmatrix} \text{siemen}$$

4. Получение матрицы узловых проводимостей **Y**

$$Y := M \cdot Y \cdot M^T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.035-0.124i & -0.015+0.053i & 0 \\ -0.015+0.053i & 0.04-0.143i & -0.013+0.047i \\ 0 & -0.013+0.047i & 0.043-0.154i \end{pmatrix} \text{siemen}$$

Вычисления

1. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

$$Z := Y^{-1}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 2.522+9.066i & 1.044+3.753i & 0.321+1.155i \\ 1.044+3.753i & 2.436+8.758i & 0.75+2.695i \\ 0.321+1.155i & 0.75+2.695i & 1.906+6.852i \end{pmatrix} \text{ohm}$$

$$U := Z \cdot \left(J - Y_0 \cdot U_0\right) \qquad U = \begin{pmatrix} 215.236-6.802i \\ 214.152-8.236i \\ 217.195-4.595i \end{pmatrix} \text{kvol}$$

2. Расчет других параметров режим сети

$U_b := M^T \cdot (U - U_0)$	$U_b = \begin{pmatrix} 6.764 + 6.802i \\ 1.084 + 1.434i \\ 4.805 + 4.595i \\ 3.043 + 3.641i \\ 7.848 + 8.236i \end{pmatrix} \text{kvolt}$	Напряжения ветвей.

$I := \overrightarrow{(Y_b \cdot U_b)}$	$I = \begin{pmatrix} 0.618 - 0.347i \\ 0.093 - 0.037i \\ 0.633 - 0.376i \\ 0.213 - 0.096i \\ 0.445 - 0.237i \end{pmatrix} \text{kamp}$	Токи ветвей.

3. Проверка результатов: сумма задающих токов должна быть равна току балансирующего узла с обратным знаком

$Js := \sum J$	$Js = -1.695 + 0.96i\text{kamp}$	Сумма задающих токов

$I := I_1 + I_3 + I_5$	$I = 1.695 - 0.96i\text{kamp}$	Ток балансирующего узла (знаки с учетом направлений токов на схеме сети).

3.6. Нелинейные уравнения установившегося режима

Так как во многих случаях расчеты ведутся при заданных мощностях нагрузок и генерации, то их следует ввести в уравнения установившегося режима.

Мощность в трехфазной сети в симметричных режимах выражается суммарной мощностью всех трех фаз:

$$\underline{S}_i = \sqrt{3}\underline{U}_i \underline{J}_i^*. \qquad (3.41)$$

В матричной форме это выражение можно записать, используя операцию диагонализации матрицы $\underline{\mathbf{U}}$. Матрица $\mathrm{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\}$ есть квадратная матрица, в которой элементы матрицы $\underline{\mathbf{U}}$ расположены по главной диагонали, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

$$\underline{\mathbf{S}} = \sqrt{3} \cdot \mathrm{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \qquad (3.42)$$

Уравнение установившегося режима $\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}$ записано для фазных токов и напряжений. Умножим обе части этого уравнения на $\sqrt{3}$ и применим к величинам этого уравнения операцию сопряжения, получим

$$\underline{\mathbf{Y}}^* \cdot \underline{\mathbf{U}}^* + \underline{\mathbf{Y}}_0^* U_0 = \sqrt{3} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*. \qquad (3.43)$$

В левой части этого уравнения после умножения на $\sqrt{3}$ напряжения стали линейными.

Умножим левую и правую части уравнения (3.43) слева на матрицу diag$\{\underline{\mathbf{U}}\}$, получим

$$\operatorname{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\}\cdot\left(\underline{\mathbf{Y}}^{*}\cdot\underline{\mathbf{U}}^{*}+\underline{\mathbf{Y}}_{0}^{*}U_{0}\right)=\sqrt{3}\cdot\operatorname{diag}\{\underline{\mathbf{U}}\}\cdot\underline{\mathbf{J}}^{*}=\underline{\mathbf{S}}. \tag{3.44}$$

Система уравнений (3.44) является системой нелинейных уравнений установившегося режима. В зависимости от формы представления комплексных величин применяют две основные формы этой системы уравнений.

В начале, рассмотрим алгебраическую форму записи. Для i-го узла имеем:

$$\left(U_i'+jU_i''\right)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(G_{ij}-jB_{ij}\right)\cdot\left(U_j'-jU_j''\right)=P_i+jQ_i. \tag{3.45}$$

После перемножения двучленов и разделения уравнения на два уравнения с вещественными величинами получим систему $2(n-1)$ алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}&U_i'\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(G_{ij}U_j'-B_{ij}U_j''\right)+U_i''\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(B_{ij}U_j'+G_{ij}U_j''\right)=P_i,\\&-U_i'\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(B_{ij}U_j'+G_{ij}U_j''\right)+U_i''\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left(G_{ij}U_j'-B_{ij}U_j''\right)=Q_i.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Здесь $i = 1,\dots, n-1$.

Тригонометрическая форма нелинейных уравнений установившегося режима может быть получена, если комплексные величины в уравнении (3.44) записать в виде:

$$\underline{U}_i=U_1e^{j\delta_i},\ \underline{Y}_{ij}^{*}=Y_{ij}e^{-j\psi_{ij}},\ \underline{U}_j^{*}=U_je^{-j\delta_j}, \tag{3.47}$$

Тогда

$$U_i\sum_{j=0}^{n-1}Y_{ij}U_je^{j(\delta_i-\psi_{ij}-\delta_j)}=P_i+jQ_i. \tag{3.48}$$

Уравнение (3.48) в тригонометрической форме запишется как

$$U_i\sum_{j=0}^{n-1}Y_{ij}U_j\left(\cos(\delta_i-\delta_j-\psi_{ij})+j\sin(\delta_i-\delta_j-\psi_{ij})\right)=P_i+jQ_i \tag{3.49}$$

$$U_i\sum_{j=0}^{n-1}Y_{ij}U_j\left(\cos(\delta_i-\delta_j-\psi_{ij})+j\sin(\delta_i-\delta_j-\psi_{ij})\right)=P_i+jQ_i \tag{3.50}$$

и после разделения на два вещественных уравнения

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = P_i,$$
$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = Q_i. \qquad (3.51)$$

Обычно вместо угла ψ_{ij} используют дополняющий до 90° угол α_{ij}. $\alpha_{ij} = 90 - \psi_{ij}$, $\psi_{ij} = 90 - \alpha_{ij}$.

Тогда $\cos(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \cos(\delta_i - \delta_j - 90° + \alpha_{ij})$, а с учетом четности функции косинус $\cos(\delta_i - \delta_j - 90° + \alpha_{ij}) = \cos(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$. Имея в виду, что $\cos(90° - \beta) = \sin(\beta)$, получим: $\cos(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$.

Аналогично $\sin(\delta_i - \delta_j - \psi_{ij}) = \sin(\delta_i - \delta_j - 90 + \alpha_{ij}) = -\sin(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij})$, в силу нечетности функции синус. Так как $\sin(90° - \beta) = \cos(\beta)$, получим: $-\sin(90° - \delta_i + \delta_j - \alpha_{ij}) = -\cos(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ij})$. Подставляя полученные соотношения в (3.51), будем иметь:

$$U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \sin(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = P_i,$$
$$-U_i \sum_{j=0}^{n-1} Y_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j + \psi_{ij}) = Q_i. \qquad (3.52)$$

В полученной системе нелинейных уравнений установившегося режима искомыми переменными являются модули и фазовые углы напряжений, в то время как в уравнениях (3.46) неизвестными являются вещественная и мнимая составляющие напряжений.

Пример 3. Рассчитать напряжения в узлах и потоки мощности в ветвях схемы сети, граф которой изображен на рис. 3.10. Исходные данные для расчета и расчет представлен в системе Mathcad.

ORIGIN := 1

Единицы измерения $\quad kvolt \equiv 1000 \cdot volt \quad MVA \equiv 10^3 \cdot kvolt \cdot amp$

$Mwatt \equiv MVA \quad Mvar \equiv MVA$

Исходные данные

Погонные параметры ЛЭП

$$z0 := \begin{pmatrix} 0.121 + j \cdot 0.435 \\ 0.121 + j \cdot 0.435 \\ 0.098 + j \cdot 0.429 \\ 0.075 + j \cdot 0.420 \\ 0.075 + j \cdot 0.420 \end{pmatrix} \cdot \frac{ohm}{km} \qquad b0 := \begin{pmatrix} 2.60 \\ 2.60 \\ 2.64 \\ 2.70 \\ 2.70 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{siemens}{km} \qquad l := \begin{pmatrix} 98 \\ 75 \\ 120 \\ 115 \\ 144 \end{pmatrix} \cdot km$$

$$P_L := \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix} \cdot Mwatt \qquad Q_L := \begin{pmatrix} 30 \\ 65 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot Mvar$$ Мощности нагрузок узлов

$S_L := P_L + i \cdot Q_L$ Комплексы мощностей нагрузок узлов

$S := -S_L$ Задающие мощности узлов.

$Unom := 220 \cdot kvolt$ Номинальное напряжение сети.

$U0 := 222 \cdot kvolt$ Напряжение базисного узла.

Модель электрической сети

1. Расчетные параметры ЛЭП

$$Z := \overrightarrow{z0 \cdot l} \qquad B := \overrightarrow{i \cdot b0 \cdot l}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 11.858 + 42.63i \\ 9.075 + 32.625i \\ 11.76 + 51.48i \\ 8.625 + 48.3i \\ 10.8 + 60.48i \end{pmatrix} ohm \qquad B = \begin{pmatrix} 2.548i \times 10^{-4} \\ 1.95i \times 10^{-4} \\ 3.168i \times 10^{-4} \\ 3.105i \times 10^{-4} \\ 3.888i \times 10^{-4} \end{pmatrix} siemen$$

2. Составление матрицы инциденций узлов и ветвей **M**

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Формирование матрицы проводимостей ветвей Yv

$$i := 1 .. 5$$

$$Y_{b_{i,i}} := \left(\frac{1}{Z_i}\right)$$

$$Y_b = \begin{pmatrix} 0.006 - 0.022i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008 - 0.028i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004 - 0.018i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.004 - 0.02i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 - 0.016i \end{pmatrix} siemens$$

4. Получение матрицы узловых проводимостей Y

$$Y := M \cdot Y_b \cdot M^T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.014-0.05i & -0.008+0.028i & 0 \\ -0.008+0.028i & 0.014-0.065i & -0.004+0.02i \\ 0 & -0.004+0.02i & 0.008-0.039i \end{pmatrix} \text{siemens}$$

5. Емкостные проводимости поперечных ветвей Yc

$$Yc_1 := \frac{B_1+B_2}{2} \qquad Yc_2 := \frac{B_2+B_5+B_4}{2} \qquad Yc_3 := \frac{B_3+B_4}{2}$$

6. Корректировка диагональных элементов матрицы Y

$$Y_{1,1} := Y_{1,1} + Yc_1 \qquad Y_{2,2} := Y_{2,2} + Yc_2 \qquad Y_{3,3} := Y_{3,3} + Yc_3$$

7. Расширение матрицы узловых проводимостей путем добавления столбца для базисного балансирующего узла

$$Y_{1,4} := \frac{-1}{Z_1} \qquad Y_{2,4} := \frac{-1}{Z_5} \qquad Y_{3,4} := \frac{-1}{Z_3}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.014-0.05i & -0.008+0.028i & 0 & -0.006+0.022i \\ -0.008+0.028i & 0.014-0.064i & -0.004+0.02i & -0.003+0.016i \\ 0 & -0.004+0.02i & 0.008-0.038i & -0.004+0.018i \end{pmatrix} \text{siemens}$$

Вычисления

1. Решение системы нелинейных уравнений установившегося режима

Начальные приближения

$$U1 := (1.0 - i\cdot 0.15)\cdot Unom \qquad U2 := U1 \qquad U3 := U1$$

Решающий блок – приближенное решение

Given

$$U1\cdot\left(\overline{Y_{1,1}}\cdot\overline{U1} + \overline{Y_{1,2}}\cdot\overline{U2} + \overline{Y_{1,3}}\cdot\overline{U3} + \overline{Y_{1,4}}\cdot U0\right) = S_1$$

$$U2\cdot\left(\overline{Y_{2,1}}\cdot\overline{U1} + \overline{Y_{2,2}}\cdot\overline{U2} + \overline{Y_{2,3}}\cdot\overline{U3} + \overline{Y_{2,4}}\cdot U0\right) = S_2$$

$$U3\cdot\left(\overline{Y_{3,1}}\cdot\overline{U1} + \overline{Y_{3,2}}\cdot\overline{U2} + \overline{Y_{3,3}}\cdot\overline{U3} + \overline{Y_{3,4}}\cdot U0\right) = S_3$$

$$\begin{pmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \end{pmatrix} := \text{Find}(U1, U2, U3) \qquad \begin{pmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206.886-18.347i \\ 202.435-22.87i \\ 199.97-23.759i \end{pmatrix} \text{kvol}$$

Результат решения – узловые напряжения (в экспоненциальной форме записи)

$$\begin{pmatrix} |U1| \\ |U2| \\ |U3| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207.698 \\ 203.722 \\ 201.377 \end{pmatrix} \text{kvolt} \qquad \begin{pmatrix} \arg(U1) \\ \arg(U2) \\ \arg(U3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.068 \\ -6.446 \\ -6.776 \end{pmatrix} \text{deg}$$

2. Расчет других параметров режима сети

Напряжения в начале и конце ветвей и токи узлов ветвей

$$U_b := \begin{pmatrix} U0 \\ U1 \\ U0 \\ U3 \\ U0 \end{pmatrix} \qquad U_e := \begin{pmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U2 \\ U2 \end{pmatrix} \qquad I := \overrightarrow{\frac{U_b - U_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{Z}} \qquad \overrightarrow{|I|} = \begin{pmatrix} 310.156 \\ 108.203 \\ 354.244 \\ 30.822 \\ 282.841 \end{pmatrix} \text{amp}$$

Мощности в начале и конце ветвей

$$S_b := \overrightarrow{\sqrt{3} \cdot U_b \cdot \bar{I}} - \overrightarrow{\left(\overrightarrow{|U_b|}\right)^2 \cdot \frac{B}{2}} \qquad S_b = \begin{pmatrix} 109.002 + 42.109i \\ 35.58 + 11.581i \\ 117.999 + 60.237i \\ -6.428 - 14.913i \\ 93.783 + 45.49i \end{pmatrix} \text{MVA}$$

$$S_e := \overrightarrow{\sqrt{3} \cdot U_e \cdot \bar{I}} + \overrightarrow{\left(\overrightarrow{|U_e|}\right)^2 \cdot \frac{B}{2}} \qquad S_e = \begin{pmatrix} 105.58 + 41.581i \\ 35.262 + 18.688i \\ 113.572 + 55.087i \\ -6.453 - 2.312i \\ 91.191 + 48.624i \end{pmatrix} \text{MVA}$$

Потери мощности в ветвях

$$dP := \mathrm{Re}\left(S_b - S_e\right) \qquad dP = \begin{pmatrix} 3.422 \\ 0.319 \\ 4.427 \\ 0.025 \\ 2.592 \end{pmatrix} \text{Mwatt}$$

$$dQ := \mathrm{Im}\left(S_b - S_e\right) \qquad dQ = \begin{pmatrix} 0.528 \\ -7.107 \\ 5.15 \\ -12.601 \\ -3.134 \end{pmatrix} \text{Mvar}$$

3. Проверка результатов расчета: сумма мощностей узлов, потерь и зарядной мощности в сети должна быть равна мощности балансирующего узла

$$\sum P_L + \sum dP + i \cdot \left(\sum Q_L + \sum dQ\right) = 320.785 + 147.836i\text{MVA}$$

Мощность балансирующего узла $\quad S_{b_1} + S_{b_3} + S_{b_5} = 320.785 + 147.836i\text{MVA}$

3.7. Моделирование генераторных узлов электрической сети

Генераторными узлами называют узлы, в которых генерируется активная мощность. Реактивная мощность, как правило, также генерируется в таких узлах. Генераторные узлы – это шины электрических станций или шины мощной системы, схема которой не входит в модель для расчетной схемы. Моделируются генераторные узлы по разному:

- Так же как и узел нагрузки – постоянными значениями активной и реактивной мощности, но с противоположным знаком.
- Постоянным значением активной мощности и фиксированным значением модуля напряжения в узле. Реактивная мощность не известна и подлежит расчету.
- Генераторный узел это базисный и балансирующий узел одновременно. Активная и реактивная мощности узла подлежат вычислению.
- Генераторный узел это базисный узел, но с известными значениями активной и реактивной мощности – заданы все четыре независимых параметра режима – P, Q, U, δ.
- Генераторный узел это балансирующий узел, но напряжение в нем неизвестно ни по модули, ни по фазе. Подлежат определению все четыре независимых параметра режима – P, Q, U, δ.

При фиксации активной мощности и модуля напряжения обычно в уравнения установившегося режима входит уравнения для активной мощности узла (3.46) и уравнение вида: $U_i^2 = U_i'^2 + U_i''^2$, где U_i задано, а U'_i и U''_i подлежат определению.

В тех случаях, когда для одного из узлов требуется задать все четыре независимых параметра режима – P, Q, U, δ. (базисный узел), то в сети должен появиться узел, в котором не известен ни один из этих четырех параметров – балансирующий узел. Происходит разделение балансирующего и базисного узлов.

Форма уравнений установившегося режима меняется, а именно – перестраивается матрица узловых проводимостей. Так, например, если для графа сети на рис. 3.10 базисным стал узел 2, а балансирующим остался узел 0, то матрица $\underline{\mathbf{Y}}$ принимает вид:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right) & -\frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & -\frac{1}{\underline{Z}_4} \\ 0 & -\frac{1}{\underline{Z}_3} & \left(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}\right) \end{array}\right) & \left.\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right\}\text{Узлы без балансирующего} \\ \underbrace{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 3\end{array}}_{\text{Узлы без базисного}} & \end{array}$$

Пример 4. Рассчитать напряжения в узлах электрической сети, рис., при несовпадении базисного и балансирующего узлов.

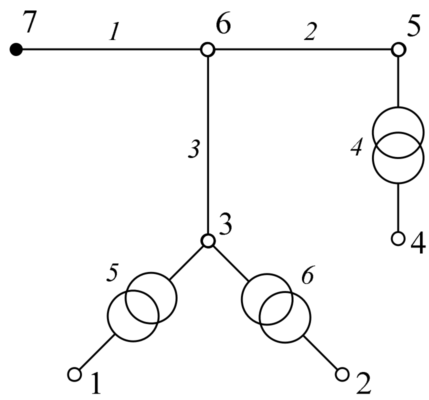


Рис. 3.11. Схема сети примера 4

Ветви 1, 2 и 3 графа это линии электропередачи 110 кВ, выполненные проводом марки АС-120/19 с погонными параметрами r_0 = 0,249 Ом/км; x_0 = 0,427 Ом/км; b_0 = 2,6 мкСм/км. Три двухобмоточных трансформатора имеют номинальные напряжение обмоток высшего и низшего напряжения соответственно 115 и 11 кВ.

Параметры линий и трансформаторов приведены в табл.

Таблица 3.1

Параметры ЛЭП

Наименование	Начало	Конец	Длина, км	*R*, Ом/км	*X*, Ом/км	*B*, мкСм/км
Л-1	7	6	7,2	1,79	3,07	19,2
Л-2	6	5	3,4	0,85	1,45	9,0
Л-3	6	3	12,3	3,06	5,25	32,7

Таблица 3.2

Параметры трансформаторов

Наименование	Начало	Конец	Тип	*R*,	*X*,	ΔP,	ΔQ,

				Ом	Ом	кВт	квар
Т-1	3	1	ТМН-6300/110	15,99	220,42	10	60
Т-2	3	2	ТДН-10000.110	7,93	136,86	15,1	60
Т-3	5	4	ТДН-16000/110	4,44	86,79	21,3	80

Мощности нагрузки даны для шин низкого напряжения трансформаторов – узлы 1 (T1), 2 (T2) и 4 (T3).

$P_{\text{Т1}} + jQ_{\text{Т1}} = 5{,}0 + j2{,}5$ МВ·А; $P_{\text{Т2}} + jQ_{\text{Т2}} = 7{,}0 + j3{,}5$ МВ·А;

$P_{\text{Т1}} + jQ_{\text{Т1}} = 12{,}0 + j6{,}0$ МВ·А;

Приведем два расчета: вначале расчет, когда базисный и балансирующий узлы совпадают – узел 7; и затем – балансирующим остается узел 7, а базисным является узел 5.Расчеты выполним в системе Mathcad. Сопротивления в омах, проводимости в сименсах, напряжения в киловольтах, мощности в мегаваттах.

Системная переменная начального номера массивов:

$$\boxed{\text{ORIGIN} := 1}$$

Исходные данные по линиям:

$$r_0 := 0.249 x_0 := 0.427 \quad b_0 := 2.66 \cdot 10^{-6} \quad z_0 := r_0 + j \cdot x_0$$

Расчетные данные по линиям:

$$Z_{L1} := z_0 \cdot L1 \quad Z_{L1} = 1.79 + 3.07i \quad B_{L1} := b_0 \cdot L1 \quad B_{L1} = 1.915 \times 10^{-5}$$

$$Z_{L2} := z_0 \cdot L2 \quad Z_{L2} = 0.85 + 1.45i \quad B_{L2} := b_0 \cdot L2 \quad B_{L2} = 9.044 \times 10^{-6}$$

$$Z_{L3} := z_0 \cdot L3 \quad Z_{L3} = 3.06 + 5.25i \quad B_{L3} := b_0 \cdot L3 \quad B_{L3} = 3.272 \times 10^{-5}$$

Исходные и расчетные данные по трансформаторам:

$$U_{nom110} := 115 \quad U_{nom10} := 11 \quad K_T := \frac{115}{11} \quad K_T = 10.45$$

$$T1 \quad R_{T1} := 15.99 \quad X_{T1} := 220.42 \quad \Delta P_{xT1} := 10 \cdot 10^{-3} \quad \Delta Q_{xT1} := 0.06$$

$$T2 \quad R_{T2} := 7.93 \quad X_{T2} := 136.86 \quad \Delta P_{xT2} := 15.1 \cdot 10^{-3} \quad \Delta Q_{xT2} := 0.06$$

$$T3 \quad R_{T3} := 4.44 \quad X_{T3} := 86.79 \quad \Delta P_{xT3} := 21.3 \cdot 10^{-3} \quad \Delta Q_{xT3} := 0.08$$

Исходные данные по мощностям нагрузок:

$$P_{T1} := 5.0 \quad P_{T2} := 7 \quad P_{T3} := 12$$

$$Q_{T1} := 2.5 \quad Q_{T2} := 3.5 \quad Q_{T3} := 6$$

Вектор проводимостей продольных ветвей и вектор проводимостей связи независимых узлов с базисным узлом (в первом расчете – узел 7):

$$Y_b := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{Z_{L1}} \\ \dfrac{1}{Z_{L2}} \\ \dfrac{1}{Z_{L3}} \\ \dfrac{K_T}{R_{T3} + j \cdot X_{T3}} \\ \dfrac{K_T}{R_{T1} + j \cdot X_{T1}} \\ \dfrac{K_T}{R_{T2} + j \cdot X_{T2}} \end{pmatrix} \qquad Y_7 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{Z_{L1}} \end{pmatrix} \qquad Y_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.14 + 0.24i \end{pmatrix}$$

Матрица инциденций **M** и матрица узловых проводимостей:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y := M \cdot \mathrm{diag}\left(Y_b\right) \cdot M^T$$

Корректировка диагональных элементов матрицы узловых проводимостей для учета поперечных ветвей П-образных схем замещения линий и трансформаторов:

$$Y_{1,1} := Y_{1,1} + \frac{K_T \cdot \left(K_T - 1\right)}{R_{T1} + j \cdot X_{T1}} \qquad Y_{2,2} := Y_{2,2} + \frac{K_T \cdot \left(K_T - 1\right)}{R_{T2} + j \cdot X_{T2}}$$

$$Y_{3,3} := Y_{3,3} + \frac{1 - K_T}{R_{T1} + j \cdot X_{T1}} + \frac{1 - K_T}{R_{T2} + j \cdot X_{T2}} + \frac{j \cdot B_{L3}}{2} \qquad Y_{4,4} := Y_{4,4} + \frac{K_T \cdot \left(K_T - 1\right)}{R_{T3} + j \cdot X_{T3}}$$

$$Y_{5,5} := Y_{5,5} + \frac{1 - K_T}{R_{T3} + j \cdot X_{T3}} + \frac{j \cdot B_{L2}}{2} \qquad Y_{6,6} := Y_{6,6} + \frac{j \cdot \left(B_{L1} + B_{L2} + B_{L3}\right)}{2}$$

Результирующая матрица узловых проводимостей:

$$Y = \begin{pmatrix} 0.04-0.49i & 0 & -0+0.05i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05-0.8i & -0+0.08i & 0 & 0 & 0 \\ -0+0.05i & -0+0.08i & 0.08-0.15i & 0 & 0 & -0.08+0.14i \\ 0 & 0 & 0 & 0.06-1.26i & -0.01+0.12i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01+0.12i & 0.3-0.53i & -0.3+0.51i \\ 0 & 0 & -0.08+0.14i & 0 & -0.3+0.51i & 0.52-0.9i \end{pmatrix}$$

Матрица задающих мощностей в узлах сети:

$$S := \begin{bmatrix} -\left(P_{T1}+j\cdot Q_{T1}\right) \\ -\left(P_{T2}+j\cdot Q_{T2}\right) \\ -\left(\Delta P_{xT1}+\Delta P_{xT2}+j\cdot\Delta Q_{xT1}+j\cdot\Delta Q_{xT2}\right) \\ -\left(P_{T3}+j\cdot Q_{T3}\right) \\ -\left(\Delta P_{xT3}+j\cdot\Delta Q_{xT3}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -5-2.5i \\ -7-3.5i \\ -0.03-0.12i \\ -12-6i \\ -0.02-0.08i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Напряжение в базисном узле и начальные приближения напряжений в узлах:

$$i := 1..6 \quad U_7 := 115$$

$$U := \begin{pmatrix} U_{nom10} \\ U_{nom10} \\ U_{nom110} \\ U_{nom10} \\ U_{nom110} \\ U_{nom110} \end{pmatrix}\cdot(1-0.1i) \qquad U = \begin{pmatrix} 11-1.1i \\ 11-1.1i \\ 115-11.5i \\ 11-1.1i \\ 115-11.5i \\ 115-11.5i \end{pmatrix}$$

Решающий блок:

Given

$$\mathrm{diag}(U)\cdot\left(\overline{Y}\cdot\overline{U}+\overline{Y_7}\cdot\overline{U_7}\right) = S$$

$$U := \mathrm{Find}(U)$$

$$U = \begin{pmatrix} 10.21-0.97i \\ 10.33-0.86i \\ 113.57-0.79i \\ 10.33-0.9i \\ 114.05-0.52i \\ 114.23-0.43i \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{|U|} = \begin{pmatrix} 10.26 \\ 10.36 \\ 113.57 \\ 10.37 \\ 114.05 \\ 114.23 \end{pmatrix}$$

Выполним расчет для случая, когда базисным узлом является узел 5, а балансирующим остается узел 7. Поменяем в матрице **Y** столбец, соответствующий узлу 5; теперь это столбец проводимостей связи узлов с узлом 7. Прежний столбец матрицы Y для узла 5 войдет в систему уравнений умноженным на известное напряжение узла 5 – напряжение базисного узла.

$$Y_5 := Y^{\langle 5 \rangle} \qquad Y^{\langle 5 \rangle} := Y_7 \qquad Y_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01+0.12i \\ 0.3-0.53i \\ -0.3+0.51i \end{pmatrix}$$

Матрица узловых проводимостей для нового расчета:

$$Y = \begin{pmatrix} 0.04-0.49i & 0 & -0+0.05i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05-0.8i & -0+0.08i & 0 & 0 & 0 \\ -0+0.05i & -0+0.08i & 0.08-0.15i & 0 & 0 & -0.08+0.14i \\ 0 & 0 & 0 & 0.06-1.26i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01+0.12i & 0 & -0.3+0.51i \\ 0 & 0 & -0.08+0.14i & 0 & -0.14+0.24i & 0.52-0.9i \end{pmatrix}$$

Матрица не является симметричной и на диагонали имеется один нулевой элемент.

Напряжение нового базисного узла возьмем для сравнения результатов расчета таким, каким оно получилось в предыдущем расчете:

$$U_5 := |U_5| \qquad U_5 = 114.05$$

Решающий блок:

Given

$$\mathrm{diag}(U) \cdot \left(\overline{Y} \cdot \overline{U} + \overline{Y_5} \cdot \overline{U_5}\right) = S$$

$$U := \mathrm{Find}(U) \qquad U = \begin{pmatrix} 10.22-0.92i \\ 10.33-0.81i \\ 113.57-0.26i \\ 10.33-0.85i \\ 115+0.53i \\ 114.23+0.1i \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{|U|} = \begin{pmatrix} 10.26 \\ 10.36 \\ 113.57 \\ 10.37 \\ 115 \\ 114.23 \end{pmatrix}$$

В векторе узловых напряжений на 5-м месте расположено значение напряжения в узле 7, которое являлось искомым и получилось именно таким, каким было задано в первом расчете. Все остальные напряжения совпадают с прежними значениями.

3.8. Эквивалентирование схем электрических сетей

Эквивалентирование широко применяется в расчетах режимов сложных электроэнергетических систем. Так, рассматривая режимы работы отдельной ЭЭС, все соседние энергосистемы представляем их эквивалентами, полученными на основании так называемых критериев эквивалентности. Число таких критериев и их содержание зависят от задачи, применительно к которой выполняется эквивалентирование.

Рассмотрим ЭЭС, состоящую из двух подсистем: подсистема I, которая не подлежит преобразованию и подсистема II, которую следует преобразовать в эквивалент (рис. 3.12, *а*).

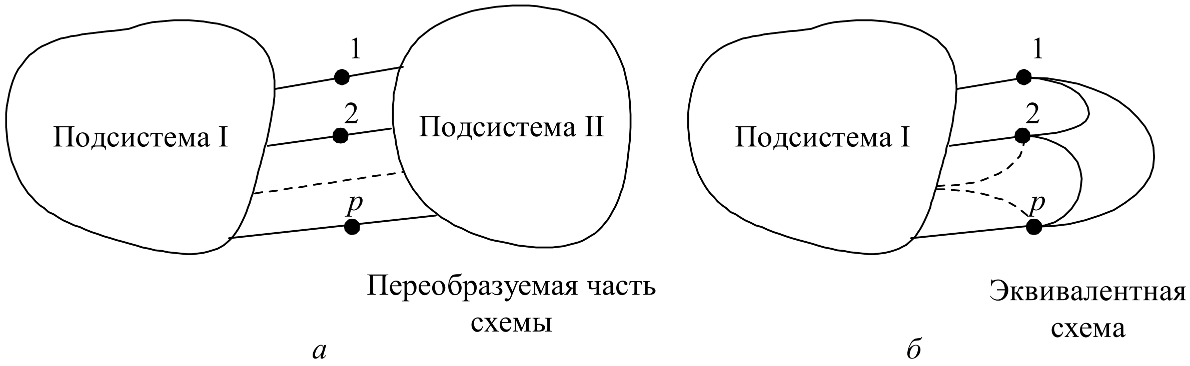


Рис. 3.12. Условное изображение ЭЭС с эквивалентируемой частью: *а* – до эквивалентирования; *б* – после эквивалентирования

Узлы, в которых соединяются две подсистемы, называются узлами примыкания, а ветви, подходящие к ним со стороны сохраняемой части схемы, – ветвями примыкания. После преобразования подсистемы II в ней могут сохраниться некоторые узлы, имеющие принципиальное значение для режимов системы, или не сохраниться ни одного узла, как на рис. 3.12, *б*, и вся схема эквивалента представляет собой многоугольник, построенный на узлах примыкания 1, 2,…, *p*. Следует отметить, что эквивалент имеет также поперечные ветви на нейтральную плоскость системы как пассивные – проводимости, так и активные – задающие мощности нагрузки и генерации (на рис. 3.12 не показаны).

Рассчитанные напряжения в узлах примыкания эквивалента должны быть равны в исходной схеме и после ее преобразования.

Потоки мощности в ветвях примыкания эквивалента должны быть равны в исходной схеме и после ее преобразования.

$$\begin{aligned} &\underline{\mathbf{U}}_j = \underline{\mathbf{U}}_j^{э},\ j \in a, \\ &\underline{\mathbf{S}}_{ij} = \underline{\mathbf{S}}_{ij}^{э},\ i \in b. \end{aligned} \tag{3.53}$$

где *a* – множество номеров узлов примыкания; *b* – множество номеров узлов в непреобразуемой части сети, имеющих смежную ветвь с узлами примыкания.

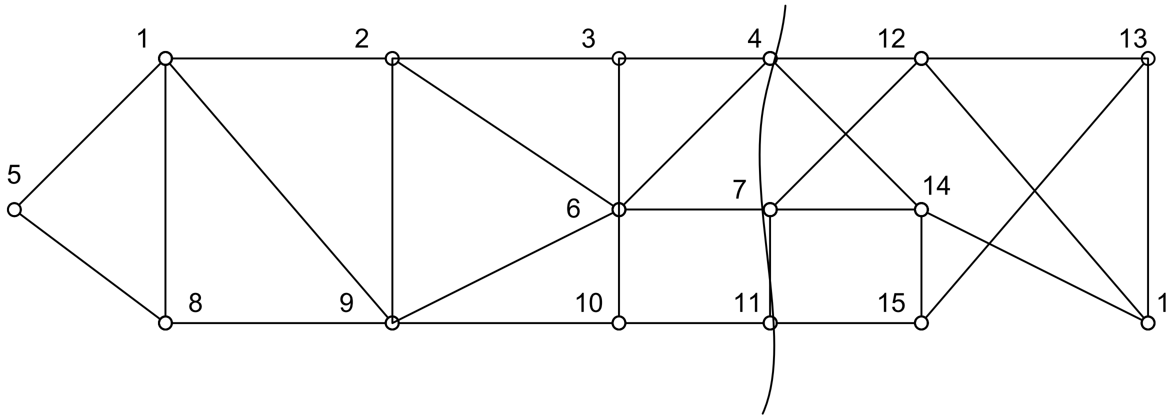
Добиться выполнения критериев эквивалентности можно, как правило, для какого-то одного режима работы электрической системы.

Изменение режима требует и изменения (корректировки) эквивалента.

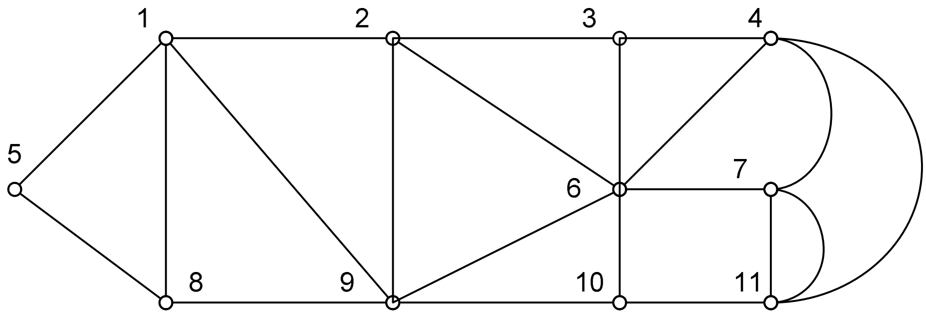
Рассмотрим пример эквивалентирования части электрической схемы сети, рис. 3.13, *а*. В этом примере: множество номеров узлов примыкания – *а*

= {4, 7, 11}; и множество номеров узлов из неэквивалентируемой части схемы, смежных с узлами примыкания – b = {3, 6, 10}.

Исключаемые узлы: {12, 13, 14, 15, 16}.



а



б

Рис. 3.13. Граф сети с эквивалентируемой частью: *а* – до эквивалентирования, *б* – после эквивалентирования

В данном примере в эквиваленте не сохранено ни одного узла и граф эквивалента представляет из себя многоугольник, опирающийся своими вершинами на узлы примыкания, рис. 3.14.

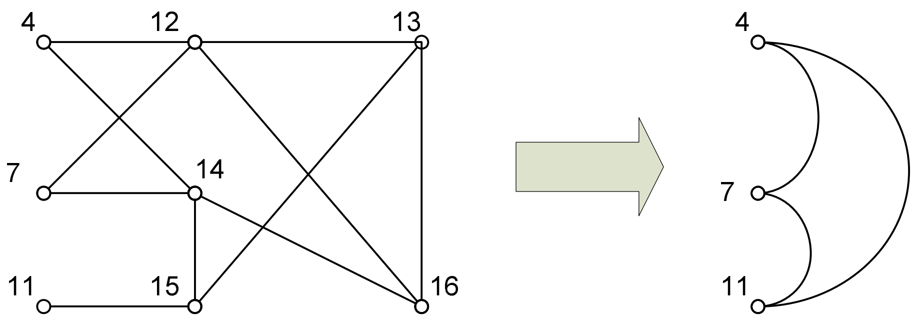


Рис. 3.14. Эквивалентирование схемы в многоугольник

По сути – это последовательно-паралелльные преобразования, а также преобразования звезды в многоугольник и обратно. Формализуется исключением переменных методом Гаусса.

При построении модели эквивалента, адекватно представляющего преобразованную часть электрической системы для множества режимов, требуется учет нелинейности уравнений установившегося режима.

В этом случае, а также в случаях эквивалентирования путем расчета проводимостей нагрузки через номинальное напряжение неизбежна погрешность моделирования.

Минимизация погрешности может быть выполнена путем поиска минимума некоторой целевой функции:

$$C_1(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^{m} \left[\left(y'_j - y'^{э}_j(\mathbf{R}) \right) / y'_j \right]^2 , \qquad (3.54)$$

где y'_{j} и $y''^{э}_{\mathrm{j}}$ – компоненты вектора выходных переменных исходной и эквивалентной моделей, которые должны воспроизводится правильно;

R - вектор параметров эквивалентной модели; m – число выходных переменных.

Пример

Для схемы на рис 3.15 выполним исключение узлов номер 4 и 5

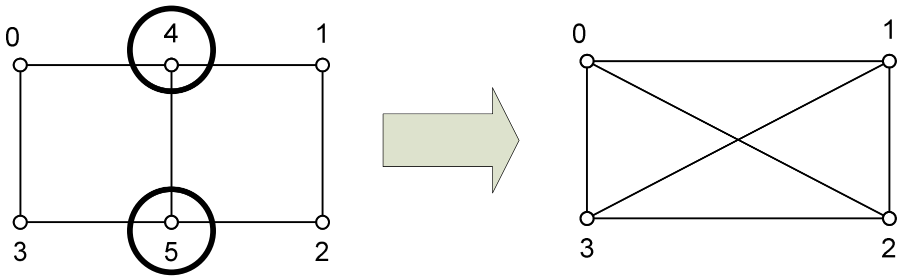


Рис. 3.15. Пример эквивалентирования схемы сети

Разделим на блоки матрицы в линейных уравнениях установившегося режима (3.28) - выделим блоки для сохраняемых и исключаемых узлов.

Обозначим вектор задающих токов сохраняемых узлов: $\underline{\mathbf{J}}_{\text{с}} = \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \end{pmatrix}$, а вектор токов исключаемых узлов $\underline{\mathbf{J}}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} \underline{J}_4 \\ \underline{J}_5 \end{pmatrix}$. Соответственно и для напряжений $\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix}$ $\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix}$.

Уравнение узловых напряжений для электрической сети

$$\underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}.$$

Запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}} & \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}} & \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} \\ \underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}} \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}} \\ \underline{\mathbf{J}}_{\text{и}} \end{pmatrix}.$$

Или в раскрытой форме:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & 0 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{14} & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{25} \\ 0 & \underline{Y}_{35} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{Y}_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{52} & \underline{Y}_{53} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{Y}_{44} & \underline{Y}_{45} \\ \underline{Y}_{54} & \underline{Y}_{55} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{01} \\ 0 \\ \underline{Y}_{03} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{Y}_{04} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{J}_4 \\ \underline{J}_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с правилом умножения матриц получим

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}}U_0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}}U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}} \\ \underline{\mathbf{J}}_{\text{и}} \end{pmatrix}.$$

Откуда следует систему двух матричных уравнений

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}}U_0 = \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}},$$
$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}}U_0 = \underline{\mathbf{J}}_{\text{и}}.$$

Исключим из этой системы $\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}}$. Для этого умножим правую и левую части второго уравнения на матрицу $\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}$ и получим

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}}U_0 = \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{J}}_{\text{и}},$$

откуда следует

$$\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} = \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{J}}_{\text{и}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}}U_0.$$

Подставляя теперь полученное выражение в уравнение $\underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{и}} + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}}U_0 = \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}}$ находим

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\left(\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{J}}_{\text{и}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\mathbf{Y}_{0\text{и}}U_0\right) + \underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}}U_0 = \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}},$$

откуда

$$\left(\underline{\mathbf{Y}}_{\text{сс}}\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ис}}\right)\underline{\mathbf{U}}_{\text{с}} + \left(\underline{\mathbf{Y}}_{0\text{с}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{Y}}_{0\text{и}}\right)U_0 = \underline{\mathbf{J}}_{\text{с}} - \underline{\mathbf{Y}}_{\text{си}}\underline{\mathbf{Y}}_{\text{ии}}^{-1}\underline{\mathbf{J}}_{\text{и}}$$

или

$$\underline{\mathbf{Y}}'\,\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{Y}}'_0 U_0 = \underline{\mathbf{J}}'$$

и в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}'_{11} & \underline{Y}'_{12} & \underline{Y}'_{13} \\ \underline{Y}'_{21} & \underline{Y}'_{22} & \underline{Y}'_{23} \\ \underline{Y}'_{31} & \underline{Y}'_{32} & \underline{Y}'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{Y}'_{01} \\ \underline{Y}'_{02} \\ \underline{Y}'_{03} \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} \underline{J}'_1 \\ \underline{J}'_2 \\ \underline{J}'_3 \end{pmatrix}.$$

Полученная система уравнений описывает новую схему, где по отношению к исходной отсутствуют два узла 4 и 5. При этом в данном примере изменились все параметры сети и задающие токи узлов.

Эквивалентирование части ЭЭС обычно выполняется применительно не для одного, а для ряда режимов непреобразуемой подсистемы, поэтому удовлетворение критериев эквивалентности должно обеспечить тождественность режима узлов и ветвей примыкания исходной и преобразованной схем не только для исходного, но и для всех других анализируемых режимов.

3.9. Моделирование схем электрических сетей с помощью четырехполюсников

Часть электрической цепи, рассматриваемая по отношению к двум парам ее выводов, называется четырехполюсником. Ранее здесь использовалось представление четырехполюсником ЛЭП и трансформаторов, однако, существует возможность представления в виде четырехполюсника и соединений этих элементов – схем электрических сетей.

Моделирование четырехполюсником удобно применять тогда, когда предметом исследования являются токи (потоки мощности) и напряжения на его выводах, а не токи и напряжения внутри самого четырехполюсника.

По свойству линейности элементов четырехполюсники разделяют на *линейные* и *нелинейные*.

Схема замещения (внутренняя схема соединений) четырехполюсника может быть: Г-образная (рис. 3.16, *а*), Т-образная (рис. 3.16, *б*), П-образная (рис. 3.16, *в*), четырехплечевая (рис. 3.16, *г*), П-образная мостовая (рис. 3.16, *д*), Т-образная мостовая (рис. 3.16, *е*) и др.

Четырехполюсник называется *активным*, если он внутри содержит источники электрической энергии, и *пассивным*, если внутри его нет источников энергии.

Различают четырехполюсники *симметричные* и *несимметричные*. Симметричным называют четырехполюсник, когда перемена мест его входа и выхода не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен.

Основной смысл теории четырехполюсников заключается в том, что, пользуясь обобщенными параметрами четырехполюсников, можно находить токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

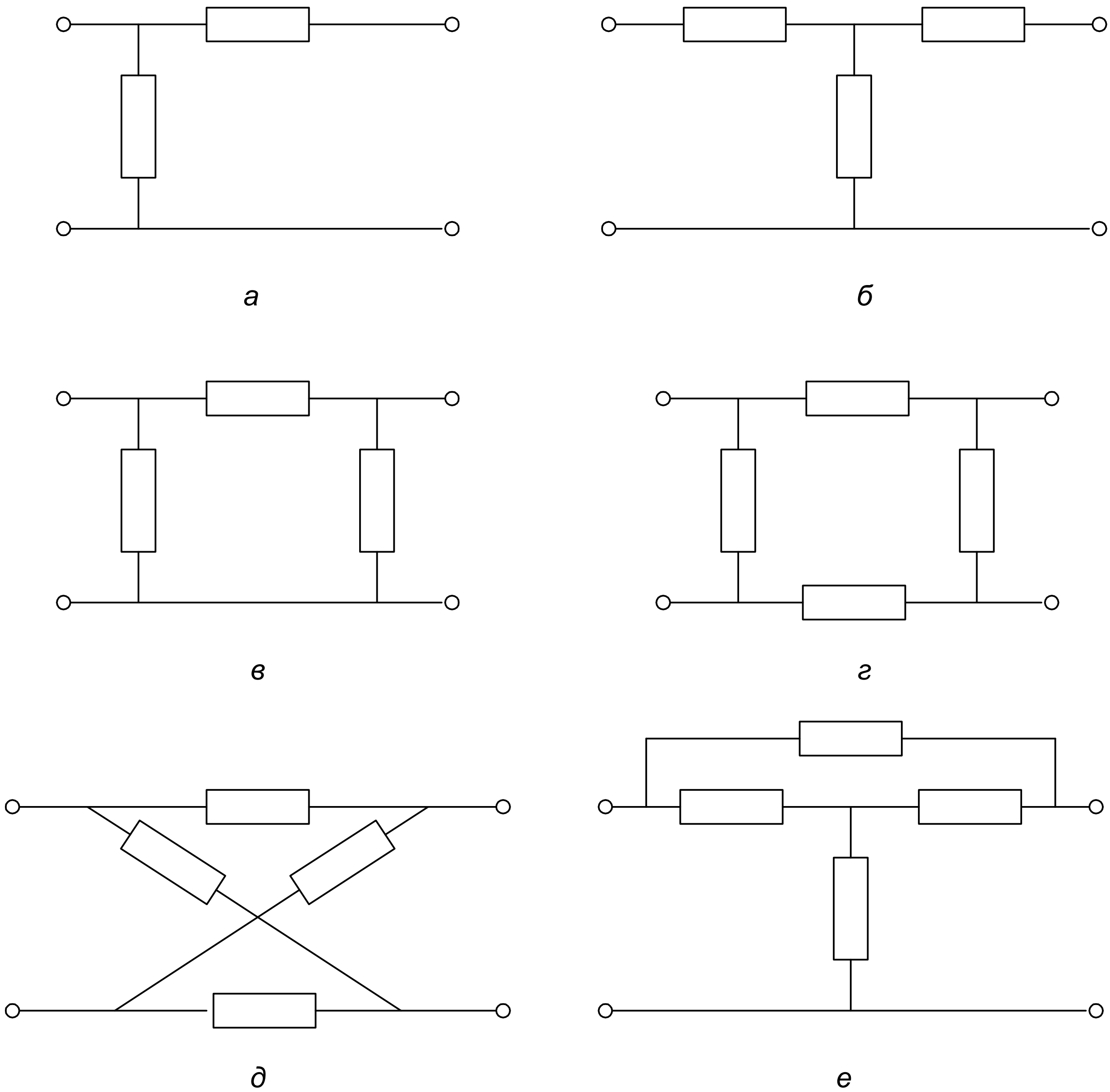


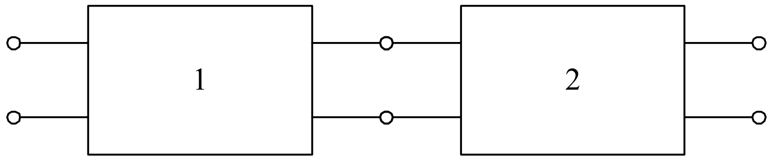
Рис. 3.16. Схемы замещения четырехполюсника

Из множества соединений четырехполюсников в электрических сетях применимы только две: каскадное (рис. 3.16, *а*), и параллельное (рис. 3.16, *б*).

Электрическая сеть, имеющая в общем случае множество узлов и ветвей, может рассматриваться как совокупность четырехполюсников соединенных по определенной схеме. Отличительной чертой четырехполюсников, моделирующих элементы электрической сети, является наличие у всех них одного общего полюса – нейтральной плоскости и по сути они могут считаться трехполюсниками. Сложность схемы соединения электрической сети и нелинейность, вносимая нагрузками и генераторами, не позволяют широко использовать четырехполюсники для моделирования электрических сетей. Возможны два принципиально различающихся подхода в использовании четырехполюсников:

- моделирование отдельных элементов или их каскадно-параллельного соединения при отсутствии в них источника энергии или нагрузки, заданных нелинейными математическими моделями;
- приближенное представление части электрической сети при наличии нелинейных моделей генерации или нагрузки в виде эквивалентного четырехполюсника.

Последний подход распространяется на моделирование электрических сетей с помощью многополюсников.



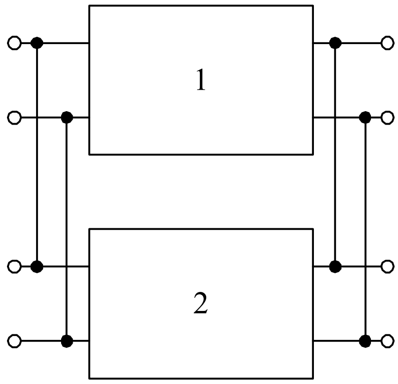


Рис. 3.17. Соединения четырехполюсников: *а* – каскадное, *б* - параллельное

Рассмотрим первый подход. Для получения параметров эквивалентного (результирующего) четырехполюсника, составленного из простых четырехполюсников, параметры которых известны, удобно пользоваться матричной формой записи:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Запись уравнений четырехполюсника (3.54) называется **A**-формой записи. Другие формы уравнений четырехполюсника могут быть получены из (3.55) выражением в левой части тех или других пар токов и напряжений. Всего возможно шесть форм записи – число сочетаний из четырех по два. Можно выделить еще две формы записи: это **Y**-форма (3.56) и **Z**-форма (3.57).

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{1,1} & \underline{Y}_{1,2} \\ \underline{Y}_{2,1} & \underline{Y}_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.56}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \underline{Z}_{1,2} \\ \underline{Z}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

При каскадном соединении четырехполюсников (рис. 3.17, *а*) параметры эквивалентного четырехполюсника получаются перемножением матриц коэффициентов четырехполюсников в **A**-форме (3.55), а при параллельном соединении (рис. 3.17, *б*) – сложением матриц коэффициентов четырехполюсников в **Y**-форме (3.56):

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}_1 \underline{\mathbf{A}}_2, \tag{3.58}$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Y}}_1 + \underline{\mathbf{Y}}_2. \tag{3.59}$$

3.10. Использование четырехполюсников для эквивалентирования схем электрических сетей

В некоторых случаях для эквиваленитирования схем электрических сетей удобно использовать четырехполюсники.

Рассмотрим простые примеры упрощения электрических сетей с помощью четырехполюсников.

Вначале рассмотри соединение двух элементов: линий электропередач и трансформатора. На рис. 3.18 изображены две схемы с двумя элементами. На первой схеме имеем две линии, а на второй линию и трансформатор. В обоих случаях модели сетей с четырехполюсниками имеют их каскадное соединение и эквивалентный четырехполюсник имеет матрицу коэффициентов, вычисляемую по выражению:

$$\underline{\mathbf{A}}_E = \underline{\mathbf{A}}_I \underline{\mathbf{A}}_{II}. \tag{3.60}$$

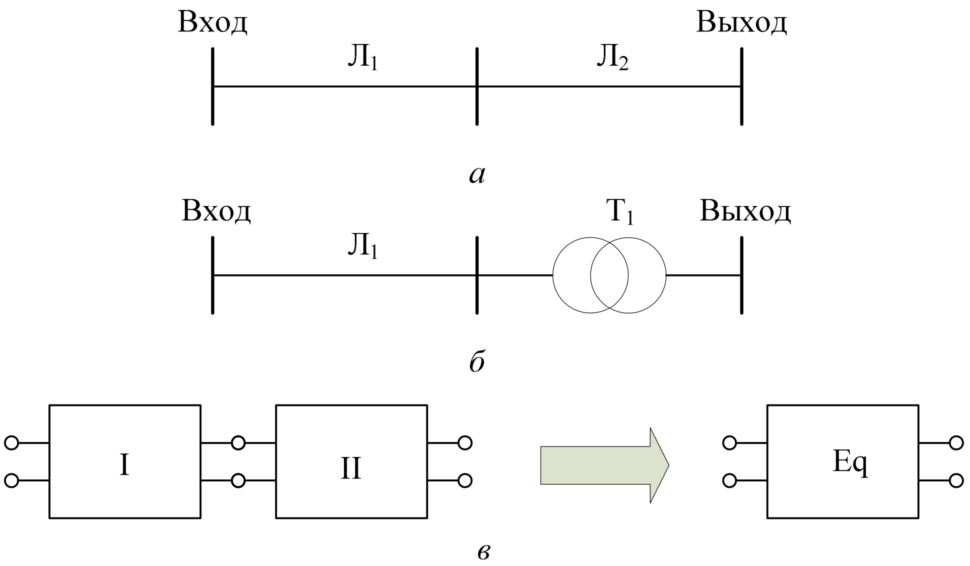


Рис. 3.18. Схема сети с каскадным соединением двух элементов: *а* – две линии, *б* – линия и трансформатор; *в* – каскадное соединение и эквивалентирование четырехполюсников

Далее для простоты, вследствие того, что один полюс на входе и на выходе четырехполюсника в схемах электрических систем отождествляют с нейтралью трехфазной системы, четырехполюсники, моделирующие элементы электрических сетей будем обозначать как на рис. 3.19.

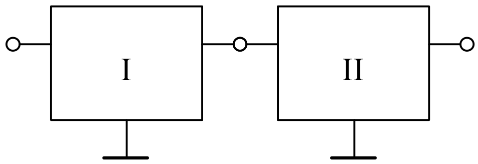


Рис. 3.19. Упрощенное обозначение схем из четырехполюсников в электрических сетях

В схеме с параллельными соединениями элементов будем всегда полагать соединение однотипных элементов: две или более параллельно включенных линии, два или более параллельно включенных трансформатора и т.п. Коэффициенты эквивалентного четырехполюсника в этом случае определяются через матрицы проводимостей уравнений четырехполюсника, записанных в **Y**-форме (3.56).

Рассмотри пример схемы, содержащий электрическую нагрузку, заданную мощностью. Сема сети изображена на рис. 3.20.

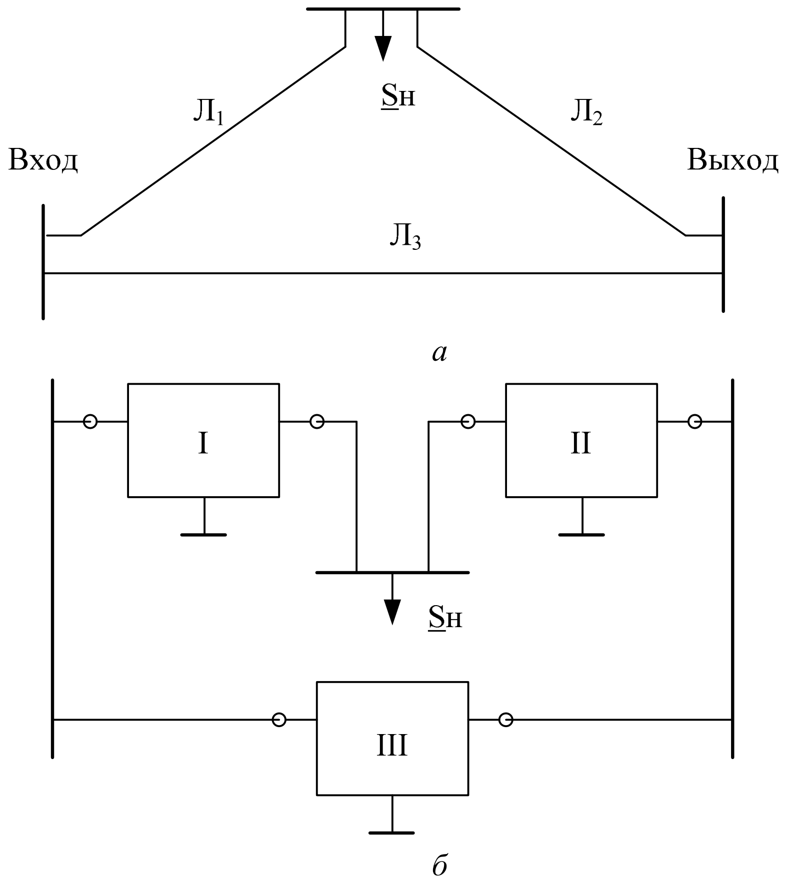


Рис. 3.20. Схема сети с промежуточной нагрузкой: *а* – схема электрической сети; *б* – модель сети с четырехполюсниками

Четырехполюсники I и II нельзя считать соединенными каскадно; есть еще один элемент – нагрузка. Рассмотрим этот фрагмент сети отдельно, рис. 3.21.

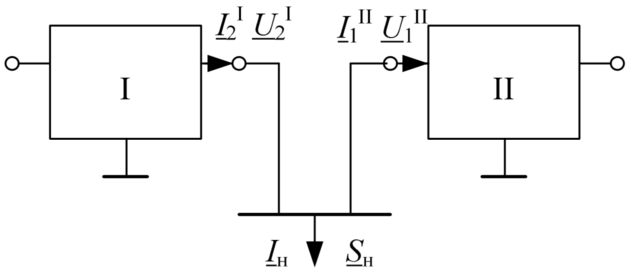


Рис. 3.21. Фрагмент модели сети с промежуточной нагрузкой

Запишем известные соотношения для шин нагрузки:

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1^{II} = \underline{U}_2^{I} = \underline{U}_{\text{н}}, \\ &\underline{I}_1^{II} = \underline{I}_2^{I} - \underline{J}_{\text{н}}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ток нагрузки $\underline{J}_{\text{н}} = \dfrac{\overset{*}{\underline{S}}_{\text{н}}}{\sqrt{3}\overset{*}{\underline{U}}_{\text{н}}}$ при подстановке его в (3.61) делает эти выражения нелинейными.

Перейдем к модели электрической нагрузки в виде схемы замещения.

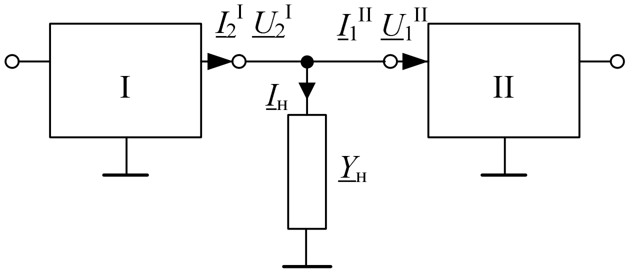


Рис. 3.22. Модель сети с представлением промежуточной нагрузки схемой замещения

$$\underline{Y}_{\text{н}} = \frac{\overset{*}{\underline{S}}_{\text{н}}}{U_{\text{н}}^2} \approx \frac{\overset{*}{\underline{S}}_{\text{н}}}{U_{\text{ном}}^2}. \tag{3.62}$$

и запишем для нее уравнения четырехполюсника:

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1 = \underline{U}_2, \\ &\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_Y = \underline{Y}_{\text{н}}\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \end{aligned} \tag{3.63}$$

или

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_{\text{н}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

В результате получили каскадное соединение трех четырехполюсников, рис. 3.23:

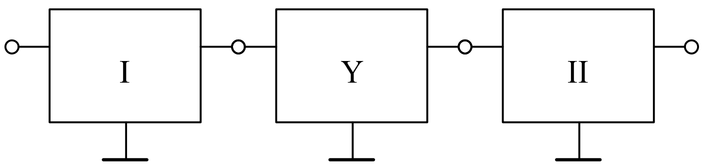
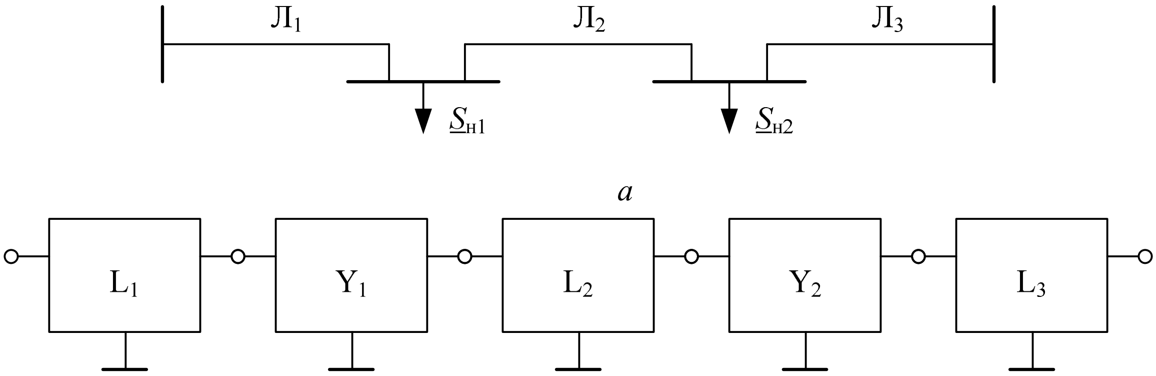


Рис. 3.23. Схема сети с представлением промежуточной нагрузки четырехполюсником

$$\underline{\mathbf{A}}_{Eq} = \underline{\mathbf{A}}_I \underline{\mathbf{A}}_Y \underline{\mathbf{A}}_{II} \tag{3.65}$$

В схеме сети с двумя промежуточными нагрузками аналогично получим



б

Рис. 3.24. Схема сети из трех линий с промежуточными нагрузками: а) – схема сети; б) – модель сети с четырехполюсниками

$$\underline{\mathbf{A}}_{Eq} = \underline{\mathbf{A}}_{L1}\underline{\mathbf{A}}_{Y1}\underline{\mathbf{A}}_{L2}\underline{\mathbf{A}}_{Y2}\underline{\mathbf{A}}_{L3}. \tag{3.66}$$

Аналогично нагрузке в схеме электрической сети представляются и другие элементы, включенные в виде шунта (поперечной ветви). К таким элементам относятся компенсирующие устройства и шунтирующие реакторы.

Следует подчеркнуть, что шунтирующие элементы и нагрузки, которые могут быть представлены схемой замещения с линейными элементами (сопротивления и проводимости не зависят от напряжения или тока, протекающего по ним) не вносят погрешности в эквивалентную модель и являются пассивными элементами сети. Нагрузки в электрических сетях, как правило, не могут с достаточной степенью точности моделироваться схемами замещения с постоянными параметрами. По своей сущности нагрузка – это активный элемент сети, хотя не является источником энергии, а ее потребителем. В большинстве случаев нагрузка задается постоянной мощностью или статическими характеристиками, что вносит погрешность при представлении их в виде схем замещения (сопротивлении и проводимости зависят от напряжения, приложенного к ним).

Пример 1.

Получить эквивалентную схему сети, изображенной на рис. 3.25, путем представления ее эквивалентным четырехполюсником и П-образной схемой замещения. Нагрузку $Н_1$ представить в эквиваленте схемой замещения. Вычислить напряжение и мощность в начале схемы сети по известным напряжению и мощности в конце схемы по уравнению эквивалентного четырехполюсника и эквивалентной схеме замещения.

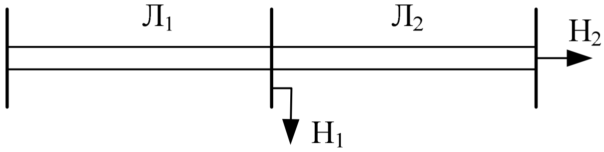


Рис. 3.25. Схема сети 220 кВ

Параметры ЛЭП – Л$_1$ и Л$_2$:

Эле-мент	Марка провода	$U_{ном}$, кВ	L, км	Количество цепей	r_0, Ом/км	x_0, Ом/км	g_0, мкСм/км	b_0, мкСм/км
Л$_1$	АС-240/32	220	80	2	0,118	0,435	0	2,604
Л$_2$	АС-240/32	220	40	2	0,118	0,435	0	2,604

Мощность нагрузки Н$_1$: $\underline{S}_{Н1} = 80 + j36$ МВ·А.

Мощность нагрузки Н$_2$: $\underline{S}_{Н1} = 120 + j50$ МВ·А. Напряжение на шинах нагрузки Н$_2$: $U_2 = 226$ кВ.

Расчет выполним в системе Mathcad: сопротивления – в омах, проводимости – в сименсах, коэффициент распространения волны – в радианах, напряжения – в киловольтах, токи – в килоамперах, передаваемая мощность – в мегавольт-амперах, потери холостого хода трансформаторов и потери в реакторах – в киловольт-амперах.

Системная переменная Mathcad номера начального индекса:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

Номинальное напряжение сети и погонные параметры линий Л$_1$ и Л$_2$:

$$U_{nom} := 220 \qquad r_0 := 0.118 \qquad x_0 := 0.435 \qquad b_0 := 2.604 \cdot 10^{-6}$$

Параметры четырехполюсника ЛЭП – Л$_1$:

$$l_1 := 80 \qquad z_0 := \frac{r_0 + j \cdot x_0}{2} \qquad y_0 := 2 \cdot j \cdot b_0 \qquad z_0 = 0.059 + 0.217i \qquad y_0 = 5.208i \times 10^{-6}$$

$$L_1 := \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{z_0 \cdot y_0 \cdot {l_1}^2}{2} & z_0 \cdot l_1 \\ y_0 \cdot l_1 \cdot \left(1 + \dfrac{y_0 \cdot z_0 \cdot {l_1}^2}{4}\right) & 1 + \dfrac{z_0 \cdot y_0 \cdot {l_1}^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.996 + 9.833i \times 10^{-4} & 4.72 + 17.4i \\ -2.048 \times 10^{-7} + 4.159i \times 10^{-4} & 0.996 + 9.833i \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Параметры четырехполюсника ЛЭП – Л$_2$:

$$l_1 := 40 \qquad z_0 := \frac{r_0 + j \cdot x_0}{2} \qquad y_0 := 2 \cdot \left(g_0 + j \cdot b_0\right)$$

$$z_0 = 0.059 + 0.217i \qquad y_0 = 5.208i \times 10^{-6}$$

$$L_2 := \begin{bmatrix} 1+\dfrac{z_0\cdot y_0\cdot l_1^{\,2}}{2} & z_0\cdot l_1 \\ y_0\cdot l_1\cdot\left(1+\dfrac{y_0\cdot z_0\cdot l_1^{\,2}}{4}\right) & 1+\dfrac{z_0\cdot y_0\cdot l_1^{\,2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.999+2.458i\times 10^{-4} & 2.36+8.7i \\ -2.56\times 10^{-8}+2.082i\times 10^{-4} & 0.999+2.458i\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Параметры четырехполюсника нагрузки – H_1:

$$S_{H1} := 80 + j\cdot 36$$

$$Y_{H1} := \frac{\overline{S_{H1}}}{U_{nom}^{\,2}} \qquad Y_{H1} = 1.653\times 10^{-3} - 7.438i\times 10^{-4}$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_{H1} & 1 \end{pmatrix} \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.653\times 10^{-3} - 7.438i\times 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}$$

Параметры эквивалентного четырехполюсника:

$$A := L_1\cdot H_1\cdot L_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1.013+0.027i & 6.884+26.296i \\ 1.646\times 10^{-3} - 1.154i\times 10^{-4} & 1.002+0.015i \end{pmatrix}$$

Параметры эквивалентной П-образной схемы замещения:

$$Z := A_{1,2} \qquad Y_1 := \frac{A_{2,2}-1}{Z} \qquad Y_2 := \frac{A_{1,1}-1}{Z}$$

$$Z = 6.884+26.296i \qquad Y_1 = 5.469\times 10^{-4} + 6.043i\times 10^{-5}$$

$$Y_2 = 1.094\times 10^{-3} - 1.916i\times 10^{-4}$$

Определение напряжения и мощности в начале схемы сети:

$$S_{H2} := 120 + j\cdot 50 \quad S_2 := S_{H2} \quad U_2 := 226$$

$$I_2 := \frac{\overline{S_2}}{\overline{U_2}} \qquad I_2 = 0.531 - 0.221i$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} := A\cdot\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238.313+18.641i \\ 0.907-0.24i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} |U_1| \\ |I_1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 239.041 \\ 0.939 \end{pmatrix}$$

$$S_1 := U_1\cdot\overline{I_1} \qquad S_1 = 211.76 + 74.098i$$

В П-образной схеме замещения сети в проводимости $\underline{Y}_1$ и $\underline{Y}_2$ вошла проводимость нагрузки $Н_1$.

Пример 2.

Получить эквивалентную схему электропередачи, изображенной на рис. 3.26. Преобразовать для этого элементы $Т_1$, $Р_1$, Л, $Р_2$ и $Т_2$ в эквивалентную схему представленную четырехполюсником и П-образной схемой замещения. Вычислить напряжение и мощность в начале электропередачи по известным напряжению и мощности в ее конце по уравнению эквивалентного четырехполюсника.

Схема имеет одноцепную ЛЭП и по одному трансформатору с обеих сторон.

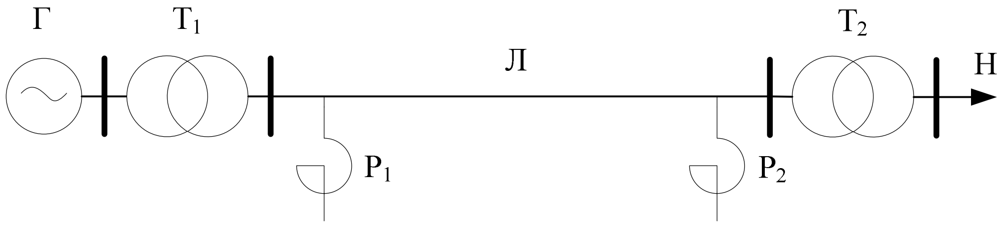


Рис. 3.26. Схема электропередачи

Параметры трансформаторов – $Т_1$ и $Т_2$

Элемент	Тип	$S_{ном}$, МВ·А	$U_{вн}$, кВ	$U_{нн}$, кВ	R, Ом	X, Ом	Pх, кВт	Qх, квар
$Т_1$	ТЦ-630000/500	630	525	15,75	0,9	61,3	500	2205
$Т_2$	3хАОДЦТН-167000/500	3х167	500	230	1,0	61,1	3х125	3х2004

Параметры ЛЭП – Л

Элемент	Конструкция фазы	$U_{ном}$, кВ	L, км	r_0, Ом/км	x_0, Ом/км	g_0, мкСм/км	b_0, мкСм/км
Л	3хАС-500/64	500	525	0,2	0,304	0,08	3,64

Параметры реакторов – $Р_1$ и $Р_2$

Элемент	Тип	$S_{ном}$, МВ·А	$U_{ном}$, кВ	ΔP, кВт
$Р_1$ и $Р_2$	3хРОДЦ-60	3х60	525	3х150

Мощность нагрузки – Н: $\underline{S}_Н = 350 + j140$ МВ·А. Напряжение на шинах нагрузки 220 кВ.

Расчет выполним в системе Mathcad: сопротивления – в омах, проводимости – в сименсах, коэффициент распространения волны – в радианах, напряжения – в киловольтах, токи – в килоамперах, передаваемая мощность – в мегавольт-амперах, потери холостого хода трансформаторов и потери в реакторах – в киловольт-амперах.

Системная переменная Mathcad номера начального индекса:

$$\boxed{\mathrm{ORIGIN} := 1}$$

Параметры четырехполюсника ЛЭП – Л:

$$U_{Lnom} := 500 \quad L := 600 \quad r_0 := 0.02 \quad x_0 := 0.304 \quad g_0 := 0.08 \cdot 10^{-6} \quad b_0 := 3.64 \cdot 10^{-6}$$

$$z_0 := r_0 + j \cdot x_0 \qquad y_0 := g_0 + j \cdot b_0 \qquad Z_c := \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} \qquad \gamma_0 := \sqrt{z_0 \cdot y_0}$$

$$z_0 = 0.02 + 0.304i \qquad y_0 = 8\times 10^{-8} + 3.64i\times 10^{-6}$$

$$Z_c = 289.2 - 6.323i \qquad \gamma_0 = 4.615\times 10^{-5} + 1.052i\times 10^{-3}$$

$$L := \begin{pmatrix} \cosh(\gamma_0\cdot L) & Z_c\cdot\sinh(\gamma_0\cdot L) \\ \frac{1}{Z_c}\cdot\sinh(\gamma_0\cdot L) & \cosh(\gamma_0\cdot L) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.808 + 0.016i & 10.199 + 170.611i \\ 3.265\times 10^{-5} + 2.042i\times 10^{-3} & 0.808 + 0.016i \end{pmatrix}$$

Параметры четырехполюсника повышающего трансформатора – T_1:

$$U_{BH\_T1} := 525 \qquad U_{HH\_T1} := 15.75 \qquad n_{T1} := \frac{U_{BH\_T1}}{U_{HH\_T1}} \qquad n_{T1} = 33.333$$

$$R_{T1} := 0.9 \qquad X_{T1} := 61.3 \qquad G_{\mu\_T1} := \frac{500}{U_{BH\_T1}^2}\cdot 10^{-3} \qquad B_{\mu\_T1} := \frac{2250}{U_{BH\_T1}^2}\cdot 10^{-3}$$

$$Z_{T1} := R_{T1} + j\cdot X_{T1} \qquad Y_{\mu\_T1} := G_{\mu\_T1} + j\cdot B_{\mu\_T1}$$

$$Z_{T1} = 0.9 + 61.3i \qquad Y_{\mu\_T1} = 1.814\times 10^{-6} + 8.163i\times 10^{-6}$$

$$T_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{T1}} & \frac{Z_{T1}}{n_{T1}} \\ n_{T1}\cdot Y_{\mu\_T1} & (1 + Z_{T1}\cdot Y_{\mu\_T1})\cdot n_{T1} \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.027 + 1.839i \\ 6.047\times 10^{-5} + 2.721i\times 10^{-4} & 33.317 + 3.952i\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Параметры четырехполюсника понижающего трансформатора – T_2:

$$U_{BH\_T2} := 500 \qquad U_{HH\_T2} := 230 \qquad n_{T2} := \frac{U_{BH\_T2}}{U_{HH\_T2}} \qquad n_{T2} = 2.174$$

$$R_{T2} := 1 \qquad X_{T2} := 61.1 \qquad G_{\mu\_T2} := \frac{375}{U_{BH\_T2}^2}\cdot 10^{-3} \qquad B_{\mu\_T2} := \frac{6012}{U_{BH\_T2}^2}\cdot 10^{-3}$$

$$Z_{T2} := R_{T2} + j\cdot X_{T2} \qquad Y_{\mu\_T2} := G_{\mu\_T2} + j\cdot B_{\mu\_T2}$$

$$Z_{T2} = 1 + 61.1i \qquad Y_{\mu\_T2} = 1.5\times 10^{-6} + 2.405i\times 10^{-5}$$

$$T_2 := \begin{bmatrix} n_{T2} & \dfrac{Z_{T2}}{n_{T2}} \\ n_{T2} \cdot Y_{\mu\_T2} & \dfrac{\left(1 + Z_{T2} \cdot Y_{\mu\_T2}\right)}{n_{T2}} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2.174 & 0.46 + 28.106i \\ 3.261 \times 10^{-6} + 5.228i \times 10^{-5} & 0.459 + 5.322i \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Параметры четырехполюсников реакторов – $Р_1$ и $Р_2$:

$$U_{nom\_R} := 525 \qquad S_{nom\_R} := 180 \qquad P_{x\_R} := 450$$

$$Y_R := \frac{\left(P_{x\_R} \cdot 10^{-3} - j \cdot S_{nom\_R}\right)}{U_{nom\_R}^{\;2}} \qquad Y_R = 1.633 \times 10^{-6} - 6.531i \times 10^{-4} \qquad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_R & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 := R_1$$

Параметры эквивалентного четырехполюсника – А:

$$A := T_1 \cdot R_1 \cdot L \cdot R_2 \cdot T_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 0.056 + 9.525i \times 10^{-4} & 0.143 + 3.855i \\ 4.002 \times 10^{-3} + 0.068i & 13.18 + 0.227i \end{pmatrix}$$

Параметры эквивалентной П-образной схемы замещения:

$$Z := A_{1,2} \qquad Y_1 := \frac{A_{2,2} - 1}{Z} \qquad Y_2 := \frac{A_{1,1} - 1}{Z}$$

$$Z = 0.143 + 3.855i \qquad Y_1 = 0.176 - 3.153i \qquad Y_2 = -8.84 \times 10^{-3} + 0.245i$$

Определение напряжения и мощности в начале электропередачи:

$$S_H := 350 + j \cdot 140 \qquad S_2 := S_H \qquad U_2 := 220$$

$$I_2 := \frac{\overline{S_2}}{\overline{U_2}} \qquad I_2 = 1.591 - 0.636i$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.985 + 6.252i \\ 21.992 + 7.022i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} |U_1| \\ |I_1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.237 \\ 23.086 \end{pmatrix}$$

$$S_1 := U_1 \cdot \overline{I_1} \qquad S_1 = 373.451 + 32.271i$$

В первом примере для эквивалентирования потребовалось представление нагрузки схемой замещения в виде проводимости. Для этого было использовано номинальное напряжение и заданная мощность нагрузки. Отличие действительного напряжения на шинах нагрузки $Н_1$ от значения, которое было использовано в формуле для получения проводимости нагрузки, при использовании эквивалентной схемы в расчетах режимов, приводит к погрешности, которая тем больше, чем сильнее различие в напряжениях: принятом при эквивалентировании и действительным, которое получилось бы при расчете не преобразованной схемы. Это связано с тем, что мощность нагрузки принята постоянной величиной.

Во втором примере погрешности при эквивалентировании нет. Проводимость реактора получена при его номинальном напряжении и с изменением действительного напряжения мощность, потребляемая реактором, меняется, что отражает действительную картину работы реактора.

Вопросы для самопроверки

1. Как задается граф?
2. Какой граф называется связным?
3. Что называется деревом графа?
4. Как составить первую матрицу инциденций направленного графа?
5. Как составить вторую матрицу инциденций направленного графа?
6. Как с помощью графов моделируются элементы электрической сети: линия электропередачи, трансформатор и др.?
7. Перечислите матрицы параметров схемы электрической сети.
8. Как записывается первый закон Кирхгофа в матричной форме?
9. Как записывается система уравнений узловых напряжений в матричной форме?
10. Как составить матрицу узловых проводимостей по схеме электрической сети?
11. Какой узел схемы электрической сети называется балансирующим?
12. Какой узел схемы электрической сети называется базисным?
13. Какие существуют формы записи линейных уравнений установившегося режима?
14. Как получить систему нелинейных уравнений установившегося режима электрической сети?
15. Какие узлы в схеме электрической сети относят к генераторным узлам?
16. Какие существуют критерии эквивалентности исходной и эквивалентной схем электрических сетей?
17. Какие формы записи уравнений четырехполюсников используются в расчетах схем электрических сетей?
18. В каких случаях для расчетов схем электрических сетей удобно использовать четырехполюсники?
19. Как эквивалентируется нагрузка, заданная мощностью, с помощью четырехполюсников.

4. Построение математических моделей

4.1. Процесс описания объектов моделирования

Моделирование как основной научный метод в начальной стадии своего развития был главным образом предметом искусства исследователя. Процесс построения моделей определялся теоретическим багажом исследователя, его неформальными представлениями о цели работы, опытом, экспериментаторским мастерством и интуицией.

Вместе с тем опыт модельных исследований все более сложных объектов убедительно показывал, что качество модели и особенно трудоемкость ее создания решающим образом зависят от того, сколь целесообразно организован процесс изучения объекта, построения проверки и практического использования его модельного описания. Возникла задача оптимизации процесса моделирования.

Наибольшее развитие методика и практика планирования и осуществления модельных исследований получили в рамках таких направлений, как исследование операций и прикладной системный анализ.

В сложных случаях, когда невозможно составить модели с помощью известных теоретических представлений, получили развитие экспериментальные исследования, названные идентификацией объектов. Применительно к этим исследованиям зародилась и стала стремительно развиваться теория оптимального планирования эксперимента, обеспечивающая получение необходимой экспериментальной информации об объекте при минимальной затрате сил и средств.

В модельном исследовании можно выделить следующие основные этапы: постановку задачи, построение модели, отыскание решения, проверку модели и оценку решения, внедрение модели и контроль ее правильности.

Рассмотрим процесс модельного исследования с помощью его графического представления в форме блок-схемы (рис. 4.1).

Постановка задачи следует за выявлением некоторых противоречий и возникновением проблемы: потребности изменить в лучшую сторону существующее положение вещей в той или иной области.

Так огромное большинство технических и технологических проблем формируется в сфере экономики и экологии – верхних по отношению к технике уровнях системы природа – общество.


Возникновение проблемы
Выявление противоречий
Формулировка целей
Осмысление и конкретизация результата будущей деятельности
Формулировка задачи: непротиворечивая система целей, объект моделирования
Соотнесение с реальными возможностями
Формирование критериев качества модели
Выбор класса моделей
Аналитическое описание объекта
Идентификация
Формализация
Модели-заготовки и эмпирические данные
Планирование натурного эксперимента
Планирование вычислительного эксперимента
Получение и оьработка экспериментальных данных
Фиксация условий применимости модели
Оценка качества модели
Опытная проверка в условиях задачи
Получение результата для задачи
Практическое использование модели

Рис. 4.1. Схема формирования модели

Осмысление и конкретизация проблемы приводит к формулировке целей или системы целей как желательного результата будущей деятельности по решению проблемы. Однако поставленная цель, естественно, должна быть соотнесена с реальными возможностями ее достижения, или, иными словами, с ресурсами (материальными и другими), которые могут быть использованы для решения данной проблемы. Сопоставление первоначально намеченных целей с ресурсными ограничениями (обычно приводящими к корректировке первых в сторону их сужения) приводит к формулировке задачи исследования, которая помимо непротиворечивой системы целей, учитывающих ресурсные возможности, включает в себя объект моделирования.

Данные о целях исследования, уточненные в формулировке задачи, а также исходная информация об объекте моделирования служат для определения критерия качества создаваемой модели – количественной меры степени ее совершенства. При традиционной постановке задачи исследования критерий обычно не носит формального характера и представляет собой некоторую систему количественных требований, которым должна отвечать будущая модель. В случае вполне формализованной оптимизационной постановки критерий приобретает вид некоторого функционала от переменных и параметров модели, значение которого достигает экстремума при оптимальных ее характеристиках (например, среднеквадратическая погрешность модельных переменных).

Следующим шагом в построении модели является основанный на априорных данных содержательный анализ системы и выбор класса, или точнее, способа формирования модели. Если объект не слишком сложен, достаточно изучен и комплекс подлежащих модельному исследованию свойств и характеристик объекта может быть выявлен на основе теоретических представлений и данных (дополняемых необходимым объемом эмпирической информации), то целесообразно избрать аналитический путь построения модели. Однако на практике часто оказывается, что из-за сложности, слабой изученности объекта или отсутствия соответствующих теоретических разработок (например, применительно к комплексным системам, содержащим технические, информационные, биологические компоненты) этот путь не может быть реализован. Альтернативным является путь идентификации объекта, т.е. экспериментального определения существенных для решаемой задачи свойств и характеристик объекта специально ради построения его модели. Эксперимент, как правило, достаточно сложный и трудоемкий, осуществляется в соответствии со специально разрабатываемым оптимальным планом, данные эксперимента обрабатываются и становятся основой для формализованного описания объекта в виде математической модели вход – выход.

Формализованная модель, построенная теоретическим путем или идентифицированная, оценивается в соответствии с выбранным ранее критерием и либо признается удовлетворительной (принимается), либо отвергается как недостаточно совершенная. В последнем случае возникает необходимость в ее корректировке и итеративном обращении к ранее выполненным этапам.

Решение о принятии модели (в общем случае после i-го итерационного цикла) влечет за собой переход к следующему этапу – опытной проверке непосредственно в условиях той задачи, для решения которой она построена. При этом нередко возникают дополнительные требования (например, связанные с удобством использования модели) и необходимость ее дополнительной корректировки.

Наконец, следует заключительный этап процесса: использование модели по ее прямому назначению – для решения задачи, причем и на этом этапе возможны дальнейшие уточнения и корректировки.

Остановимся на наиболее важных особенностях процесса моделирования в целом:

1) Построение модели представляет собой не однократный акт, а процесс последовательных приближений, в основе которого лежит самообучение исследователя.
2) Процесс моделирования соединяет в себе требования к ясно понимаемому существу решаемой задачи, с одной стороны, и активному владению теорией, математическим аппаратом и методами – с другой стороны. Кроме того, необходимы хорошие знания возможностей вычислительной техники и ее использования.
3) Процесс построения модели является познавательной деятельностью и представляет собой важнейшую составную часть решения задачи в целом.

4.2. Аналитический метод построения математических моделей

В распоряжении исследователя, решающего на основе моделирования конкретную задачу, сегодня находится огромное множество моделей-«заготовок», которые могут и должны быть использованы. Все эти заготовки получены на основе универсальных законов, таких, как закон сохранения вещества и энергии, начала термодинамики, закон всемирного тяготения. Однако вопрос о том, каким может быть удельный вес теоретической составляющей при построении каждой конкретной модели, целиком определяется требованиями задачи и характером объекта моделирования.

Возможность и рациональность теоретического подхода к моделированию некоторого объекта определяется целым рядом практически неподдающихся формальному анализу факторов, к числу которых относятся:

- степень изученности данного класса объектов и наличие теоретической базы, достаточной для модельного описания объекта в соответствии с требованиями решаемой задачи;
- приемлемость ограничений и допущений, содержащихся в исходных теоретических построениях, применительно к условиям и требованиям решаемой задачи;
- специфические свойства объекта-оригинала (степень сложности и размерность модели, возможность линеаризации, возможность и удобство применения стандартных, например частотных, методов для исследования модели объекта и т. п.);
- возможность и удобство введения в теоретическую модель необходимой дополнительной информации, получаемой опытным путем;
- возможность экспериментального исследования объекта-оригинала;

В основе аналитических моделей, как правило, лежат балансовые соотношения, связывающие входные и выходные переменные. Эти соотношения представляют собой частные проявления законов сохранения вещества и энергии.

Пример 1. В простейшей ЭЭС генератор электрической станции Г (рис. 4.2) работает с мощностью $P_г$, которая посредством линии электропередачи передается на шины нагрузки, где установлен электродвигатель Д. В такой ЭЭС при неизменной частоте сохраняется баланс активной мощности:

$$P_г = P_д + \Delta P \tag{4.1}$$

где $P_д$ – мощность, с которой работает электродвигатель;

ΔP – потери мощность в линии электропередачи.

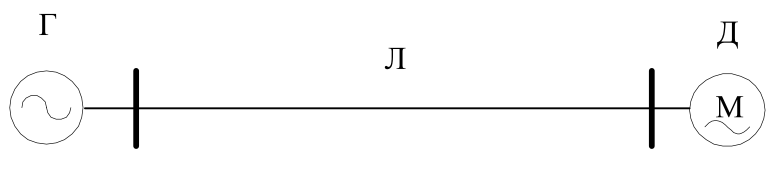


Рис. 4.2. Схема простейшей ЭЭС

Выражение (4.1) является балансовым соотношением, вытекающим из закона сохранения энергии, однако для полного описания модели работы ЭЭС требуются дополнительные экспериментальные данные. К ним относятся характеристики элементов, входящих в ЭЭС: генератора, линии электропередачи и двигателя. Эти элементы являются техническими объектами со своими, свойственными только им, характеристикам. Для получения этих характеристик требуется эксперимент, который проводится непосредственно для этих объектов, либо используются данные экспериментов, выполненные над типичными объектами. К характеристикам электрических объектов относятся, например, статические характеристики генераторов и двигателей по напряжению, а для линии электропередачи зависимость потерь мощности от напряжения.

Пример 2. При протекании тока по проводу воздушной ЛЭП в соответствии с законом Джоуля-Ленца происходит нагревание проводника:

$$\Delta Q = I^2 R \Delta t, \tag{4.2}$$

где ΔQ – количество теплоты, выделяемое в проводнике с сопротивлением R при протекании по нему тока I в течение времени Δt.

Если бы не было отвода тепла от проводника, температура проводника возрастала бы неограниченно. Охлаждение проводника происходит лучеиспусканием, конвекцией и теплопередачей из-за наличия теплопроводности окружающей среды.

По условиям сохранения физико-механических характеристик проводов воздушных линий электропередачи температура, до которой могут нагреваться провода, ограничена некоторым значением (как правило 70 ºC), Это связано с ограничением тока, протекающего по проводу $I_{доп}$. Вычислить значение $I_{доп}$ позволяет математическое соотношение, выведенное из баланса количества теплоты, создаваемого в отрезке проводника, и отведенного количества теплоты в единицу времени.

Лучеиспускание при $\theta < 100$ ºC незначительно, а теплопроводность окружающего проводник воздуха мала, следовательно, в основном охлаждение идет за счет конвекции воздуха

$$\Delta Q = kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)\Delta t, \tag{4.3}$$

где S – поверхность проводника; θ_{max} и θ_0 –максимальная и начальная температура провода;

k – коэффициент пропорциональности.

Приравняем количество создаваемой и количество отводимой теплоты, получим

$$I_{max}^2 R \Delta t = kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)\Delta t \tag{4.4}$$

откуда

$$I_{max} = \sqrt{\frac{kS\left(\theta_{max} - \theta_0\right)}{R}}. \tag{4.5}$$

4.3. Методы идентификации технических объектов

В основе всех весьма многочисленных методов идентификации лежит идея эксперимента с «черным ящиком», которая была введена в оборот Нобертом Винером и обстоятельно развита Россом Эшби.

Идентификация является инструментом моделирования тех объектов, которые из-за сложности или недостаточной изученности, а также из-за обилия случайных факторов не могут быть исследованы на основе существующих теоретических представлений. С помощью определенных вычислительных средств и программного обеспечения (алгоритма идентификации) строится модель объекта.

На рис. 4.3 показана принципиальная схема идентификации, на которой приведены результаты наблюдений за входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и выходами $y_1, y_2, \ldots, y_m$ объекта и по которой с помощью алгоритма идентификации строится модель объекта.

В предельном (теоретическом) случае «черный ящик» представляет собой некоторую систему, о структуре и внутренних свойствах которой неизвестно решительно ничего. Зато входы, т.е. внешние воздействия (факторы), и выходы, представляющие собой реакции на внешние воздействия, доступны для наблюдения (измерений) в течение неограниченного времени. Задача идентификации заключается в том, чтобы по наблюдениям за входами и выходами выявить внутренние свойства объекта или, иными словами, построить его модель.

Решение задачи допускает применение двух различных стратегий.

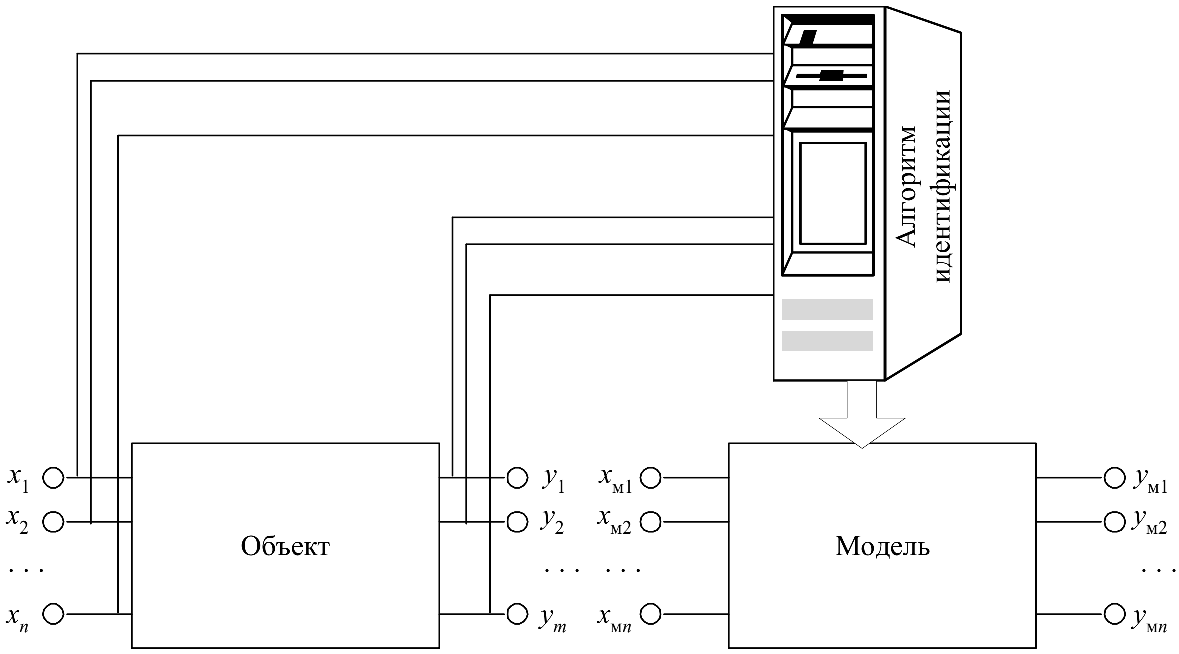


Рис. 4.3. Принципиальная схема идентификации объекта

В первом случае осуществляется так называемый активный эксперимент, когда на вход объекта подаются специально сформированные тестовые воздействия, характер и последовательность которых определяется заранее разработанным планом. Подобный подход обладает тем преимуществом, что за счет оптимально спланированного эксперимента он позволяет получить необходимую информацию о свойствах и характеристиках объекта при минимальном объеме экспериментальных данных и соответственно при минимальной трудоемкости опытных работ. Однако цена, которую приходится платить за это преимущество, достаточно высока – объект выводится из его обычного состояния, что на практике далеко не всегда возможно по принципиальным и экономическим соображениям.

Альтернативный подход заключается в том, что осуществляется пассивный эксперимент. Объект исследования не подвергается искусственным возмущениям и функционирует в своем естественном режиме, но при этом организуются систематические измерения и регистрации значений его входных и выходных переменных. Обработка полученных подобным путем данных в принципе позволяет получить ту же самую информацию о свойствах объекта, что и при активном эксперименте, однако необходимый объем данных существенно, на два-три порядка больше, чем в первом случае. Естественно, что и алгоритмы обработки данных оказываются более сложными и громоздкими.

Отметим, что на практике при построении идентифицируемых моделей часто целесообразна смешанная стратегия эксперимента. По тем входным переменным объекта, которые это допускают (по условиям безопасности, техническим, экономическим соображениям и пр.), проводится активный эксперимент. Его результаты дополняются данными пассивного эксперимента, охватывающего все прочие значимые переменные. Опыт показывает, что такой подход заметно снижает трудоемкость исследований по сравнению с методикой пассивного эксперимента в чистом виде.

Ситуация «черного ящика» представляет собой теоретический граничный случай, когда о структуре объекта неизвестно абсолютно ничего. На деле исследователь всегда располагает той или иной априорной информацией об объекте идентификации, часть которой вполне достоверна (например, действие закона сохранения и других универсальных закономерностей), часть (например, сведения о структуре объекта) может носить гипотетический характер. Объем информации зависит от характера конкретной задачи и свойств объекта моделирования. Он может варьироваться в очень широких пределах, но сам факт наличия исходной информации обязателен – иначе будет невозможной осознанная постановка задачи исследования. Поэтому на практике приходится иметь дело не с «черным ящиком», а с «серым», отчасти «прозрачным» ящиком, причем можно указать три более или менее типовых уровня «прозрачности» и, следовательно, три основных класса постановки задачи идентификации объекта.

В первом, наиболее общем случае, типичном для весьма сложных и слабо изученных объектов системного характера (экологические системы, экономические процессы больших масштабов и пр.), достоверные исходные данные о внутренних свойствах и структурных особенностях объекта исчезающе малы, почти отсутствуют. Поэтому задача идентификации, казалось бы, должна включать в себя, с одной стороны, определение зависимостей, связывающей входы и выходы, с другой стороны – определение внутренней структуры объекта. Однако в такой постановке эта задача неразрешима даже теоретически.

Дело в том, что непосредственным результатом идентификации объекта является только определение зависимостей входы-выходы, причем в непараметрической форме – в виде таблиц или отображающих содержание этих таблиц кривых. Для того чтобы говорить о структуре модели, необходимо перейти к параметрической форме их представления. Однако, как известно, однозначной связи между функциональной зависимостью и порождающей эту зависимость математической структурой не существует. Каждую непараметрическую зависимость вход-выход можно аппроксимировать различными способами и соответственно построить ряд практически равноценных моделей объекта, характеризующихся собственной структурой, собственным набором параметров и их значений.

Основанием для предпочтения той или иной параметрической модели и, следовательно, фиксации модельной структуры идентифицируемого объекта могут быть только данные, внешние по отношению к процессу идентификации, полученные, например, из теоретических соображений. Если таких данных нет, то в рассматриваемой ситуации мы получаем чисто функциональную модель, которая воспроизводит с тем или иным приближением характеристики объекта, но не содержит никакой информации о его реальной структуре.

Следует отметить, что это обстоятельство, существенно ограничивающее возможности идентифицируемых моделей применительно к задачам исследования сложного объекта, далеко не всегда следует рассматривать как недостаток. Например, в задачах автоматического управления, для которых существенны именно функциональные характеристики объекта, возможность отвлечься от его реальной структуры позволяет воспроизводить необходимые характеристики объекта управления с помощью простейших одношаговых итеративных алгоритмов, которые заведомо не соответствуют протекающим в объекте реальным явлениям, но позволяют наиболее рациональным образом организовать вычислительный процесс на ЭВМ. Любопытно, что идентифицируемые модели этого класса нередко используют и в тех случаях, когда объект в принципе поддается аналитическому описанию, но последнее получается чрезмерно сложным, громоздким и неудобным для анализа. Опыт показывает, что сознательное абстрагирование от реальной структуры подобных объектов и переход к идентификации их функциональных характеристик позволяет получить вполне обозримые компактные модели, которые с достаточной точностью описывают свойства сложного объекта-оригинала.

Второй класс задач идентификации характеризуется тем, что априорные данные о структуре моделируемого объекта, полученные теоретическим путем или определенные из конструктивных соображений, в принципе имеются. Однако какой вклад в характеристики объекта или его модели вносит тот или иной структурный компонент, наперед неизвестно, и это надлежит определить на основе эксперимента наряду со значениями соответствующих параметров. Задачи этого класса, связанные с уточнениями структуры и оцениванием параметров, часто встречаются на практике и характерны для объектов и процессов средней сложности, в частности технологических, когда определенные теоретические сведения о процессе имеются, но они неполны и носят в какой-то мере гипотетический характер, так что полное аналитическое описание объекта только на основании этих данных невозможно.

Третий класс задач связан с относительно простыми и хорошо изученными объектами, структура которых известна точно, и речь идет только о том, чтобы по экспериментальным данным оценить значения всех или некоторых входящих в исследуемую структуру параметров (параметрическая идентификация). Примером такой идентификации является определение параметров четырехполюсника A, B, C, D в уравнениях:

$$\begin{aligned} U_1 &= AU_2 + BI_2, \\ I_1 &= CU_2 + DI_2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

которые представляют собой модели таких объектов ЭЭС, как ЛЭП, трансформатор и пр.

Задача экспериментального оценивания или уточнения значений параметров модели возникает при исследовании подавляющего большинства реальных объектов, даже несложных и хорошо изученных.

Общую структурную схему идентификации можно представить как показано на рис. 4.4.

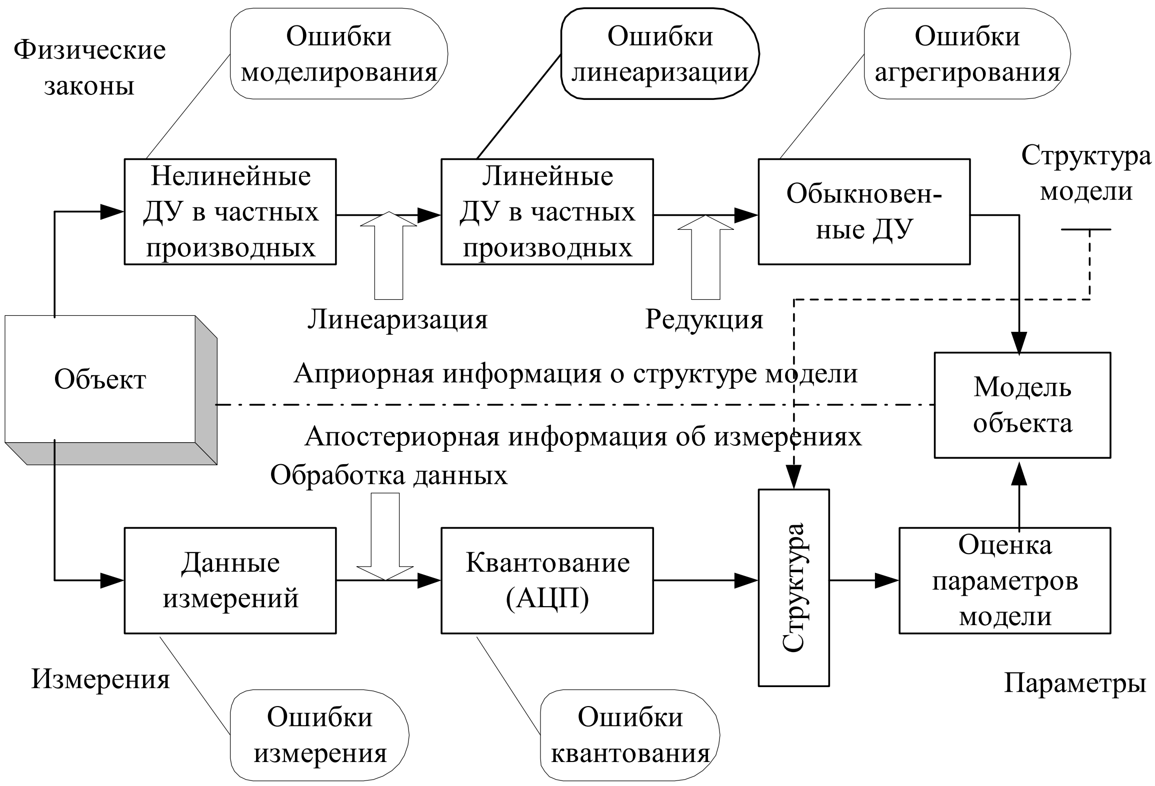


Рис. 4.4. Структурная схема идентификации объекта

Независимо от характера решаемой на основе идентификации объекта-оригинала задачи построение модели этого класса базируется на результатах измерений соответствующих величин переменных, с чем связано два существенных обстоятельства.

Во-первых, эксперимент должен быть обеспечен необходимыми средствами измерения надлежащей точности (датчиками, преобразователями, приборами). Опыт показывает, что при идентификации даже несложных, но типовых объектов, создание измерительного комплекса, прежде всего в части первичных преобразователей (датчиков) и их привязки к объекту, часто перерастает в серьезную техническую проблему. Необходимые разработки специализированных средств измерения и их компонентов, следовательно, и проведение соответствующих опытно-конструкторских работ являются в подобных случаях скорее правилом, чем исключением, а это, естественно, усложняет работы и увеличивает их стоимость.

Во-вторых, используемый в процессе эксперимента измерительный комплекс со всеми его компонентами требует материального обеспечения, т.е. градуировки, аттестации и периодической проверки в соответствии с нормативно узаконенным требованием. Реальная ситуация с метрическим обеспечением экспериментальной аппаратуры зависит от характера величин, подлежащих измерению в каждом конкретном случае.

Таким образом, даже при условии вполне современного технического и технологического оборудования путь от принципиальной возможности построения модели на основе идентификации до практической реализации этой возможности в большинстве случаев оказывается длинным, сложным и трудоемким. Кроме того, проведение одного эксперимента само по себе не может требовать значительных затрат, и в этом случае возникает необходимость сокращения числа возможных опытов в эксперименте без ущерба для точности математической модели. Во многих случаях этому помогает оптимальное планирование эксперимента.

4.4. Выбор структуры математической модели и вычисление ее параметров

Непосредственными результатами наблюдений (опытов) в процессе проведения эксперимента являются зависимости между входами $\mathbf{x}$ и выходами $\mathbf{y}$, представленные, как правило, в табличной форме. Построение математической модели в параметрической форме требует обработки табличных данных. При этом следует учесть, что экспериментальные данные могут содержать систематические, случайные и грубые погрешности. Обычно погрешности измерений принято представлять в виде среднеквадратической погрешности σ и двумя границами интервала, в пределах которого истинное значение измеряемого параметра находится с заданной вероятностью (Δ_i, Δ_h).

На первом этапе построения математической модели требуется выбрать вид (структуру) математической модели. Второй этап требует специальных вычислительных средств для определения параметров выбранной математической модели. Рассмотрим общий подход к подбору вида математической модели без использования каких либо теоретических представлений о внутренней структуре моделируемого объекта. В математике такая задача носит название задачи о приближении функций. Для простоты примем объект с одним входом x и одним выходом y.

Пусть на некотором множестве задана система функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$, которые в дальнейшем будем считать достаточно гладкими (например, непрерывно дифференцируемыми) функциями. Назовем эту систему основной.

Функции вида

$$Q_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x), \qquad (4.7)$$

где c_0, c_1, …, c_m – постоянные коэффициенты, называются обобщенными многочленами порядка m. В частности, если основная система состоит из целых неотрицательных степеней переменной x, т.е. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, …, $\varphi_m(x) = x^m$, то

$$Q_m(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_m x^m \tag{4.8}$$

есть обычный полином степени m.

Если

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = 1, \\ &\varphi_1(x) = \cos x, \\ &\varphi_2(x) = \sin x, \\ &... \\ &\varphi_{2m-1}(x) = \cos mx, \\ &\varphi_{2m}(x) = \sin mx, \end{aligned} \tag{4.9}$$

то

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x ... + a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{4.10}$$

называется тригонометрическим полиномом (или тригонометрическим многочленом) порядка m.

Задача о приближении функций ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ требуется заменить обобщенным многочленом $Q_m(x)$, заданного порядка m так, чтобы отклонение (в смысле σ или (Δ_i, Δ_h)) функции $f(x)$ от обобщенного многочлена $Q_m(x)$ на указанном множестве $\{x\}$ было наименьшим. При этом многочлен $Q_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\{x\}$ состоит из отдельных точек x_0, x_1, …, x_n, то приближение называется дискретным. Если же $\{x\}$ есть отрезок $a \le x \le b$, то приближение называется интегральным.

На практике часто пользуются приближениями функций обычным и тригонометрическим полиномами.

В теории дискретного приближения функций имеет место задача интерполяции функций. В случае обычного полинома задача интерполяции формулируется следующим образом.

Для данной функции $f(x)$ найти полином $Q_m(x)$ возможно низшей степени m, принимающей в заданных точках x_i ($i = 0, 1, 2, …, n$; $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$) те же значения, что и $f(x)$, т.е. такой, что $Q_m(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, …, n$). Такой полином называют интерполяционным, а точки x_i ($i = 0, 1, 2, …, n$) называют узлами интерполяции.

Как известно, существует единственный полином степени не выше n, принимающий в точках x_i ($i = 0, 1, 2, …, n$) заданные значения. Поэтому можно положить $n = m$. Коэффициенты a_0, a_1, …, a_n полинома $Q_n(x)$ можно определить из системы уравнений:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{Y}, \qquad (4.11)$$

где $$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Определитель этой системы линейных алгебраических уравнений есть так называемый определитель Вандермонда $\Delta \neq 0$, и, следовательно, система (4.11) имеет единственное решение.

Интерполяция дает возможность вычислить значения функции $y = f(x)$ между заданными точками x_{i-1} и x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 3. Выполнить интерполяцию функции, заданную в табличной форме в пяти точках (см. ниже). Расчеты выполним в системе Mathcad.

Векторы данных:

$$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3.2 \\ 3 \\ 1 \\ 1.8 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

Заполнение матрицы **X**

$$i := 0..4 \quad X_{i,0} := 1 \quad X_{i,1} := x_i \quad X_{i,2} := (x_i)^2 \quad X_{i,3} := (x_i)^3 \quad X_{i,4} := (x_i)^4$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 1 & 0.3 & 0.09 & 0.027 & 0.0081 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 \\ 1 & 0.7 & 0.49 & 0.343 & 0.2401 \end{pmatrix}$$

Получение коэффициентов интерполяционного полинома

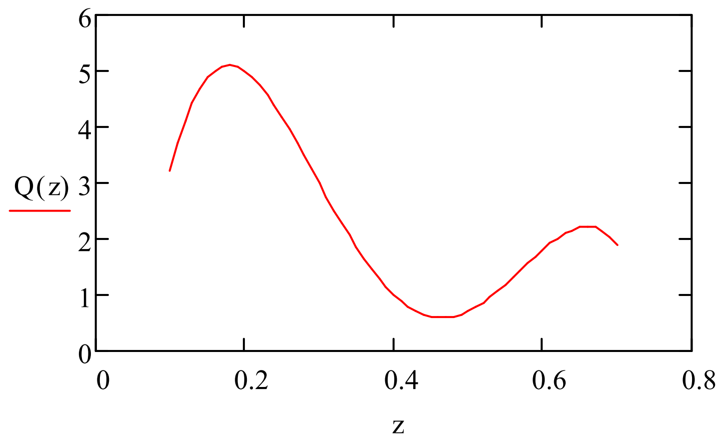
$$A := X^{-1} \cdot y \qquad A = \begin{pmatrix} -8.18 \\ 186.25 \\ -864.0278 \\ 1480.5556 \\ -852.7778 \end{pmatrix}$$

Определение функции полинома

$$Q(z) := A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + A_3 \cdot z^3 + A_4 \cdot z^4$$

График функции для интерполирующего полинома

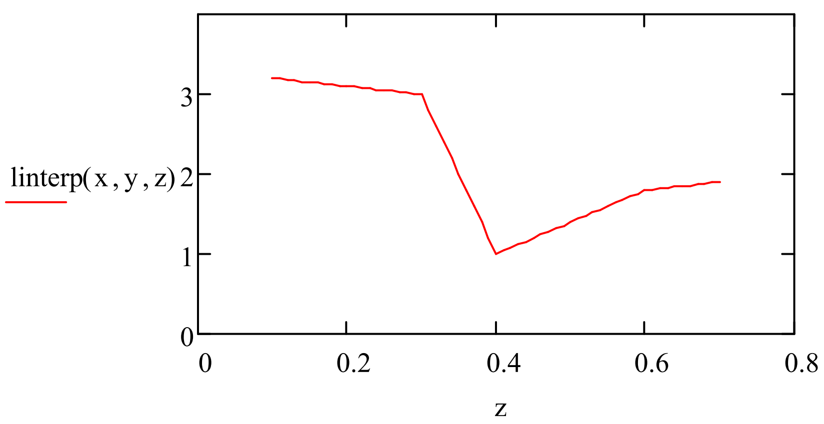
$z := 0.1, 0.11 .. 0.7$



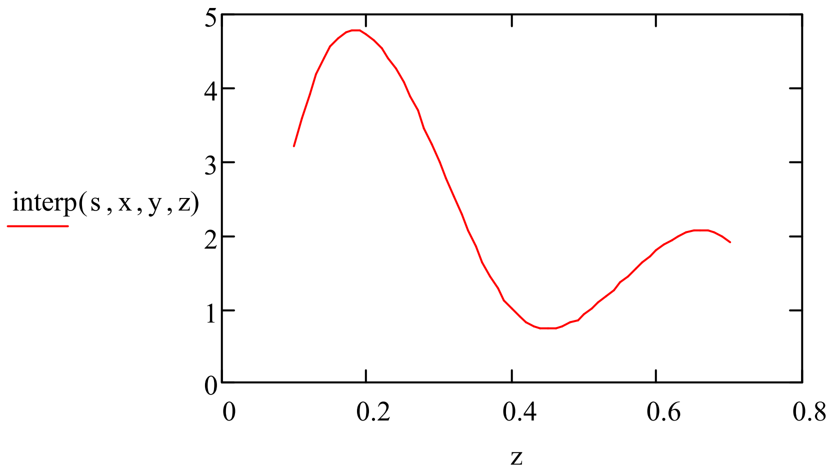
Определим значение функции в промежуточных точках со значениями 0,2 и 0,5.

Для сравнения выполним интерполяцию по тем же данным другими способами, заложенными в Mathcad; кусочно-линейной и сплайн интерполяцией.

Графики интерполяционных функций



s := cspline(x,y)



Значения в заданных точках:

для полиномиальной

Q(0.2) = 4.9889 Q(0.5) = 0.7089

для линейной

linterp(x,y,0.2) = 3.1 linterp(x,y,0.5) = 1.4

для сплайн-интерполяции

interp(s,x,y,0.2) = 4.7265 interp(s,x,y,0.5) = 0.9188

Результаты вычислений в промежуточных точках достаточно сильно различаются между собой, и принятие той или иной модели может основываться на данных, внешних относительно использованных измерений.

Интерполяция является частным случаем аппроксимации, когда степень интерполяционного полинома равна числу измерений без единицы и $n = m$ (число измерений равно $n + 1$, а число неизвестных коэффициентов модели равно $m + 1$). Когда $n > m$, в общем случае имеем задачу аппроксимации.

Для данной функции $f(x)$ найти полином $Q_m(x)$ степени m, который в заданных точках x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) доставляет минимум некоторой функции коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$): $S_m(a_0, a_1, \ldots, a_m)$. Такой полином называют аппроксимирующим. В общем случае $Q_m(x)$ есть обобщенный многочлен вида (4.7).

Функцию $S_m(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ можно выбрать в соответствии с методом наименьших квадратов как сумму квадратов отклонений полинома $Q_m(x)$ от функции $f(x_i)$ на заданном множестве точек

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} \left[Q_m(x_i) - f(x_i) \right]^2. \tag{4.12}$$

Такой способ носит название квадратичной аппроксимации.

Вычисление коэффициентов аппроксимирующего полинома $Q_m(x)$ выполняется путем решения системы линейных уравнений:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}, \tag{4.13}$$

где $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^m \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^m \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix}$; $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$;

$y_i = f(x_i)$ (i = 0, 1, 2, …, n) и верхний индекс T означает операцию транспонирования матрицы.

Система уравнений (4.13) получена путем дифференцирования критерия квадратичной аппроксимации (4.12) по искомым коэффициентам и приравниванию нулю полученных выражений. В случае обобщенного полинома (4.7) с произвольными функциями $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$ в системе уравнений (4.13) вместо значений степеней x требуется подстановка значений соответствующих функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$, вычисленных в заданных точках x.

Пример 4 Выполним аппроксимацию функции из примера 3 полиномами степени 3 и 2.

Для $Q_3(x)$:

Заполнение матрицы **X**

$$X1_{i,0} := 1 \quad X1_{i,1} := x_i \quad X1_{i,2} := (x_i)^2 \quad X1_{i,3} := (x_i)^3$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 & 0.001 \\ 1 & 0.3 & 0.09 & 0.027 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \\ 1 & 0.7 & 0.49 & 0.343 \end{pmatrix}$$

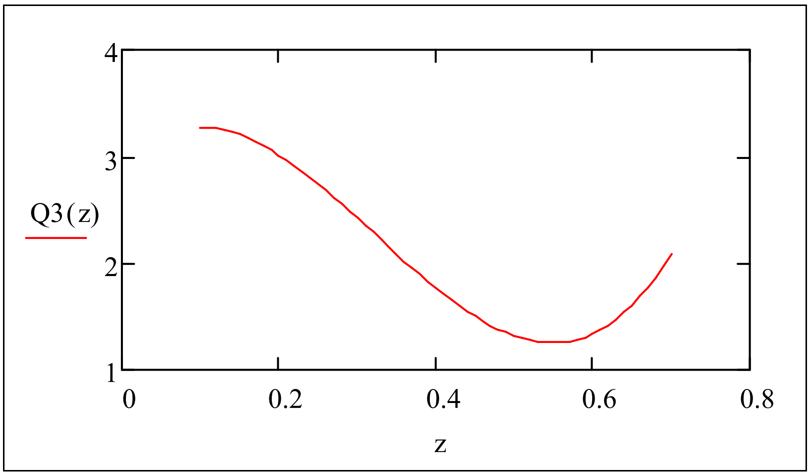
Получение коэффициентов аппроксимирующего полинома $Q_3(x)$:

$$A := \left(X1^T \cdot X1\right)^{-1} \cdot X1^T \cdot y \qquad A = \begin{pmatrix} 2.9459 \\ 7.1667 \\ -42.9887 \\ 44.2982 \end{pmatrix}$$

Определение функции полинома

$$Q3(z) := A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2 + A_3 \cdot z^3$$

График функции для аппроксимирующего полинома $Q_3(x)$:



Среднеквадратическая погрешность аппроксимации:

$$s3 := \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{3} \left(Q3(x_j) - y_j\right)^2}{3}} \qquad s3 = 0.6175$$

Для $Q2(x)$:

Заполнение матрицы **X**

$$X2_{i,0} := 1 \qquad X2_{i,1} := x_i \qquad X2_{i,2} := (x_i)^2$$

$$X2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 \\ 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \\ 1 & 0.7 & 0.49 \end{pmatrix}$$

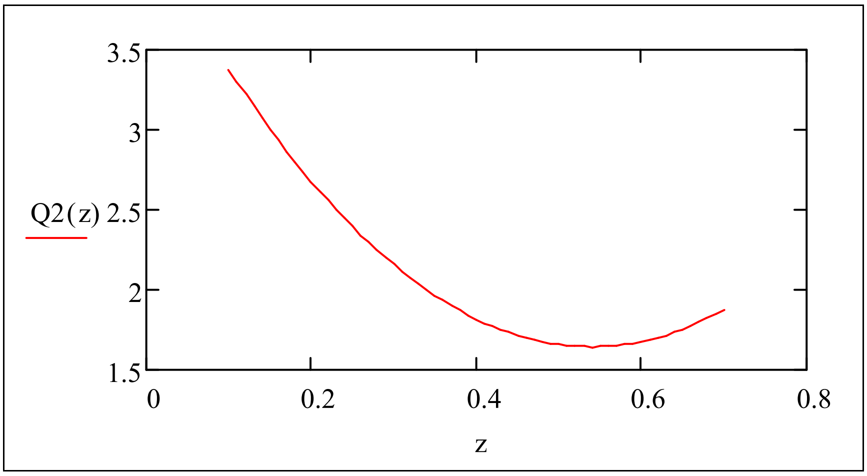
Получение коэффициентов аппроксимирующего полинома $Q2(x)$:

$$A := \left(X2^T \cdot X2\right)^{-1} \cdot X2^T \cdot y \qquad A = \begin{pmatrix} 4.2506 \\ -9.6667 \\ 8.961 \end{pmatrix}$$

Определение функции полинома

$$Q2(z) := A_0 + A_1 \cdot z + A_2 \cdot z^2$$

График функции для аппроксимирующего полинома $Q2(x)$:



Среднеквадратическая погрешность аппроксимации:

$$s2 := \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{3}\left(Q2(x_j) - y_j\right)^2}{3}} \qquad s2 = 0.6891$$

Пример 5 Выполним аппроксимацию данных приведенных в табличной форме (см. ниже) в виде обобщенного многочлена $Q_2(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, где функции $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$) выбраны в виде:

$$\boxed{x^2, \quad x, \quad \frac{1}{1+x}}.$$

Данные эксперимента и вектор функция составляющих $Q_2(x)$:

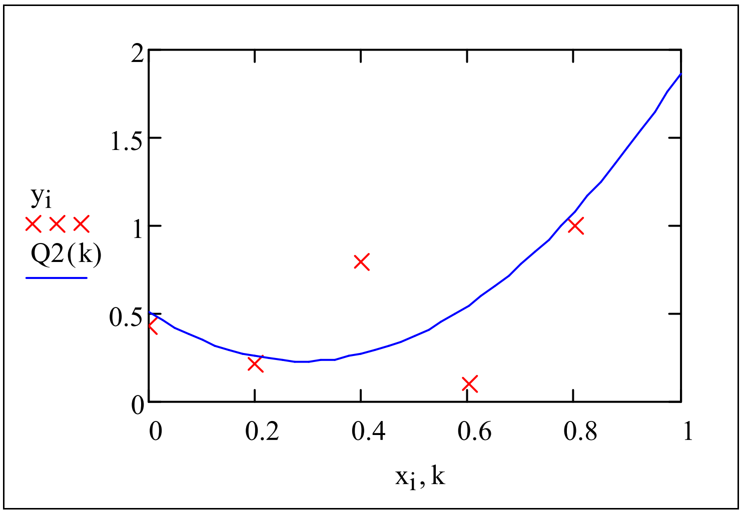
$$x := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.22 \\ 0.80 \\ 0.10 \\ 1.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} \qquad F(z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ z \\ \dfrac{1}{1+z} \end{pmatrix}$$

Вектор коэффициентов модели вычислим с помощью специальной функции Mathcad linfit(x,y,F)

$$c := \mathrm{linfit}(x, y, F) \qquad c = \begin{pmatrix} 3.0866 \\ -1.475 \\ 0.5154 \end{pmatrix}$$

Функция обобщенного многочлена и ее график:

$$Q2(z) := F(z) \cdot c \qquad j := 0..5 \qquad k := 0, 0.025..1$$



Среднеквадратическая ошибка:

$$\sigma := \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{5} \left(Q2(x_j) - y_j\right)^2}{5}} \qquad \sigma = 0.3201$$

Существуют модели, которые не являются многочленами вида (4.7) и нелинейно зависят от параметров, как, например, функция

$$y = \frac{1}{\sqrt{a+x}} e^{bx}. \tag{4.14}$$

Здесь y нелинейно зависит от параметров a и b. К некоторым функциям такого вида применимо приведение нелинейной задачи к линейной по следующему способу.

Пусть задана система точек $M_i(x_i, y_i)$. Вводятся новые переменные X и Y так, чтобы преобразованные точки $N_i(X_i, Y_i)$ лежали на одной прямой. Например, степенная зависимость $y = cx^a$ путем логарифмирования приводится к линейной:

$$\lg y = a \lg x + \lg c \tag{4.15}$$

и линейная модель в новых координатах:

$$Y = aX + b. \tag{4.16}$$

Здесь $N_i(X_i, Y_i) = N_i(\lg x_i, \lg y_i)$. Некоторые функции, которые приводятся к линейной относительно коэффициентов задаче аппроксимации, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Некоторые функции, допускающие преобразование к линейной относительно коэффициентов в задаче аппроксимации

№ п/п	Исходная функция	Линейная функция	Соотношения для преобразования
1	$y = ax^b$	$Y = \alpha + bX$	$Y = \lg y$; $X = \lg x$; $\alpha = \lg a$

2	$y = ab^x$	$Y = \alpha + \beta x$	$Y = \ln y$; $\alpha = \ln a$; $\beta = \ln b$
3	$y = a + \dfrac{b}{x}$	$Y = ax + b$	$Y = yx$
4	$y = \dfrac{1}{ax+b}$	$Y = ax + b$	$Y = \dfrac{1}{y}$
5	$y = \dfrac{x}{ax+b}$	$Y = ax + b$	$Y = \dfrac{x}{y}$
6	$y = a\lg x + b$	$Y = aX + b$	$X = \lg x$

В тех случаях, когда невозможно перейти к линейной относительно коэффициентов задаче аппроксимации, выводятся подобные (4.13) нелинейные уравнения аналогичным способом и их решение дает искомые коэффициенты.

Вопросы для самопроверки

1. Какие основные этапы можно выделить в модельном исследовании (построении модели)?
2. Какие существуют два основных способа формирования модели?
3. В чем заключается аналитический способ построения модели?
4. В чем заключается задача идентификации технических объектов?
5. Какой эксперимент называют активным (пассивным)?
6. Какие выделяют три класса задачи идентификации технических объектов?
7. Как формулируется задача интерполяции функций?
8. Как формулируется задача аппроксимации функций?
9. Как вычислить коэффициенты полинома степени m при квадратичной аппроксимации?
10. Какие функции допускают приведение задачи приближения функций к линейной ?

5. Модели прогнозирования физических процессов

5.1. Физические процессы и их характеристики

5.1.1. Классификация физических процессов

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления и изменения состояний объектов, можно классифицировать в самом общем виде как детерминированные и недетерминированные. К детерминированным относятся процессы, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями. Рассмотрим, например, твердое тело, подвешенное на упругой пружине (рис. 5.1,*а*).

Пусть m – масса тела, а k – коэффициент жесткости пружины. Предположим, что тело получает начальное смещение X_m из положения равновесия (рис. 5.1,*б*), и освобождается в момент времени $t = 0$. На основе фундаментальных законов механики или путем повторных наблюдений можно установить справедливость следующего соотношения:

$$x(t) = X_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad t \geq 0 \tag{5.1}$$

Формула (5.1) достаточно точно описывает положение тела в любой момент времени в недалеком будущем. Для более точного предсказания положения тела в течение длительного времени требуется учесть затухание колебаний. Следовательно, физический процесс, характеризующий движение данного тела, относится к детерминированным.

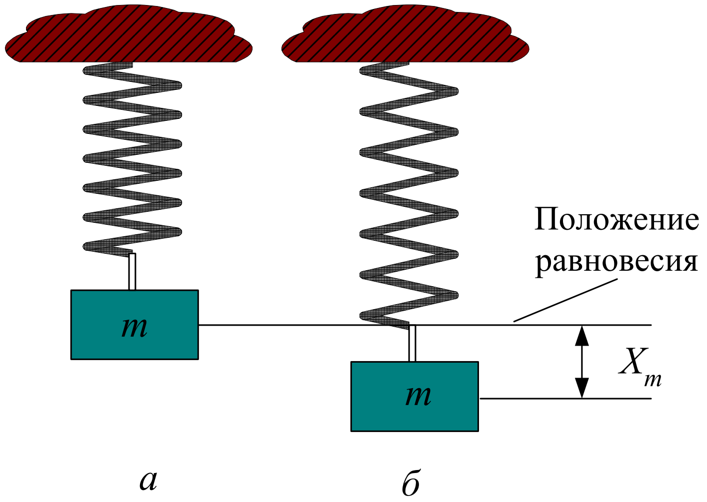


*Рис. 5.1.*Тело, подвешенное на пружине

На практике встречается много физических процессов, которые с высокой точностью могут быть описаны математическими соотношениями. Например, движение спутника по околоземной орбите, изменение напряжения на конденсаторе, который разряжается через сопротивление, вибрация несбалансированного ротора генератора или изменение температуры воды при охлаждении. Детерминированные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.2.

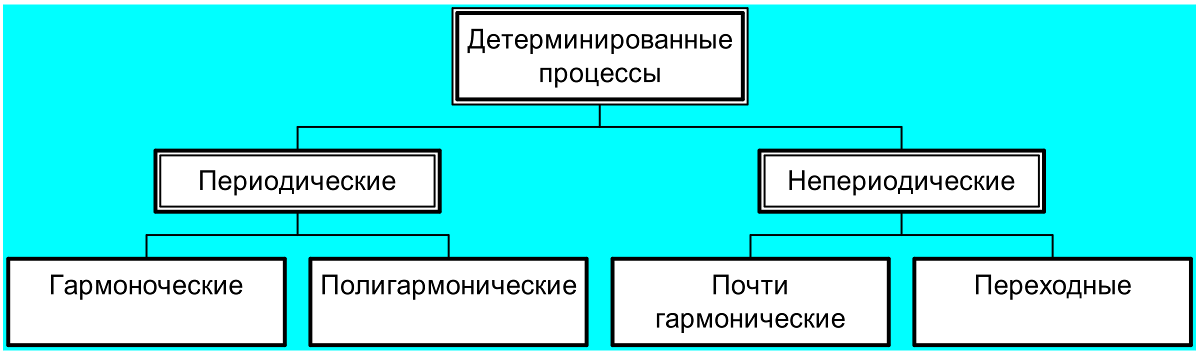


Рис. 5.2. Классификация детерминированных процессов

Существует много процессов, имеющих недетерминированный, т е. случайный характер. Например, изменение уровня сигнала в канале связи, температура воздуха, мощность, потребляемая из сети в заводском цехе. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи осредненных статистических характеристик. Будем обозначать случайный процесс $x(t)$ – случайной функцией от независимой переменной t.

Случайные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.3.

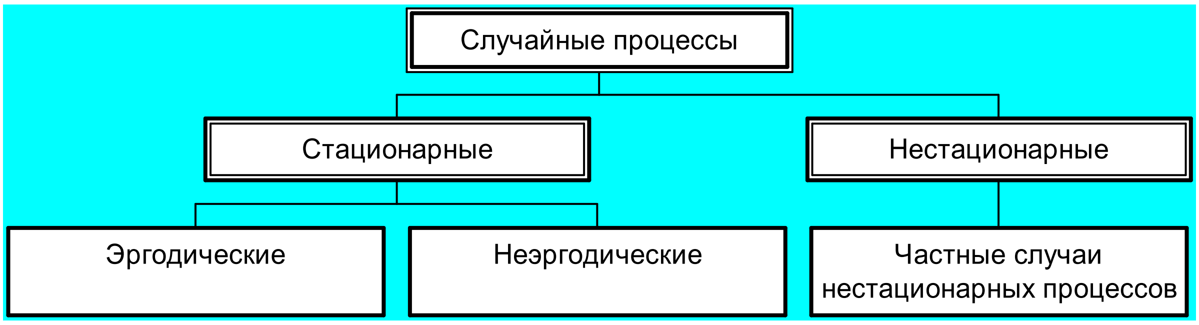


Рис. 5.3. Классификация случайных процессов

Во многих случаях трудно решить, относится рассматриваемый физический процесс к детерминированным или случайным. Можно, например, считать, что в действительности ни один физический процесс не является строго детерминированным, поскольку всегда существует возможность того, что в будущем какое-либо непредвиденное событие изменит течение процесса таким образом, что полученные данные будут носить характер иной, чем предполагалось ранее. С другой стороны, можно утверждать, что в действительности ни один физический процесс не имеет строго случайной природы, так как при условии достаточно полного знания механизма изучаемого процесса его можно описать точными математическими соотношениями.

Практически решение о детерминированном или случайном характере процесса принимается обычно исходя из возможности либо невозможности воспроизведения его при заданных условиях. Если многократное повторение опыта дает одинаковые результаты (с точностью до ошибки измерения), то можно, вообще говоря, считать процесс детерминированным. Если же повторение опыта в идентичных условиях приводит к разным исходам, то природа процесса полагается случайной.

5.1.2. Детерминированные процессы

Детерминированные периодические процессы делятся на гармонические и полигармонические. Гармоническими называют процессы, которые могут быть описаны функцией

$$x(t) = X_m \sin\left(2\pi f_0 t + \theta\right), \tag{5.2}$$

где X_m – амплитуда;

f_0 – циклическая частота, измеряемая в циклах в единицу времени;

θ – начальная фаза, рад.

Соотношение (5.2) может быть представлено графически в функции времени и в амплитудно-частотном изображении (спектре), как показано на рис. 5.4.

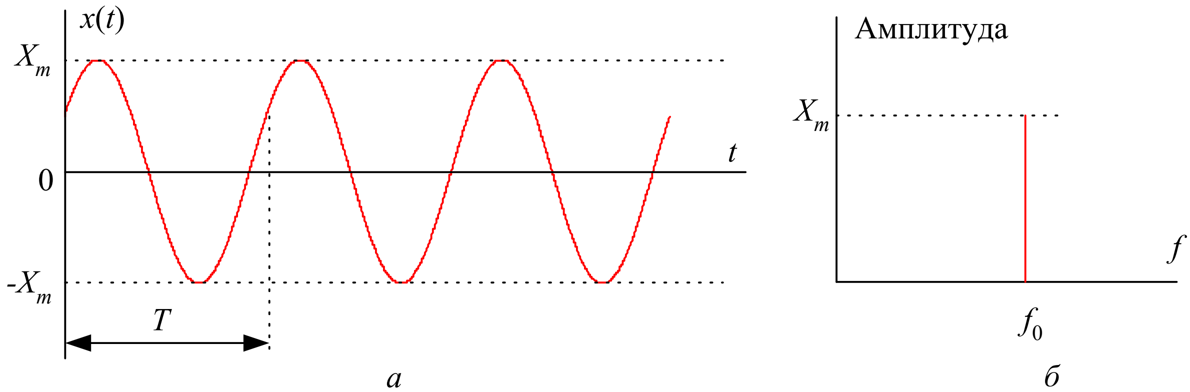


Рис. 5.4. Гармонический процесс и его спектр

Циклическая частота $f_0 = \dfrac{1}{T}$, где T – период гармонических колебаний.

Полигармонические процессы описываются функцией времени, точно повторяющей свои значения через одинаковые интервалы

$$x(t) = x(t \pm iT), \quad i = 1, 2, 3... \tag{5.3}$$

Число циклов в единицу времени называется основной частотой f_1.

Полигармонический процесс может быть представлен рядом Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i \cos 2\pi i f_1 t + b_i \sin 2\pi i f_1 t\right), \tag{5.4}$$

Где $f_1 = \dfrac{1}{T}, \quad f_i = i f_1, \quad i = 2,3...;$

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos 2\pi i f_1 t dt, \quad i = 0, 1, 2,...;$$

$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin 2\pi i f_1 t dt, \quad i = 1, 2, 3, ...$$

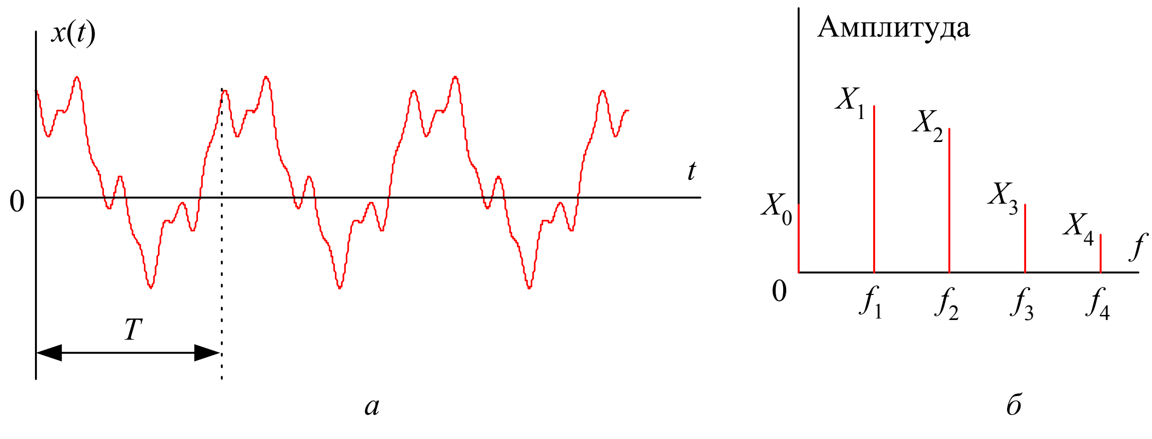
Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cos\left(2\pi i f_1 - \theta_i\right), \tag{5.5}$$

где $X_0 = \dfrac{a_0}{2}; \quad X_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad i = 1,2,3...; \quad \theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{b_i}{a_i}\right); \quad i = 1,2,3... .$

Как видно из (5.5), полигармонические процессы состоят из постоянной составляющей X_0 и бесконечного числа синусоидальных составляющих, называемых гармониками, с амплитудами X_i и начальными фазами θ_i. Частоты всех гармоник кратны основной частоте f_1.

Полигармонический процесс может имеет вид, представленный на рис 5.5,*а*, и соответствующий формуле (5.5) дискретный спектр, показанный на рис 5.5,*б*.



а *б*

Рис. 5.5. Полигармонический процесс и его спектр

В других случаях составляющая с основной частотой может отсутствовать. Предположим, например, что периодический процесс формируется в результате сложения трех синусоидальный функций с частотами 60, 75 и 100 Гц. Наибольший общий делитель этих чисел равен 5 Гц, поэтому период результирующего периодического процесса составляет 0,2 с. Следовательно, при разложении в ряд Фурье значения X_i будут равны нулю при всех i, кроме $i = 12$, $i = 15$, $i = 20$.

Физические процессы полигармонического типа встречаются гораздо чаще простых гармонических процессов. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, то зачастую при этом имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Например, напряжение на выходе генератора переменного тока содержит небольшие колебания с частотами высших гармоник.

Однако процессы, образованные при суммировании двух или более гармонических функций с произвольными частотами, не будут, вообще говоря, периодическими. Сумма двух или более синусоидальных функций образует периодический процесс только в том случае, если отношение всех возможных пар частот представляет собой рациональные числа. Это означает, что существует некоторый основной период, удовлетворяющий формуле (5.3). Так процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi 7t + \theta_3) \qquad (5.6)$$

является периодическим, поскольку 2/3, 3/7 и 2/7 – рациональные числа (с основным периодом, равным единице). С другой стороны, процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi \sqrt{50} t + \theta_3) \qquad (5.7)$$

не является периодическим, поскольку числа $2/\sqrt{50}$ и $3/\sqrt{50}$ иррациональные и основной период равен бесконечности. В этом случае процесс является почти периодическим, но соотношение (5.3) не удовлетворяется при любых конечных значениях T.

Таким образом, к почти периодическим относятся такие процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sin\left(2\pi f_i t + \theta_i\right), \qquad (5.8)$$

имеющей хотя бы одно отношение f_i / f_j, которое не является рациональным числом.

Дискретный спектр почти периодического процесса аналогичен спектру полигармонического процесса.

К переходным относятся все непериодические процессы, не являющиеся почти периодическими процессами, описанными выше. Другими словами, переходные процессы включают в себя все не рассмотренные ранее процессы, которые могут быть описаны подходящими функциями времени. Три примера распространенных переходных процессов приведены на рис. 5.6.

Физические переходные процессы весьма многочисленны и разнообразны. Например, процесс, изображенный на рис. 5.6,*а*, может описывать изменение во времени температуры проводника после отключения протекавшего по нему тока. Кривая на рис. 5.6,*б* может характеризовать свободные колебания инерционной механической системы после прекращения действия вынуждающей силы. График на рис. 5.6,*в* может описывать изменение во времени механического напряжения в тросе, который подвешен на опорах линии электропередачи и разрывается в момент c.

Важное отличие переходных процессов от периодических и почти периодических состоит в том, что их невозможно представить с помощью дискретного спектра. Однако в большинстве случаев получают непрерывное спектральное представление переходных процессов, используя интеграл Фурье

$$x(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{2\pi it}dt.$$

$$x(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t}\cos bt & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}A & 0\leq t\leq c\\ 0 & 0<t \text{ и } t>c\end{cases}$$

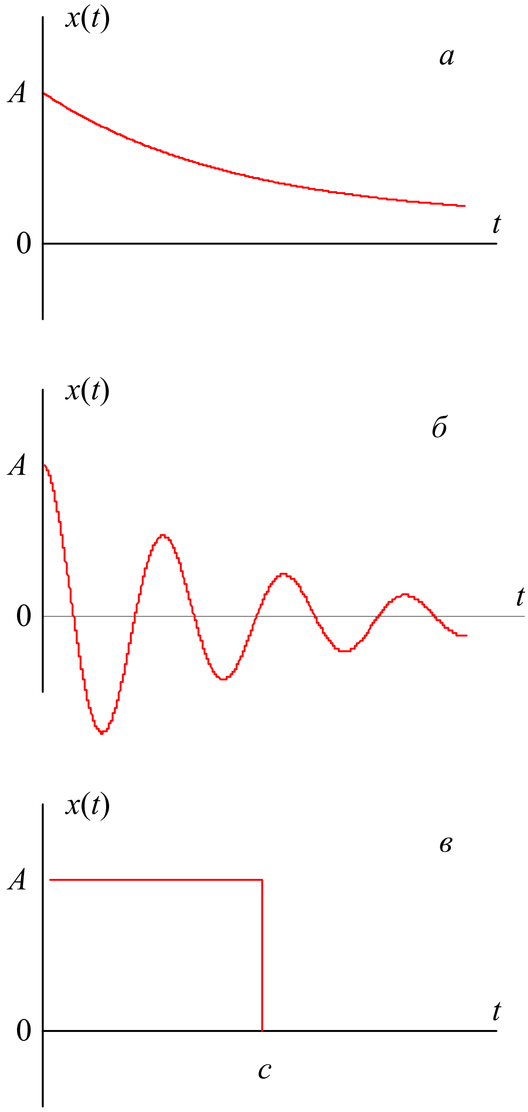


Рис. 5.6. Примеры переходных процессов

Спектр Фурье $X(f)$ в общем случае является комплексной функцией, которая может быть записана в показательной форме

$$X(f)=|X(f)|e^{-j\theta(f)} \tag{5.9}$$

Здесь $|X(f)|$ – модуль, а $\theta(f)$ – аргумент. Модули $|X(f)|$ преобразования Фурье трех переходных процессов, изображенных на рис. 5.6, показаны на рис. 5.7.

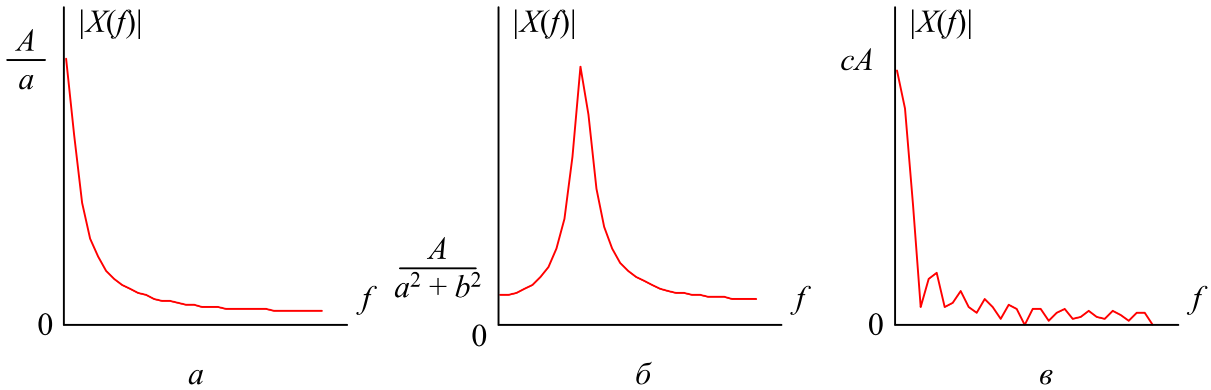


Рис. 5.7. Спектры переходных процессов

5.1.3. Случайные процессы

Функция $X(t)$ называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной. Случайные функции времени называют случайными процессами.

Реализацией случайной функции $X(t)$ (выборочной функцией) называется конкретный вид, который она принимает в результате опыта, рис. 5.8. Реализация случайного процесса может рассматриваться как элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса. Совокупность реализаций случайного процесса называется ансамблем реализаций. Совокупность значений реализаций в фиксированный момент времени (выборка случайных значений) называется сечением случайного процесса.

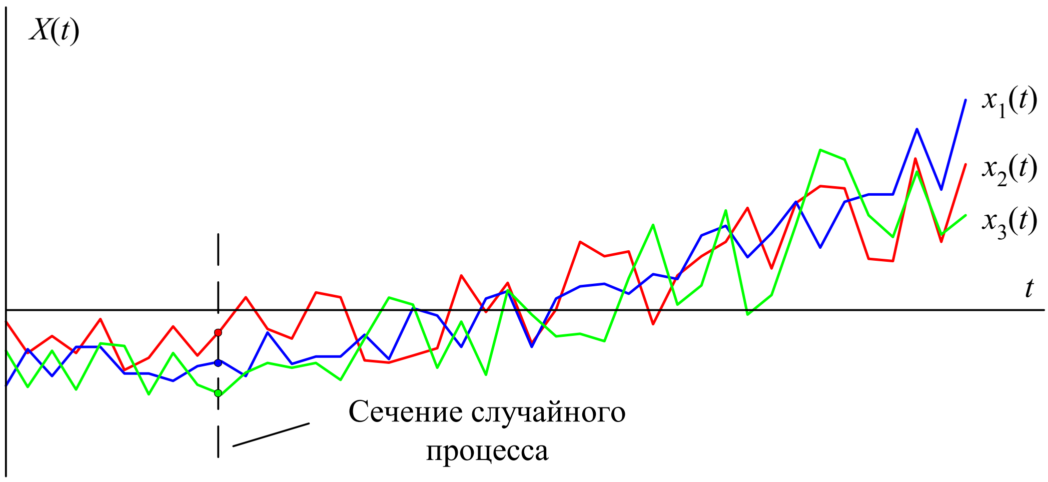


Рис. 5.8. Реализации случайного процесса

В любом сечении случайный процесс есть случайная величина.

Математическое ожидание случайного процесса есть функция времени

$$m_X(t) = M[X(t)]. \tag{5.10}$$

Второй центральный момент для двух сечений случайного процесса называется ковариационной функцией

$$R_X(t,t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\cdot\overset{\circ}{X}(t')\right], \tag{5.11}$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$ – центрированный случайный процесс.

При $t = t'$ ковариационная функция равна дисперсии случайного процесса

$$R_X(t,t) = D_X(t) = D\left[X(t)\right]. \tag{5.12}$$

Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса могут быть найдены по реализациям случайного процесса – осреднения по реализациям:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t), \\ R_X(t,t') &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{\circ}{x}_k(t)\cdot\overset{\circ}{x}_k(t'), \end{aligned} \tag{5.13}$$

где N – число реализаций случайного процесса.

Если математическое ожидание и ковариационная функция не зависят от времени t, то процесс является стационарным

$$m_X(t) = m_X,\;\; R_X(t,t') = R_X(\tau). \tag{5.14}$$

где $\tau = t' - t$. В (5.15) ковариационная функция зависит только от величины τ, а не от места его расположения на оси времени, рис. 5.9.

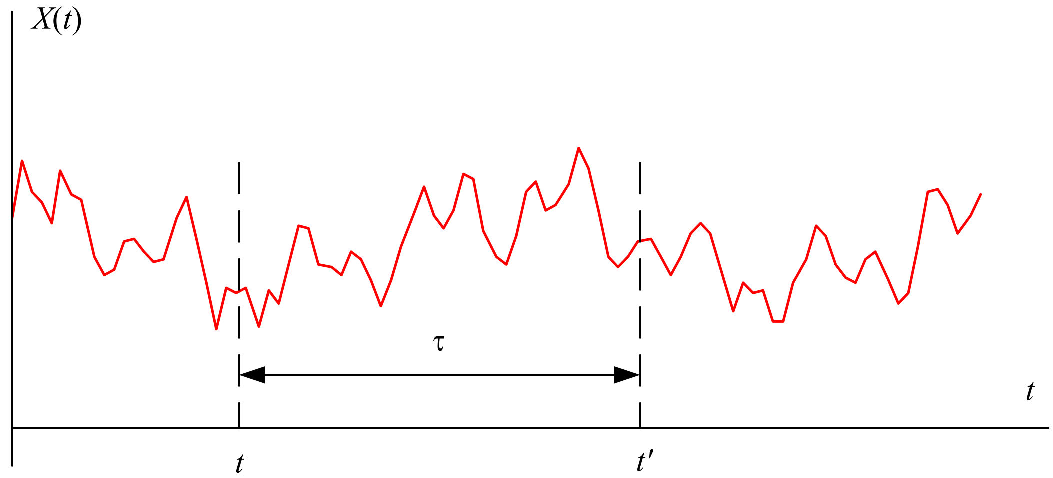


Рис. 5.9. Время между двумя сечениями случайного процесса

Возможный вид ковариационной функции показан на рис. 5.10.

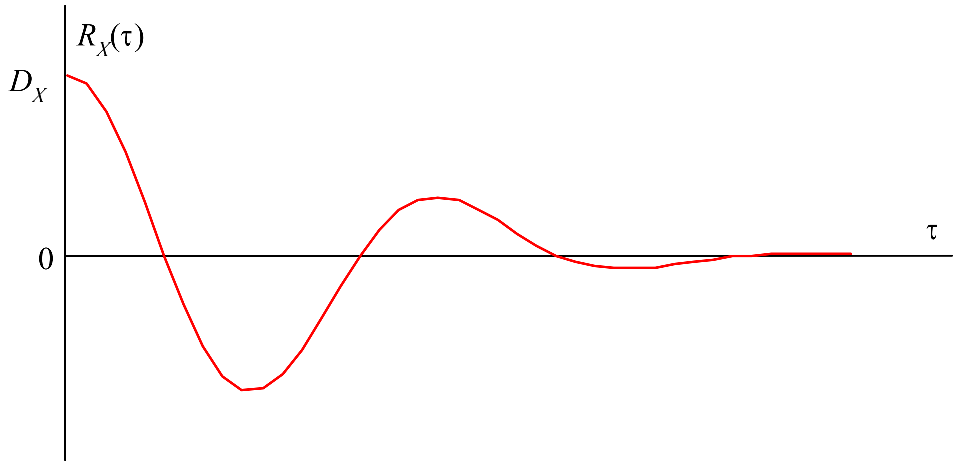


Рис.5.10. Ковариационная функция случайного процесса

Во многих случаях используется нормированная ковариационная (или корреляционная) функция. Для стационарного случайного процесса

$$r_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{D_X}. \tag{5.15}$$

Величина корреляционной функции $|r_X(\tau)| \le 1$.

Возможно осреднение по времени отдельных выборочных функций (реализаций). Для k-й выборочной функции имеем:

$$\begin{aligned} m_X &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_k(t)dt, \\ R_X(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}_k(t)\cdot \overset{\circ}{x}_k(t+\tau)dt. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Если случайный процесс $X(t)$ стационарен и характеристики m_X и $R_X(\tau)$ одинаковы для различных выборочных функций, то такой процесс называют *эргодическим*.

Эргодические процессы представляют важный класс случайных процессов.

Нестационарными случайными процессами являются все случайные процессы, не обладающие свойствами стационарности. Эти процессы сложны в исследованиях, и зачастую в задачах по их анализу их разбивают на интервалы стационарности или приближенно аппроксимируют стационарными процессами.

5.2. Методологические основы прогнозирования

Прогноз – научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем и/или об альтернативных путях и сроках их осуществления.

Можно выделить два вида прогнозируемых характеристик системы, зависящих от времени: *переменные состояния* и *переменные интенсивности*.

Переменная состояния определяется периодически, и ее значение в течение небольшого интервала времени не зависит от времени, прошедшего с начала наблюдения. Переменная интенсивности также определяется периодически, но ее значение пропорционально времени, прошедшего с момента предыдущего наблюдения. Такие характеристики системы, как температура, скорость, число подписчиков на журнал или цена, являются примерами переменных состояния. В качестве примеров переменной интенсивности можно привести количество выпавших осадков, количество переданной электроэнергии, количество проданных экземпляров или спрос. Если переменная состояния характеризует количество, то переменная интенсивности – скорость его изменения.

Если прогноз делается в момент времени t_0, то для этого используются данные о течении процесса до этого момента. Такие данные называются ретроспективой и могут быть описаны какой-либо математической моделью физического процесса. Время, в течение которого были собраны данные о процессе, называется временем ретроспективы – $L_{рет}$. Время, на которое делается прогноз, называется временем упреждения – $L_{упр}$, рис. 5.11

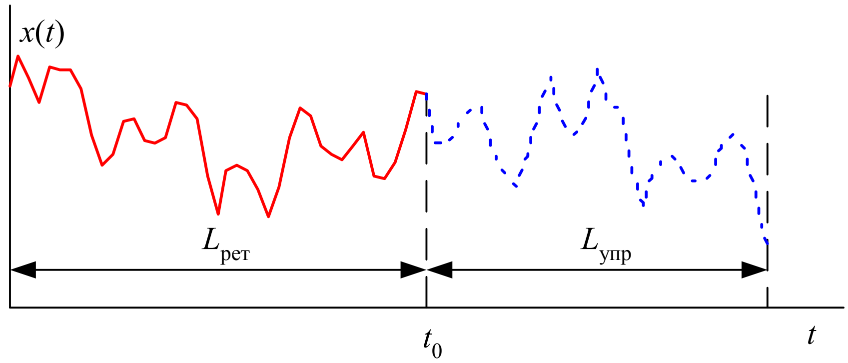


Рис. 5.11. Время ретроспекции и упреждения

Процессы прогнозирования переменных состояния и интенсивности отличаются друг от друга следующими особенностями:

- если измерения характеристик системы проводятся через равные интервалы времени, то величину интервала необходимо учитывать при оценке переменных интенсивности, в то время как при оценке переменных состояния эта величина не имеет значения;
- так как прогнозы обычно осуществляются для нескольких последовательных интервалов времени в пределах некоторого времени упреждения, по истечении которого становятся важными результаты реализации принятых решений, то правильный прогноз переменной состояния должен определять ее значение в конце времени упреж-

дения, а прогноз переменной интенсивности должен представлять собой сумму прогнозов на протяжении времени упреждения;

- функция распределения во времени вероятностей ошибок прогноза для переменной состояния должна соответствовать функции распределения вероятностей ошибок в исходных данных, тогда как для переменной интенсивности закон распределения вероятностей ошибок прогноза во времени стремится к нормальному при любом законе распределения вероятностей ошибок в исходных данных, поскольку эти ошибки представляют собой сумму ошибок прогноза в отдельные интервалы времени.

Объектами прогнозирования могут быть процессы, явления, события.

Здесь рассматриваются вопросы прогнозирования физических процессов.

Прогноз разделяют на текущий, краткосрочный и долгосрочный. Сравнительная характеристика этих прогнозов дана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Характеристика различных видов прогноза

Признак	Вид прогноза		
	Оперативный	Краткосрочный	Долгосрочный
Время упреждения	1…2 суток	До 1…2 лет	На 5…20 лет
Соотношение $L_{упр}$ и $L_{рет}$			
Тип используемой информации	Непрерывные процессы	Интервальная	Интервальная качественная
Основные гипотезы	Стационарность, эргодичность, устойчивость средних	Устойчивость тенденций	Неустойчивость и неравномерность развития
Определяющие законы функционирования	Физические, вероятностные	Системные, причинно-следственные	Эволюционные

Методы прогнозирования можно подразделить на три вида:

- статистические (описательные);
- причинно-следственные;
- комбинированные.

Статистические методы не вскрывают внутренних связей в системе и влияния внешней среды и по существу экстраполируют детерминированный или стохастический процесс по подобранной математической модели.

Причинно-следственные модели прогноза учитывают влияние окружающей среды и позволяют выделить причины изменений в системе. Прогноз, полученный по такой модели, объясняет будущее системы.

Если процесс является периодическим, то частота наблюдений должна быть, по крайней мере, вдвое больше частоты изучаемого процесса.

Важное значение имеет анализ исходных данных для прогнозирования. Данные являются результатами выборочных наблюдений, в которых возможны выбросы, т. е. значения, которые появились в результате аномальных эффектов (чрезвычайно большая температура в помещении вследствие поломки кондиционера, большой спрос на продукцию во время забастовок, изменение потребления электроэнергии в период экономических и социальных перемен и т. п.). Поэтому не всякая совокупность является подходящим временным рядом и перед построением модели прогноза необходимо из данных исключить выбросы, которые не характеризуют прогнозируемый процесс.

Некоторые процессы поддаются графо-аналитическому описанию в силу некоторых физических, экологических и даже экономических закономерностей, Так, например, замечена закономерность появления и спада спроса на некоторую продукцию на рынке, рис.5.12. Известны и хорошо подтверждаются на практике экологические модели размножения и гибели популяций.

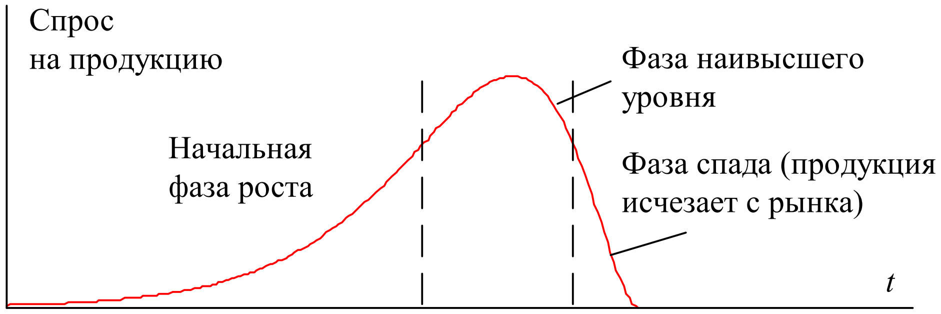


Рис.5.12. Кривые жизненного цикла продукции

5.3. Экспоненциальная модель прогнозирования

Во многих случаях в качестве математического описания физических процессов используется экспоненциальная функция. Рассмотрим такую модель на примере процесса распада радиоактивного элемента.

Известно, что скорость распада любого радиоактивного элемента прямо пропорциональна наличной его массе

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0 \tag{5.17}$$

Знак минус указывает на убывание массы.

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (5.17)

$$\frac{dx}{x} = -kdt \tag{5.18}$$

и после интегрирования получим

$$\ln x = -kt + C. \tag{5.19}$$

При t = 0 из (5.19) будем иметь $C = \ln x_0$, где x_0 – количество массы в начальный момент времени, тогда

$$\ln x - \ln x_0 = -kt \quad \text{и} \quad \ln\frac{x}{x_0} = -kt, \tag{5.20}$$

откуда

$$x(t) = x_0 e^{-kt}, \quad t \ge 0 \tag{5.21}$$

где k – константа, которая может быть определена экспериментальным путем.

Пусть за время $\Delta t = t - t_0$ распалось α % радиоактивного элемента, тогда остаток

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)x_0 = x_0 e^{-k\Delta t} \text{ и } \left(1-\frac{\alpha}{100}\right) = e^{-k\Delta t} \tag{5.22}$$

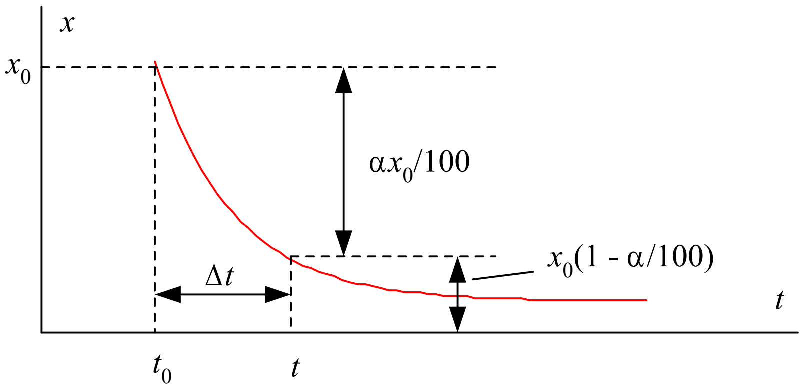


Рис.5.14. Определение параметра модели распада радиоактивного элемента

Логарифмируя полученное выражение и выражая коэффициент k, получим

$$k = -\frac{1}{\Delta t}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) \tag{5.23}$$

Для элемента радия k = 0,00044 1/год.

Во многих случаях экспоненциальная модель зарекомендовала себя очень хорошо как в случае убывания некоторой субстанции, так и для роста субстанции. В общем случае модель формулируется следующим образом: скорость изменения некоторой субстанции (роста, спада) пропорциональна уже имеющемуся количеству. Так, например, скорость увеличения выработанной электрической энергии

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W, \quad \alpha > 0 \tag{5.24}$$

т. е. прирост показателя в единицу времени пропорционален уже имеющемуся количеству (достигнутому уровню) с неизменным коэффициентом пропорциональности $\alpha = \text{const}$.

В логарифмических координатах зависимость $\ln W(t)$ – прямая линия.

$$\ln W(t) = \alpha t + \ln C. \tag{5.25}$$

В случае начала отсчета $t = t_0$ ($t_0 \neq 0$), $W = W_0$ и

$$\ln W_0 = \alpha t_0 + \ln C, \tag{5.26}$$

откуда

$$\ln C = \ln W_0 - \alpha t_0 \tag{5.27}$$

и

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0). \tag{5.28}$$

Окончательно получаем модель

$$W(t) = W_0 e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{5.29}$$

В некоторых случаях оказывается более удобной модель с постоянным коэффициентом β:

$$W(t) = W_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \beta. \tag{5.30}$$

5.4. Логистическая модель прогнозирования

Экспоненциальная модель достаточно хорошо описывает процесс на этапах развития без влияния каких-либо мешающих внешних факторов, при этом темп роста (спада) остается неизменным. Однако во многих случаях на протяжении достаточно большого времени темп процесса не может считаться постоянным.

Рассмотрим модель процесса производства электроэнергии. Замечено, что постоянство темпа роста производства электроэнергии не имеет места и с увеличением времени темп роста снижается. Это связано со многими факторами, среди которых главными являются: стремление к экономии электроэнергии, появление новых энергосберегающих технологий и ограничение энергетических ресурсов (рис. 5.14).

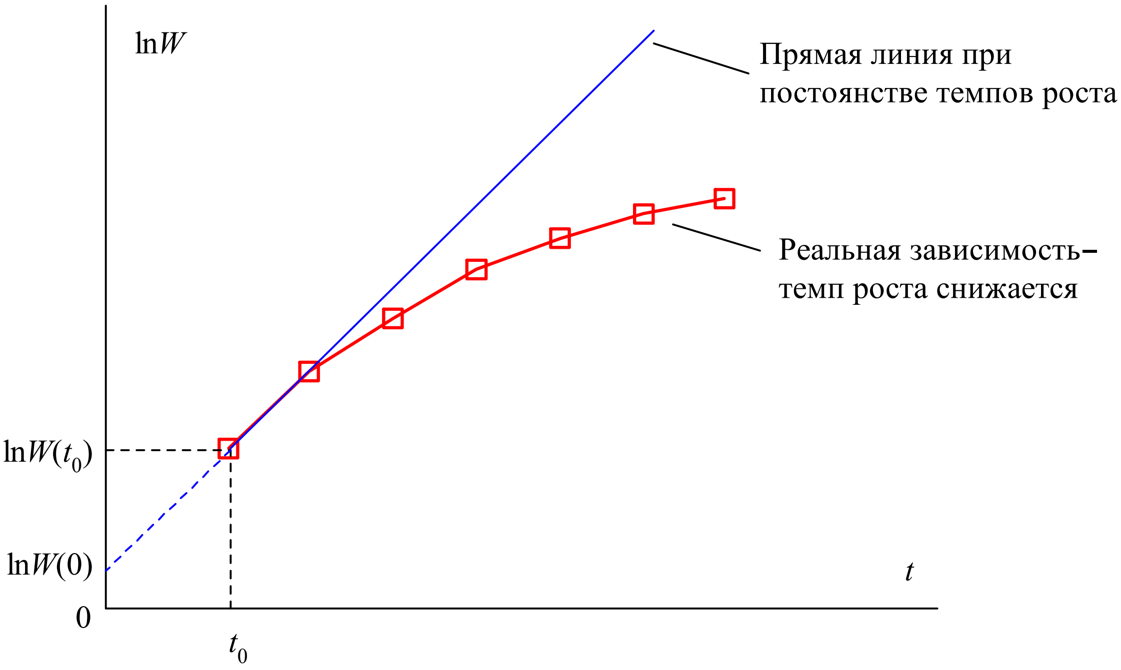


Рис.5.14. Процесс выработки электроэнергии в логарифмических координатах

Для описания целого ряда массовых явлений, где одна группа факторов способствует развитию процесса, а другая, напротив, тормозит развитие, причем тем значительнее, чем дальше продвинулся процесс, используется так называемая логистическая (*s*-образная) кривая.

В случае, когда α = const, процесс производства электрической энергии выражается формулой (5.29) и в логарифмических координатах записывается как

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0). \tag{5.31}$$

Возьмем производную от (5.31) по времени

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \alpha. \tag{5.32}$$

Если на всем рассматриваемом интервале времени производная (5.32) постоянна, то это экспоненциальная модель, в противном случае

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \alpha(t). \tag{5.33}$$

Так как со временем темп роста уменьшается, то можно предположить, что $\alpha(t)$ есть монотонно убывающая функция, и также использовать для нее экспоненциальную модель

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0 \tag{5.34}$$

Логарифмируя выражение (5.34), получаем

$$\ln\alpha = \ln\alpha_0 - \gamma t. \tag{5.35}$$

Таким образом, в логарифмических координатах (5.35) есть прямая линия.

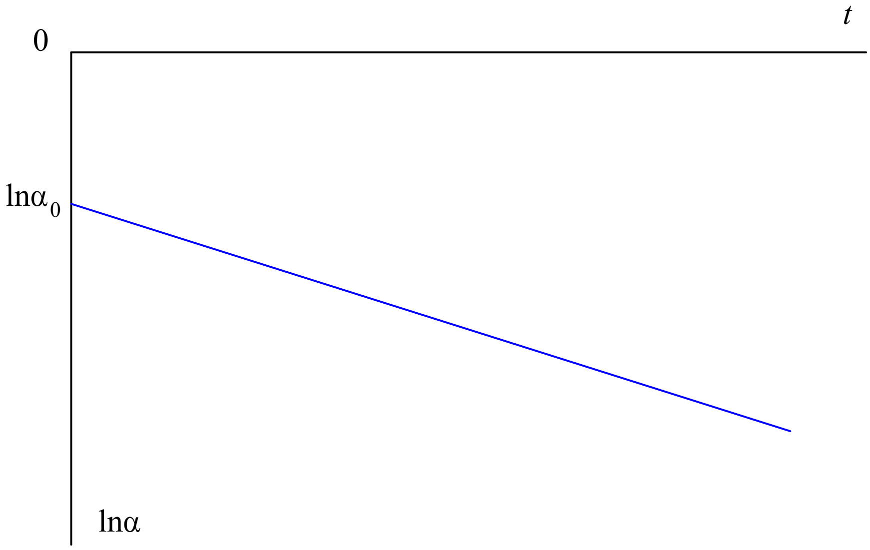


Рис. 5.15. Зависимость темпа роста процесса в логарифмических координатах

Эта модель также могла быть получена из решения дифференциального уравнения (скорость уменьшения темпа α пропорциональна имеющейся величине)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\gamma\alpha. \tag{5.36}$$

При начальных условиях $t = t_0$ и $\alpha(t_0) = \alpha_0$ уравнение (5.36) имеет решение

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}. \tag{5.37}$$

Подставляя (5.37) в (5.32), будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{d\ln W(t)}{dt} = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{5.38}$$

решить которое можно путем разделения переменных

$$d\ln W(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}dt \tag{5.39}$$

и интегрированием от момента времени t_0 до момента t:

$$\int\limits_{\ln W(t_0)}^{\ln W(t)} d\ln W(t) = \alpha_0 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-t_0)}dt \tag{5.40}$$

и

$$\ln W(t) - \ln W(t_0) = -\frac{\alpha_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma(t_0-t_0)}\right). \tag{5.41}$$

Имея в виду, что $W_0 = W(t_0)$ и $e^{-\gamma(t_0-t_0)} = 1$, получаем

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{\alpha_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)}-1\right)}. \tag{5.42}$$

Полученное выражение (5.42) является логистической моделью процесса. С помощью этой модели достаточно хорошо описывается процесс годовой выработки электроэнергии во многих странах мира за последние десятилетия.

В СССР в 60-е годы прирост электроэнергии составлял 5…6 % в год, в 80-е годы он снизился до 2…3 % в год. Аналогичная картина имеется и в некоторых других странах.

В тех случаях, когда зависимость $\ln\alpha(t)$ не является прямой линией, логистическая модель не может быть использована.

Пример 1. Выполним прогноз годовой выработки электроэнергии по данным, приведенным в табл. 5.2. на 2000 и 2005 годы.

Таблица 5.2

Годовая выработка электроэнергии в СССР, млрд. кВт·ч

Годы (t_i)	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
W_i	292	506	740	1038	1293	1544	1726

Для прогнозирования выберем экспоненциальную и логистическую модель

Для определения α в (5.29) найдем логарифмы W_i и найдем коэффициенты линейной функции $\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0)$.

Таблица 5.3

Логарифмы W_i

$(t_i - t_0)$	0	5	10	15	20	25	30
$\ln W_i$	5,677	6,227	6,607	6,945	7,165	7,342	7,454

Здесь $i = 0, 1, 2, \ \ldots \ .n - 1$ ($n = 7$).

Все расчеты и графические построения выполним в Mathcad.

Начальные значения:

Обозначения: Years – годы, W – годовое электропотребление, t_n – первый год ретроспективы.

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad n := 7 \qquad tn := 1960$$

$$i := 1 .. n$$

$$\text{Years} := \begin{pmatrix} 1960 \\ 1965 \\ 1970 \\ 1975 \\ 1980 \\ 1985 \\ 1990 \end{pmatrix} \qquad W := \begin{pmatrix} 292 \\ 506 \\ 740 \\ 1038 \\ 1293 \\ 1544 \\ 1726 \end{pmatrix} \qquad Y := \text{Years} - t_0 \qquad Y = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 5.000 \\ 10.000 \\ 15.000 \\ 20.000 \\ 25.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$$

1. Экспоненциальная модель

$$LnW := \overrightarrow{\ln(W)} \qquad \alpha := slope(Y, LnW) \qquad \alpha = 0.058 \qquad LnW = \begin{pmatrix} 5.677 \\ 6.227 \\ 6.607 \\ 6.945 \\ 7.165 \\ 7.342 \\ 7.454 \end{pmatrix}$$

$$LnW_0 := intercept(Y, LnW) \qquad LnW_0 = 5.904$$

В логарифмических координатах – линейная зависимость:

$$LnW_{exp}(t) := LnW_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$$

Экспоненциальная функция:

$$W_0 := \exp(LnW_0) \qquad W_0 = 366.377$$

$$W_{exp}(t) := W_0 \cdot \exp[\alpha \cdot (t - t_0)]$$

2. Логистическая модель 1

Для получения параметров логистической модели требуется дифференцирование функции $\ln W(t)$. Для функции, заданной дискретными значениями, получим n – 1 точек ее производной

$$j := 0..n-1 \qquad \alpha_j := \frac{LnW_{j+1} - LnW_j}{Years_{j+1} - Years_j}$$

Прологарифмируем значения α_j и запишем их в табл. 5.4.

$$Years\alpha_j := Years_j \qquad Ln\alpha_j := \ln(\alpha_j)$$

(значений α на единицу меньше, чем значений W)

Таблица 5.4

Значения α и логарифмы α

$(t_i - t_0)$	0	5	10	15	20	25
α_t	0,11	0,076	0,068	0,044	0,035	0,022
$\ln\alpha_t$	-2,208	-2,577	-2,693	-3,125	-3,339	-3,804

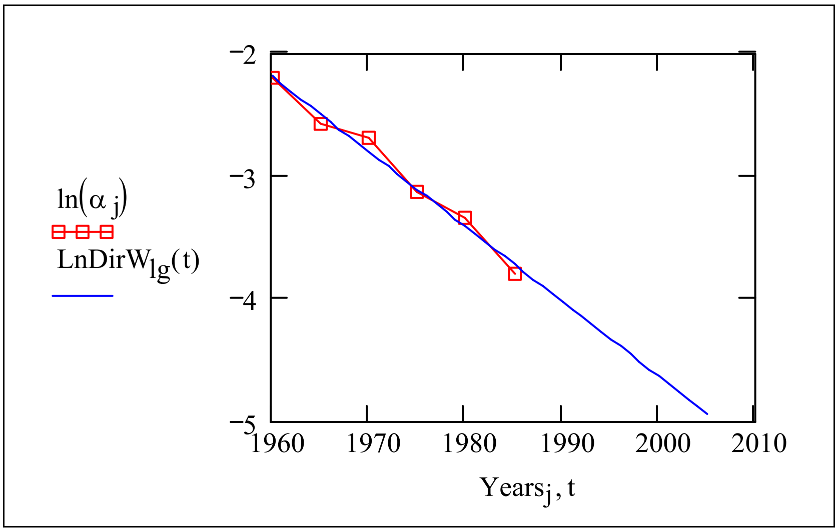
$$\gamma := slope(Years\alpha - t_0, Ln\alpha) \qquad \gamma = -0.061$$

$$Ln\alpha_0 := intercept(Years\alpha - t_0, Ln\alpha) \qquad Ln\alpha_0 = -2.193$$

$$LnDirW_{lg}(t) := Ln\alpha_0 + \gamma \cdot (t - t_0)$$

Построим график логарифма производной от энергии W (квадратиками обозначены дискретные значения из табл. 5.4). На графике показано, как ломаная кривая дискретных значений аппроксимируется прямой линией.

$$t := 1960..2005$$



Запишем функции для логистической модели

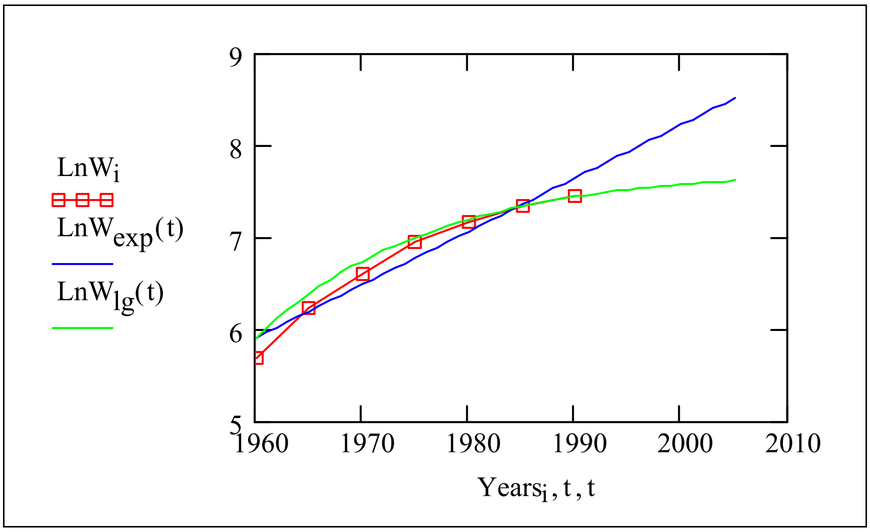
$$\alpha_0 := e^{Ln\alpha_0} \qquad \alpha_0 = 0.112$$

С учетом знака минус γ

$$LnW_{lg}(t) := LnW_0 + \frac{\alpha_0}{\gamma}\cdot\left[\exp\left[\gamma\cdot\left(t - t_0\right)\right] - 1\right]$$

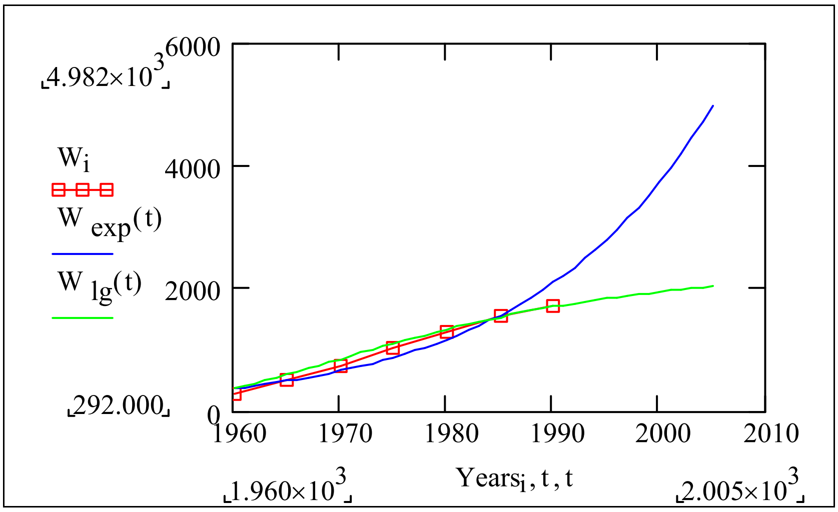
$$W_{lg}(t) := W_0\cdot\exp\left[\frac{\alpha_0}{\gamma}\cdot\left[\exp\left[\gamma\cdot\left(t - t_0\right)\right] - 1\right]\right]$$

Построим графики логарифмов экспоненциальной и логистической модели



На графике видно, что логистическая зависимость дает более точные совпадения с экспериментальными данными.

Построим графики самих математических моделей



В системе Mathcad имеются специальные функции для проведения регрессии для некоторых наиболее распространенных моделей, в том числе для экспоненциальной и логистической модели:

expfit(vx, vy, vg) – возвращает вектор, содержащий коэффициенты (*a*, *b*, и *c*) аппроксимирующего выражения экспоненциальной модели вида $y = ae^{bx} + c$,график которого лучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах vx и vy (вектор vg содержит первое приближение к решению);

lgsfit(vx, vy, vg) – возвращает вектор, содержащий коэффициенты (*a*, *b*, и *c*) аппроксимирующего выражения логистической модели вида, $y = \dfrac{a}{\left(1 + be^{(-cx)}\right)}$, график которого лучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах vx и vy (вектор vg содержит первое приближение к решению);

Выполним моделирование по указанным функциям

Экспоненциальная модель 2

$$C := \begin{pmatrix} 366 \\ 0.051 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \end{pmatrix} := \mathrm{expfit}(Y, W, C) \qquad \begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.063 \times 10^{4} \\ 2.316 \times 10^{-3} \\ -2.034 \times 10^{4} \end{pmatrix}$$

$$W_{exp2}(t) := a_e \cdot e^{b_e \cdot (t - t_0)} + c_e$$

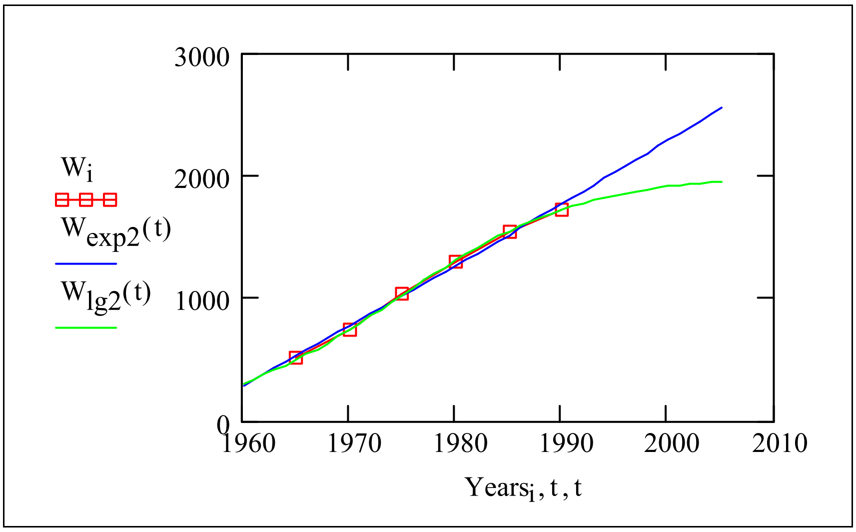
Логистическая модель 2

$$C := \begin{pmatrix} 2000 \\ 20 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{pmatrix} := \mathrm{lgsfit}(Y, W, C) \qquad \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007.10 \\ 5.49 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$W_{lg2}(t) := \frac{a_l}{\left[1 + b_l \cdot \exp\left[-c_l \cdot (t - t_0)\right]\right]}$$

Графические построения по обеим моделям

$i := 1..n \qquad t := 1960..2005$



В системе Mathcad есть функция линейного алгебраического предсказывания predict. Она применяется для гладких и периодических функций и является разновидностью экстраполяции.

predict(v, m, n) – возвращает n предсказанных значений, основанных на *m* последовательных значениях вектора данных v. v – представляет собой вектор равномерно расположенных данных (через равные интервалы по аргументу).

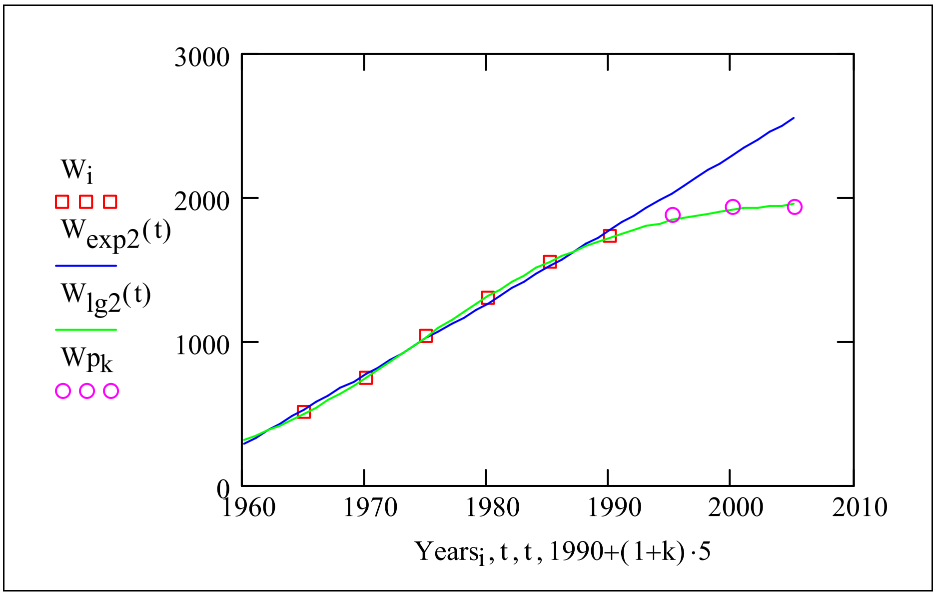
Функция predict использует последние *m* исходных значений данных, чтобы вычислить коэффициенты предсказания. Как только это сделано, она использует последние m точек, чтобы предсказать координаты *m* + 1-й точки, фактически создавая скользящее окно шириной в *m* точек.

Выполним прогноз выработки электроэнергии с помощью этой функции:

$$Wp := \mathrm{predict}(W, 6, 3) \qquad n = 6 \qquad Wp = \begin{pmatrix} 1.886 \times 10^3 \\ 1.938 \times 10^3 \\ 1.939 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$k := 0..2$$

Графическая сравнительная иллюстрация моделей из инструментальных средств Mathcad.



Оценка погрешностей моделей и численные значения прогноза на 2000 и 2005 годы.

$$\xi := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(W_j - W_{exp}\left(Years_j\right)\right)^2}{n}} \qquad \xi = 173.498 \qquad W_{exp}(2000) = 3727.798 \quad W_{exp}(2005) = 4981.876$$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(W_j - W_{lg}\left(Years_j\right)\right)^2}{n}} \qquad \varepsilon = 63.029 \qquad W_{lg}(2000) = 1939.330 \quad W_{lg}(2005) = 2021.827$$

$$\xi 2 := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(W_j - W_{exp2}\left(Years_j\right)\right)^2}{n}} \qquad \xi 2 = 29.907 \qquad W_{exp2}(2000) = 2287.455 \quad W_{exp2}(2005) = 2551.096$$

$$\varepsilon 2 := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(W_j - W_{lg2}\left(Years_j\right)\right)^2}{n}} \qquad \varepsilon 2 = 9.739 \qquad W_{lg2}(2000) = 1907.947 \quad W_{lg2}(2005) = 1950.490$$

5.5. Прогнозирование случайных процессов

Прогнозирование случайных процессов использует статистические характеристики процессов, такие как математическое ожидание $M[X(t)]$ и ковариационная функция $R_X(\tau)$. Особое значение имеет время, в течение которого между сечениями случайного процесса сохраняется статистическая связь – τ_0.

Иногда τ_0 – это половина ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой модуля $r_X(\tau)$ – корреляционной функции случайного процесса

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left| r_X(\tau) \right| d\tau \qquad (5.43)$$

Если $\tau_0 = 0$, то процесс представляет собой «белый шум».

Для тепловой электростанции можно оценить время τ_0 некоторых процессов:

- флуктуация яркости факела в топке – доли секунды;
- температура перегретого пара – минуты;
- нагрузка генератора и расход топлива – десятки минут;
- теплотворная способность твердого топлива – десятки суток.

Время τ_0 называют еще интервалом корреляции процесса.

Ошибка прогноза есть разница действительного и прогнозного значений процесса

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta) \qquad (5.44)$$

Дисперсия ошибки прогноза может быть получена как математическое ожидание квадрата ошибки процесса, так как математическое ожидание стационарного случайного процесса неизменно во времени

$$\sigma_e^2(\theta) = M\left\{\left[X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta)\right]^2\right\}, \qquad (5.45)$$

где t_0 – момент времени, в который выполняется прогноз;

θ – время упреждения;

$X(t_0 + \theta)$ – истинное значение процесса на момент прогноза;

$\hat{X}(t_0 + \theta)$ – прогнозное значение.

Существует три основных метода прогнозирования случайного процесса:

- по последнему значению,
- по математическому ожиданию,
- по условному математическому ожиданию (статистический прогноз).

Прогноз по последнему значению

Прогнозное значение принимается равным последнему значению

$$\hat{X}(t_0 + \theta) = X(t_0). \qquad (5.46)$$

Ошибка прогноза равна

$$e(\theta)=X(t_0+\theta)-X(t_0). \tag{5.47}$$

Дисперсия ошибки

$$\begin{gathered}\sigma_e^2=M\left\{\left[X(t_0+\theta)-X(t_0)\right]^2\right\}=\\=\sigma_X^2-2R_X(\theta)+\sigma_X^2=2\left[\sigma_X^2-R_X(\theta)\right].\end{gathered} \tag{5.48}$$

Дисперсия ошибки растет от 0 при $\theta = 0$ до удвоенной дисперсии процесса при $\theta \to \infty$, но на отдельных, близких к начальному моменту времени интервалах, может превышать удвоенную дисперсию процесса, что объясняется возможной отрицательной корреляцией сечений процесса.

Прогноз по математическому ожиданию

Прогнозное значение принимается равным математическому ожиданию процесса

$$\hat{X}(t_0+\theta)=m_X. \tag{5.49}$$

Ошибка прогноза равна

$$e(\theta)=X(t_0+\theta)-m_X. \tag{5.50}$$

Дисперсия ошибки

$$\sigma_e^2=M\left\{\left[X(t_0+\theta)-m_X\right]^2\right\}=\sigma_X^2. \tag{5.51}$$

Статистический прогноз

В качестве прогнозного значения берется условное математическое ожидание процесса в сечении на момент времени $t_0 + \theta$.

Обозначим случайный процесс в сечении на момент времени t_0 через X, а в момент времени $t_0 + \theta$ через Y и рассмотрим их как систему двух случайных величин (X,Y). Таким образом,

$$\hat{X}(t_0+\theta)=m_{Y/X} \tag{5.52}$$

Ошибка прогноза равна

$$e(\theta)=X(t_0+\theta)-m_{Y/X}. \tag{5.53}$$

Дисперсия ошибки есть условная дисперсия случайной величины Y

$$\sigma_e^2=M\left\{\left[Y-m_{Y/X}\right]^2\right\}=\sigma_{Y/X}^2. \tag{5.54}$$

Условное математическое ожидание случайной величины Y равно

$$m_{Y/X}=m_Y+r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-m_X\right) \tag{5.55}$$

где $r_{X,Y}$ – коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y;

m_X и m_Y – безусловные математические ожидания случайных величин X и Y;

σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y.

Таким образом, с учетом $m_X = m_Y = m$ и $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ имеем прогнозное значение

$$\hat{X}(t_0+\theta) = m + r_X(\theta)\left[X(t_0) - m\right] \tag{5.56}$$

и дисперсию ошибки прогноза

$$\sigma_e^2 = \sigma^2\left[1 - r_X^2(\theta)\right], \tag{5.57}$$

где $\sigma = \sigma_X$ – среднеквадратическое отклонение процесса.

Сопоставление методов прогноза

Сравнивая методы прогноза можно сделать следующие заключения:

Прогнозное значение не зависит от времени упреждения для первого и второго методов.

Ошибка прогноза в методе по последнему значению в сильной мере зависит от времени упреждения. При малом θ дисперсия ошибки невелика (рис. 5.16, кривая *1*), но с ростом θ стремится к удвоенному значению дисперсии процесса и при отрицательной корреляции между сечениями процесс может превышать удвоенное значение дисперсии процесса. Поэтому первый метод хорошо использовать для прогнозирования на малые периоды времени.

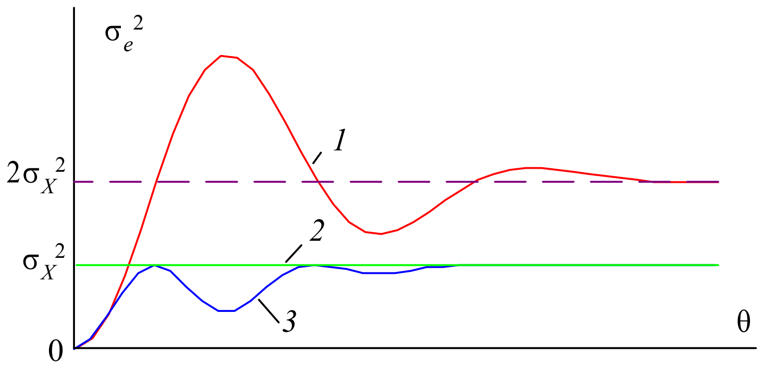


Рис. 5.16. Погрешности трех методов прогноза

Третий, статистический, метод при малом времени упреждения приближается к методу по последнему значению (рис. 5.16, кривая *3*), а с ростом θ имеет наименьшую погрешность из всех рассмотренных методов. С ослаблением статистической связи между сечениями процесса ошибка статистического прогноза приближается к ошибке метода по математическому ожиданию (рис. 5.16, кривая *2*). Поэтому для краткосрочного и долгосрочного прогноза случайная составляющая процесса не оказывает никакого влияния на прогноз.

Пример 2. Вычислить значение стационарного случайного процесса через 3 с после регистрации последнего значения, если известно значение процесса на момент регистрации (текущее значение) и его характеристики: математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция, заданная аналитическим выражением $R_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$. Для прогноза использовать все три метода: по последнему значению, по математическому ожиданию и статистический метод.

Расчеты выполним в системе Mathcad.

Исходные данные

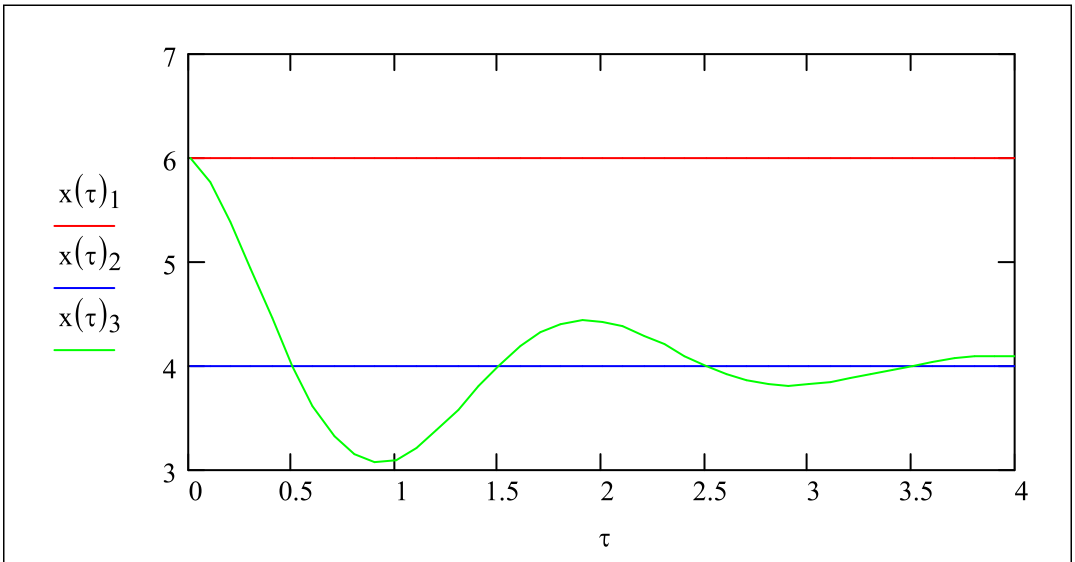
$$\tau := 0, 0.1 .. 4 \qquad \alpha := \frac{\pi}{4} \qquad \beta := \pi$$

$$x_{t0} := 6 \qquad m_x := 4 \qquad D_x := 3$$

Определение функций прогноза и прогнозные значения по всем трем методам

$$x(\tau) := \begin{bmatrix} x_{t0} \\ m_x \\ m_x + \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau) \cdot (x_{t0} - m_x) \end{bmatrix} \qquad x(5) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3.961 \end{pmatrix}$$

Графики функций прогноза:



Функции дисперсий ошибок прогноза по трем методам и значения дисперсий ошибок со временем упреждения 3 с.

$$D(\tau) := \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(D_x - D_x \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau)\right) \\ D_x \\ D_x \cdot \left[1 - (\exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau))^2\right] \end{bmatrix} \qquad D(3) = \begin{pmatrix} 6.569 \\ 3 \\ 2.973 \end{pmatrix}$$

5.6. Прогнозирование суточных графиков нагрузки

Оперативный прогноз суточных графиков нагрузки энергосистемы выполняется на следующие сутки и на несколько суток вперед. На режим потребления электрической энергии огромное влияние оказывают состав потребителей ЭЭС, продолжительность рабочей недели (количество смен в сутки), степень загрузки смен промышленных предприятий, метеорологические факторы, а также некоторые другие.

Существенное значение в составе нагрузки имеет соотношение между промышленными потребителями и коммунально-бытовым сектором (рис. 5.17).

Если система имеет значительную бытовую нагрузку, то вечерний максимум значительно больше утреннего (рис. 5.17,*а*). Эта разница особенно заметна в летнее время. Летом максимум наступает значительно позже, чем зимний. Летом максимум пикообразный, а зимой пологий. Минимальная нагрузка составляет 50…60 % от максимальной нагрузки.

В энергосистемах с преобладанием промышленной нагрузки имеется два явно выраженных максимума: утренний и вечерний (рис. 5.17,*б*). Суточный график таких систем более ровный, и минимальная нагрузка составляет 70…80 % от максимальной. В некоторых энергосистемах нагрузка утреннего максимума может быть больше, чем вечернего.

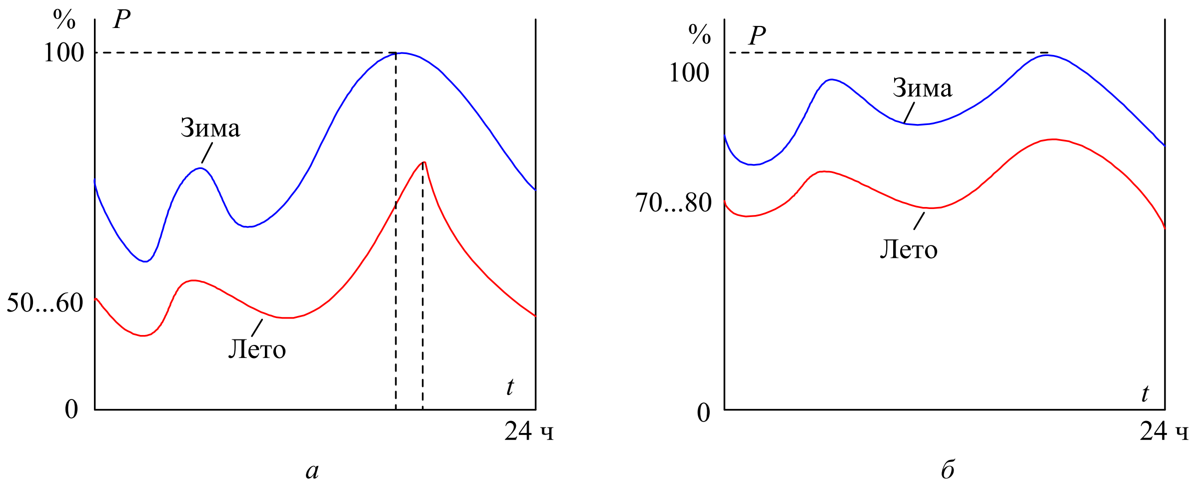


Рис. 5.17. Суточные графики нагрузки: *а* – со значительной составляющей бытовой нагрузки, *б* – с преобладанием промышленной нагрузки

Характер суточного графика нагрузки зависит от освещенности и температуры воздуха, (рис. 5.18). При малой освещенности в дневное время нагрузка возрастает и утренний пик становится более продолжительным (рис. 5.18,*а*). При низкой температуре воздуха нагрузка также возрастает, особенно днем (рис. 5.18,*б*).

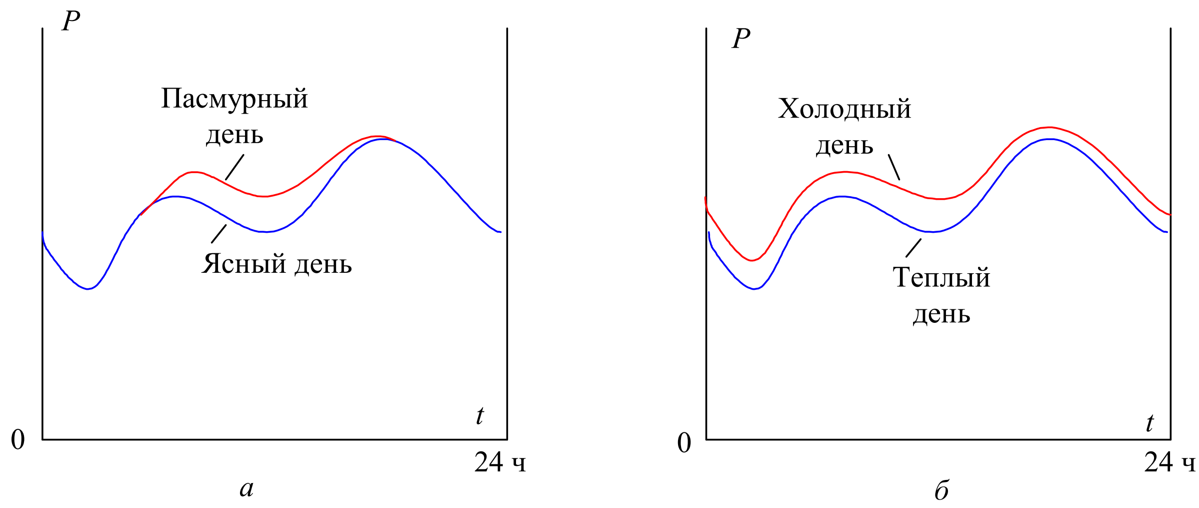


Рис. 5.18. Суточные графики нагрузки: *а* – при разной освещенности, *б* – при разной температуре

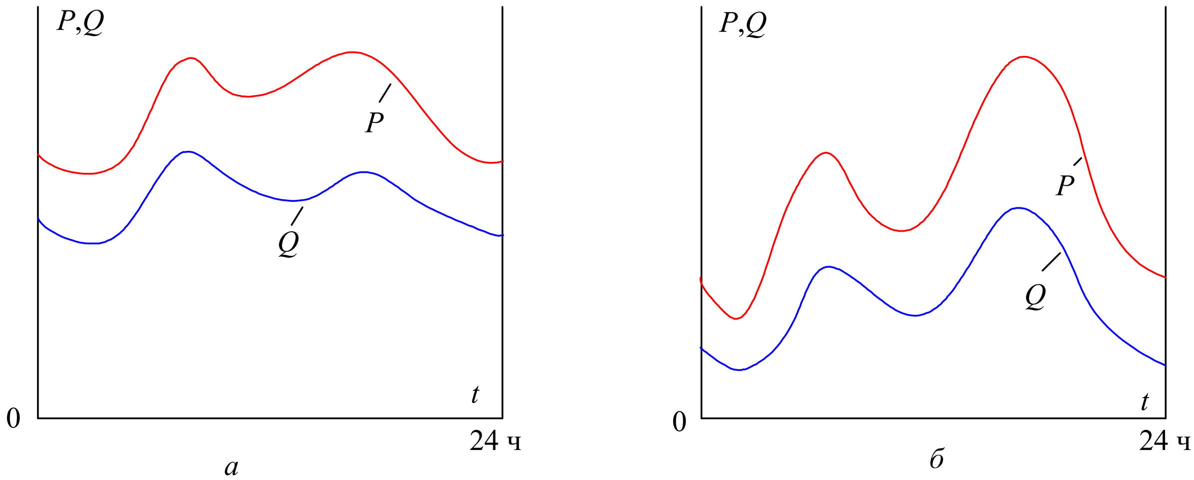
Наиболее важные графики нагрузки это в период зимнего максимума и летнего минимума, когда следует заботиться о достаточном резерве мощности и, соответственно, иметь маневренные станции с малым технологическим минимумом. В настоящее время соотношение нагрузок в ЭЭС составляет 0,5…0,8.

Суточные графики реактивной мощности ЭЭС в основном определяются потреблением реактивной мощности асинхронными двигателями (примерно 70 % все потребляемой реактивной мощности) и потерями в трансформаторах (около 20 %). На суммарные суточные графики реактивной нагрузки ЭЭС оказывают влияние режимы работы линий напряжением 220 кВ и выше, а также общий уровень компенсации реактивной мощности в системе.

На рис. 5.19 показаны суточные графики активной и реактивной нагрузки для двух энергосистем: с преобладанием промышленной нагрузки (рис. 5.19,*а*), и с преобладанием бытовой нагрузки (рис. 5.19,*б*).

Системы имеют примерно одинаковые активные нагрузки в утренний и вечерний максимум, но в первой системе утренний максимум реактивной мощности выше вечернего, что объясняется преобладанием в составе нагрузки асинхронных двигателей. Во втором случае вечерняя активная нагрузка выше утренней и вечерний максимум реактивной мощности больше утреннего.

Оперативное прогнозирование суточных графиков нагрузки рабочего дня ЭЭС производится на основании графика предыдущего дня, графика соответствующего дня предыдущей недели и прогноза погоды.



а *б*

Рис. 5.19. Суточные графики активной и реактивной мощности в ЭЭС: *а* – – с преобладанием промышленной нагрузки и *б* – с преобладанием бытовой нагрузки

Графики нагрузки выходных дней (суббота, воскресенье), а также послевыходного дня (понедельник) существенно отличаются от графиков обычных выходных дней, рис. 5.20. Они составляются на основании графиков предыдущих выходных и послевыходных дней, прогноза погоды и других влияющих факторов. Погрешность прогноза обычно составляет 2…3 %.

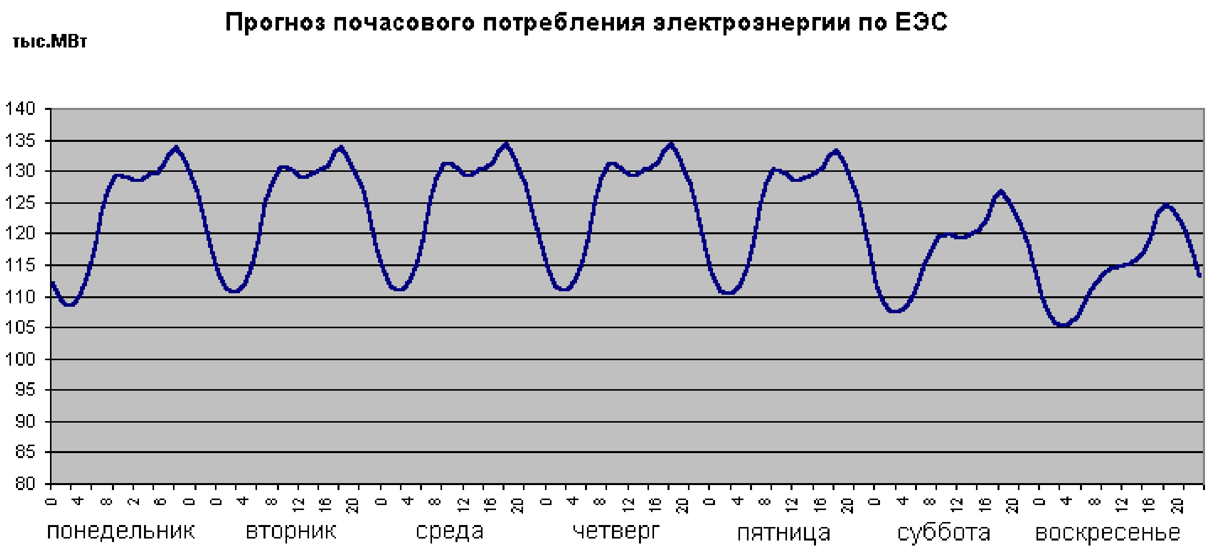


Рис. 5.20. Недельный график мощности нагрузки ЕЭС РФ

Для суточного графика нагрузки различают следующие показатели:

- максимум активной и реактивной нагрузок P_{max} и Q_{max};
- коэффициент мощности максимума нагрузки $\cos\varphi_{max}$;
- суточный расход активной и реактивной энергии $W_{а.сут}$ и $W_{р.сут}$;
- средневзвешенный за сутки коэффициент реактивной мощности:

$$\mathrm{tg}\varphi_{сут} = \frac{W_{р.сут}}{W_{а.сут}};$$

- коэффициенты заполнения суточного графика активной и реактивной энергии:

$$\beta_{а} = \frac{W_{а.сут}}{24P_{max}},\ \beta_{р} = \frac{W_{р.сут}}{24Q_{max}}.$$

Эти показатели полезно иметь как при эксплуатации (оперативный и краткосрочный прогноз), так и при проектировании (долгосрочный прогноз) ЭЭС.

При проектировании ЭЭС суточные графики нагрузок позволяют правильно выбрать суммарную установленную мощность новых электрических станций и их состав.

При прогнозировании суточных графиков нагрузки в проектной постановке используются в основном два подхода: *статистический* и *синтетический*.

Статистический подход основан на экстраполяции графиков нагрузки прошлых лет.

Для сопоставимости суточных графиков за разные годы часовые нагрузки представляются в относительных единицах.

Для каждого характерного дня недели каждого месяца строится столько графиков, сколько лет рассматривается.

В начале, прогнозируется форма графика – график в относительных единицах. Затем отдельно рост средней суточной мощности. После этого получается график нагрузки в именованных единицах.

При синтетическом подходе анализируется структура электропотребления каждой группы потребителей и путем суммирования нагрузок по отдельным группам получается суммарный график ЭЭС.

5.7. Анализ временных рядов

Графики нагрузки в ЭЭС являются последовательностями наблюдений или расчетных значений, показывающих изменения мощности в течение определенного периода времени. В суточных, недельных и годовых графиках отображается периодичность процесса изменения мощности нагрузки, связанная с режимом работы людей, сменой дня и ночи, недельными циклами и сезонными изменениями в течение года.

Суточные графики дней недели, в общем, повторяются изо дня в день с небольшими случайными различиями и режимами выходных и праздничных дней. Средний рост или снижение нагрузки в течение недели или нескольких недель связан с сезонными изменениями в особенности в осенний и весенний периоды. Такие изменения, происходящие в среднем, относят к трендовым (непериодическим) составляющим графика нагрузки. Эти изменения для годовых графиков обусловлены естественным ростом нагрузки потребителей.

Суточные, недельные и годовые графики нагрузки часто прогнозируют путем разделения их на трендовую, периодическую и случайную составляющие:

$$X(t) = Q(t) + S(t) + U(t), \tag{5.58}$$

где $Q(t)$ – тренд – устойчивые систематические изменения;

$S(t)$ – периодическая составляющая – колебания относительно тренда;

$U(t)$ – нерегулярная составляющая – случайный шум.

Подобный подход справедлив, если принять гипотезу о том, что резких изменений во временном ряду не произойдет.

Пусть имеется временной ряд значений месячных максимумов мощности нагрузки за несколько лет, рис. 5.21.

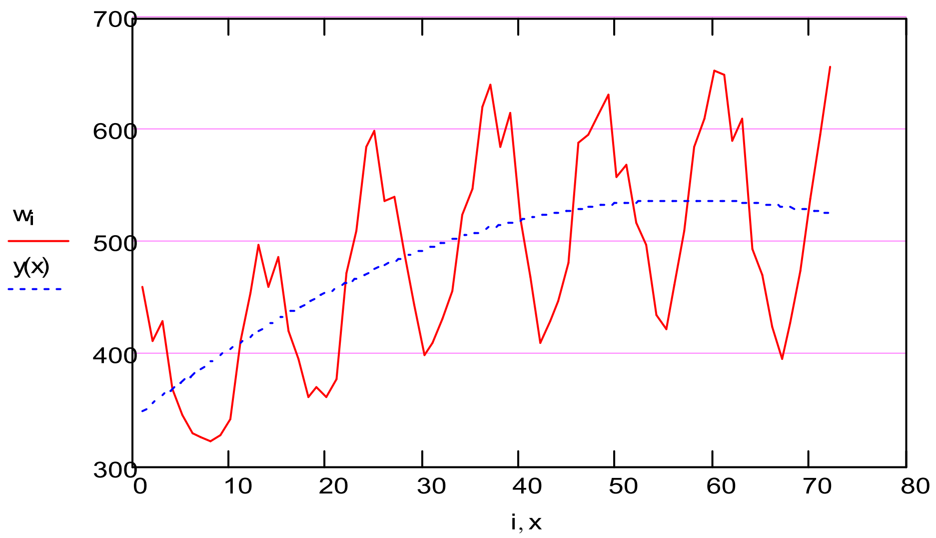


Рис. 5.21. Ретроспектива временного ряда

Для выделения трендовой составляющей часто используют полиномиальную модель до третьего порядка включительно:

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= a_0, \\ Q_1(t) &= a_0 + a_1 t, \\ Q_2(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \\ Q_3(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Иногда при выделении тренда предварительно применяют процедуру сглаживания, которая устраняет периодическую и случайную составляющие.

После вычитания из $X(t)$ трендовой составляющей получается временной ряд, имеющий периодическую составляющую, которая вызвана суточными, недельными и сезонными периодами.

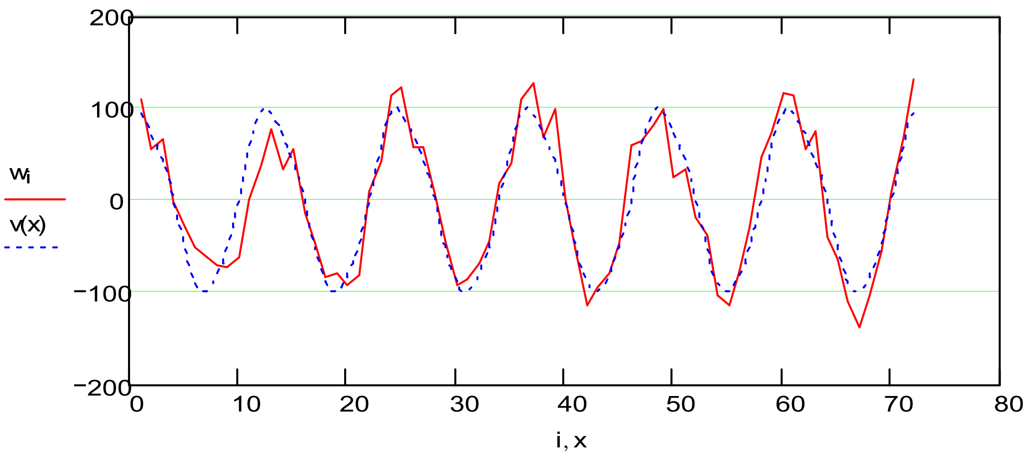


Рис. 12.2. Временной ряд без трендовой составляющей

Если имеется N результатов наблюдений за период T ($N = 12$ в годовом цикле, $N = 7$ – в недельном и $N = 24$ – в суточном), то периодическая модель процесса может быть представлена рядом Фурье:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos 2\pi f_1 kt + b_k \sin 2\pi f_1 kt \right), \tag{5.60}$$

где n – количество частот, включенных в модель.

В общем случае наивысшая частота гармонического разложения дискретного ряда, называемая частотой Найквиста, определяется половиной интервала между наблюдениями, например при $N = 12$, $n = 24$.

$f_1 = \dfrac{1}{N}$ – основная частота гармонического ряда.

Дисперсия, учитываемая i-ой гармоникой:

$$D_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2}. \tag{5.61}$$

Суммарная дисперсия $D_\Sigma = \sum\limits_i D_i$. Как правило, первые три гармоники описывают до 90 % всей дисперсии.

Случайная составляющая

$$U(t) = X(t) - S(t) - S(t). \tag{5.62}$$

Для $U(t)$ определяются статистические характеристики. Прогноз случайной составляющей ведется по одной из моделей прогноза случайного процесса. Сразу следует оценить интервал корреляции и если прогноз ведется на время упреждения больше, чем интервал корреляции, то фактически по случайной составляющей оценивается лишь ошибка прогноза, так как после вычитания регулярных составляющих математическое ожидание процесса равно нулю.

Оценка коэффициентов моделей регулярных составляющих

Тренд

Оценка коэффициентов полиномиальной модели тренда может быть сделана разными способами:

1) с помощью функций Mathcad **c** := regress(**k**,**P**,m) и $Q_m(t)$:= interp(**c**,**k**,**P**,t). Здесь **c** – вектор коэффициентов, используемый функцией interp; **k** – вектор дискретных моментов времени, для которых заданы значения ретроспективы; **P** – вектор значений ретроспективы; m – порядок полинома (как 0, 1, 2 или 3); t – аргумент функции тренда. Можно также записать $Q_m(t)$ = interp(regress(**k**,**P**,m), **k**,**P**,t).

2) как решение системы линейных уравнений по методу наименьших квадратов $\mathbf{A} = (\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$. Функция тренда: $Q_m(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i t^i$. Здесь **V** – матрица, первый столбец которой состоит из единиц, второй – вектор **k**, третий вектор из элементов **k** в квадрате и т.д. $V_{i,j} = k_{ij\text{-}1}$ ($i = 1\ldots n$, j = 1… m+1), где n – количество данных ретроспективы.

Экспоненциальная модель тренда может быть получена с помощью функции expfit(**k**,**P**,**vg**), которая возвращает вектор коэффициентов модели $Q(t) = ae^{bt} + c$. Здесь вектор **vg** – начальные приближения для искомых коэффициентов модели.

Периодическая составляющая

Коэффициенты полигармонической составляющей процесса являются коэффициентами гармонического полинома вида (5.60). Вектор коэффициентов модели получается как решение системы линейных уравнений $\mathbf{B} = (\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}$. Здесь **V** – матрица из n строк и $2m$ столбцов: n – количество данных ретроспективы и m – количество частот, включенных в модель. Каждая последовательная пара столбцов матрицы **V** соответствует одной частоте и состоит из коэффициентов, вычисляемых как функции косинуса и синуса из выражения (5.60):

$$V_{i,2j-1} = \cos\left(2\pi i \frac{j}{N}\right); \quad V_{i,2j} = \sin\left(2\pi i \frac{j}{N}\right) \quad i = 1 \ldots n; \quad j = 1 \ldots m \qquad (5.63)$$

W – вектор, полученный из **P** вычитанием трендовой составляющей.

Возможно моделирование периодической составляющей с помощью другого представления ряда Фурье:

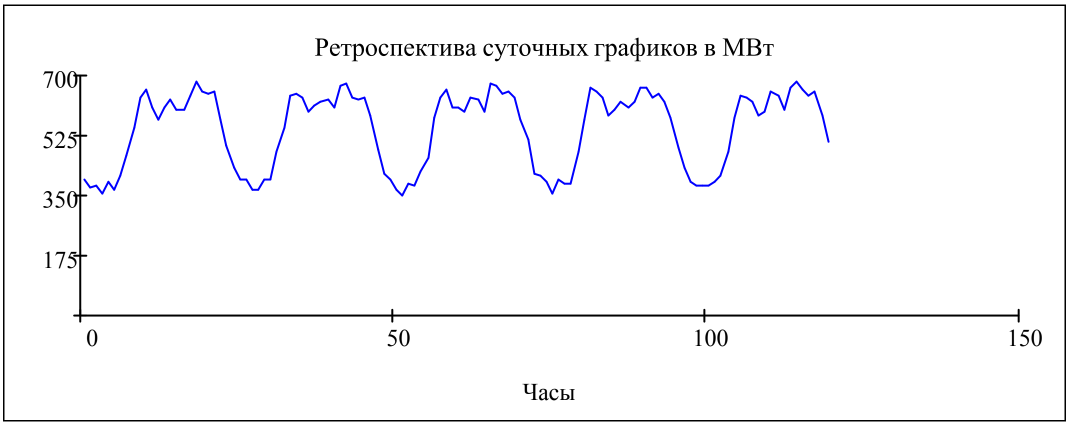
$$S(t) = \sum_{i=1}^{m} X_i \cos\left(2\pi i f_1 t - \theta_i\right), \qquad (5.64)$$

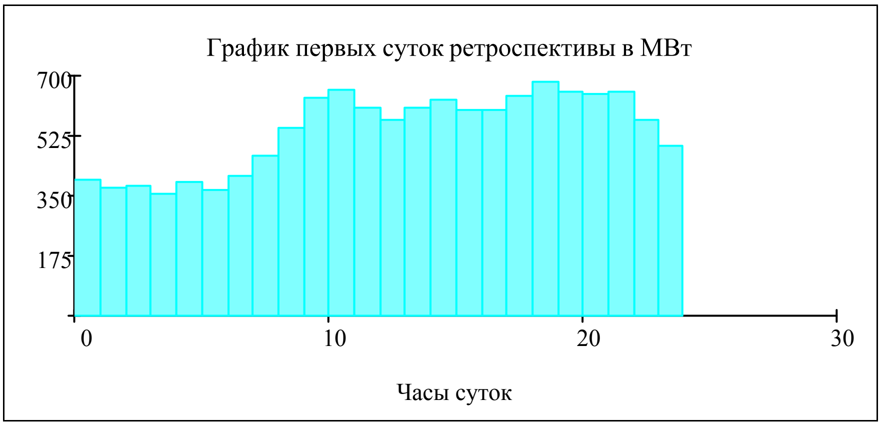
где искомыми параметрами являются $X_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, $\theta_i = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{b_i}{a_i}\right)$.

Пример

Чтение данных из файла Retro.prn

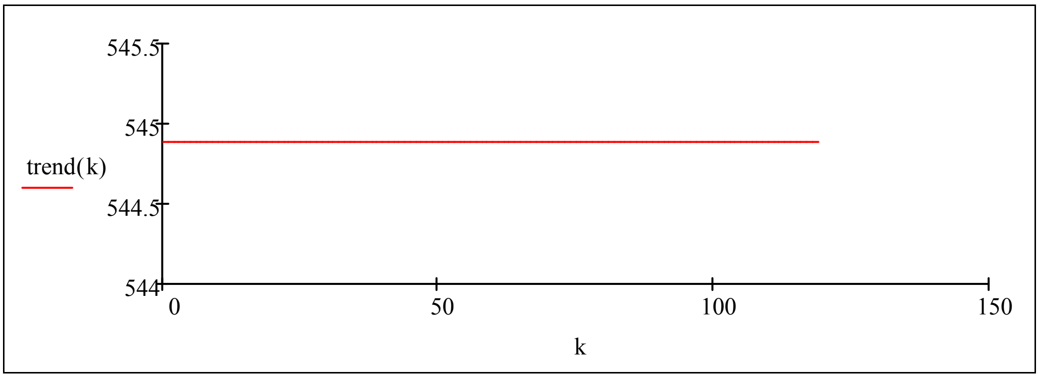
```
P := READPRN("Retro.prn" )

k := 0.. 119                    i := 0.. 23
```





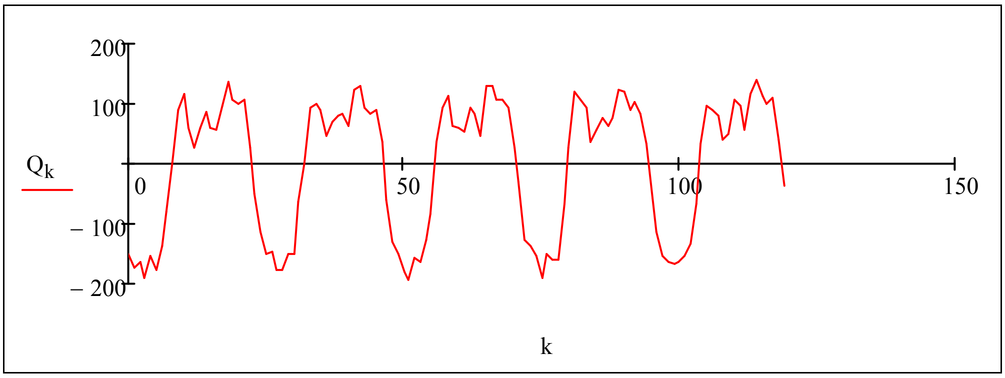
Представим тренд постоянной функцией, равной среднему значению за 5 суток

```
trend(x) := mean(P)
```



Остаточный временной ряд без тренда

$$Q_k := P_k - \mathrm{trend}(k)$$



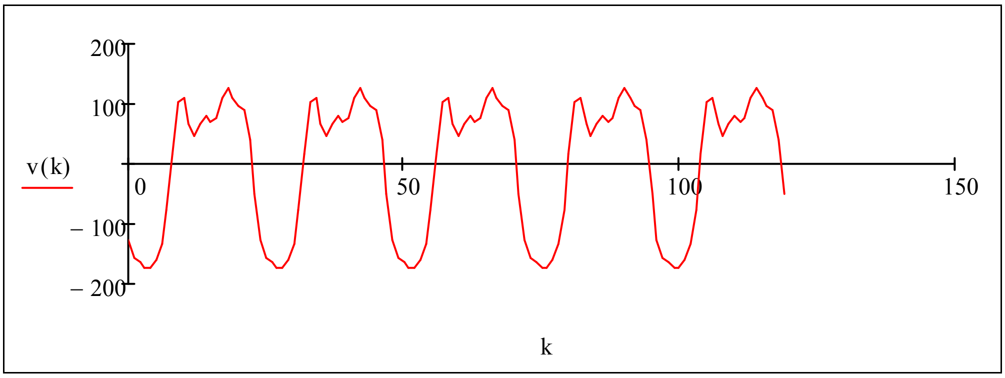
Моделирование периодической составляющей – 6 гармоник

$$l := 0..5 \qquad V_{k,2\cdot l} := \cos\left[2\cdot\pi\cdot\frac{k\cdot(l+1)}{24}\right] \qquad V_{k,2\cdot l+1} := \sin\left[2\cdot\pi\cdot\frac{k\cdot(l+1)}{24}\right]$$

$$B := \left(V^T\cdot V\right)^{-1}\cdot V^T\cdot Q$$

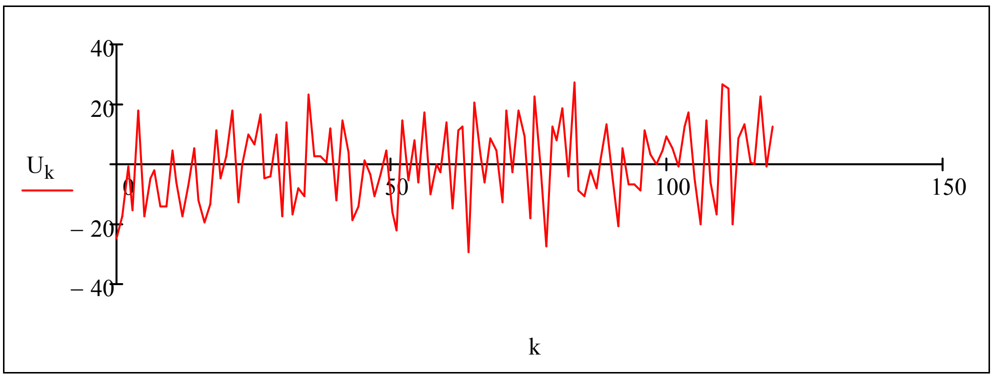
$$v(x) := \sum_{j=0}^{5}\left[\left[B_{2\cdot j}\cdot\cos\left[2\cdot\pi\cdot\frac{x\cdot(j+1)}{24}\right] + B_{2\cdot j+1}\cdot\sin\left[2\cdot\pi\cdot\frac{x\cdot(j+1)}{24}\right]\right]\right]$$

Графическое изображение переиодической составляющей



Остаточный временной ряд без тренда и периодической составляющей – случайная составляющая

$$U_k := Q_k - v(k)$$



Определение статистических характеристик случайной составляющей временного ряда: среднее значение, медиана, среднеквадратическое отклонение.

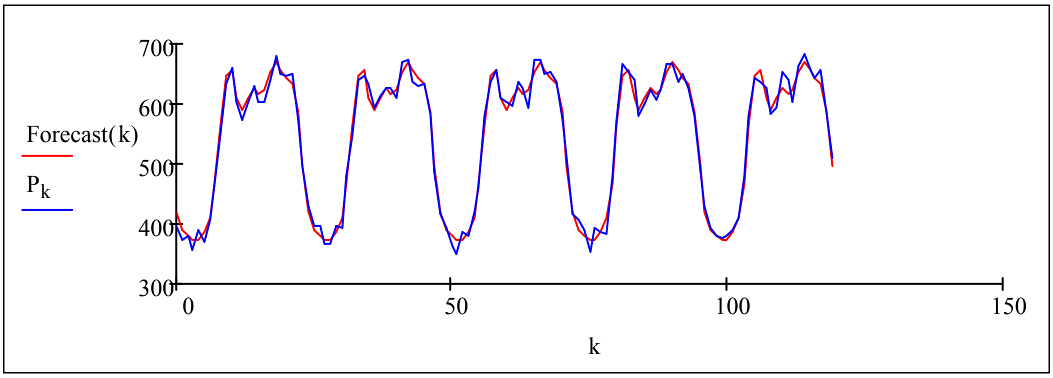
$\mathrm{mean}(U) = -3.57 \times 10^{-14}$

$\mathrm{median}(U) = -0.296$

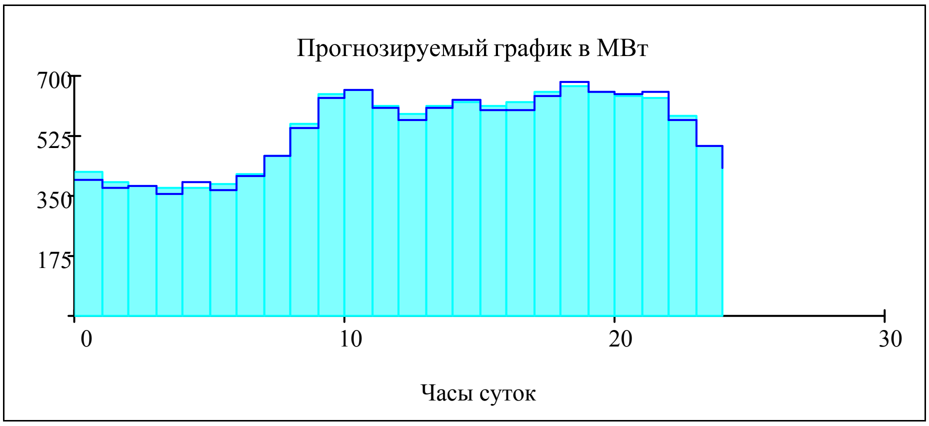
$\mathrm{stdev}(U) = 12.962$

Прогнозируемый график есть сумма тренда и случайной составляющей:

$\mathrm{Forecast}(x) := \mathrm{trend}(x) + v(x)$



$j := 0..24$



За ошибку прогноза принимаем среднекувадратическое отклонение случайной составляющей временного ряда:

$\mathrm{stdev}(U) = 12.962$

Вопросы для самопроверки

1. Как подразделяются детерминированные физические процессы?
2. Как подразделяются случайные физические процессы?
3. Что такое прогноз?
4. Какие два вида переменных, зависящих от времени, выделяют при прогнозировании?
5. Как подразделяют прогноз по времени упреждения?
6. Дайте определение экспоненциальной модели прогнозирования.
7. В чем принципиальное различие логистической и экспоненциальной моделей прогнозирования?

8. Какие основные методы используют для прогнозирования случайных процессов?
9. Какие факторы влияют на прогноз суточных графиков нагрузки электроэнергетической системы?
10. В чем заключается прогноз графиков нагрузке методом анализа временных рядов?

Использованная литература

1. Лыкин А. В. Математическое моделирование электрических систем и их элементов: Учеб. Пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 134 с.
2. Неуймин Я. Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика. – Л.: Наука, 1984. – 190 с.
3. Лыкин А. В. Mathcad в задачах электроэнергетики: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 86 с.
4. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики. – М.: Высшая школа, 1981. – 288 с.
5. Лыкин А.В. Электрические системы и сети: Учебное пособие. – М.: Университетская книга; Логос, 2006. – 254 с.
6. Общая электротехника: уч. пособие / Под ред. А.Т. Блажкина. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 592 с.
7. Касаткин А. С., Немцов М. В. Электротехника: Уч. пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 440 с.
8. Электротехника: Учебник для вузов / Зайдель Х. Э., Коген-Далин В. В., Крымов В. В. идр. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
9. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. Учебн. пособие. – М.: Высшая школа, 1972. – 336 с.
10. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Линейные электрические цепи. Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1978. – 592 с.
11. Совалов С. А. Режимы единой энергосистемы. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 384 с.
12. Жуков Л. А., Стратан И. П. Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем: Методы расчетов. – М.: Энергия, 1979. – 416 с.
13. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
14. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов: – Пер. с англ. М.: Мир, 1971. – 408 с.
15. Кадомская К. П. Основы теории случайных процессов: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999.- 68 с.

16. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с.
17. Исследование операций: В 2-х томах. Т. 2. Модели и приложения. Пер с англ. – М.: Мир, 1981. – 677 с.
18. Гужов Н. П. Статистическое прогнозирование режимов электропотребления предприятиями. Уч. пособие / Новосиб. электротехн. ин-т. - Новосибирск, 1992. – 106 с.
19. Использование методов теории подобия в прогнозировании выработки электроэнергии / Ю. Н. Астахов, К. К. Зубанов, В. В. Кавченков, Пашенкова Т. Е. // Электричество, 1973, № 3. – С. 13 – 21.
20. Ефимов А. Н. Предсказание случайных процессов. – М.: 1976.
21. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974.
22. Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей. Под ред. В. А. Веникова. – М.: Высшая школа, 1975. – 344 с.

Приложение 1. Глоссарий*

Автоматическое регулирование напряжения и реактивной мощности – Автоматическое поддержание требуемых значений напряжения и реактивной мощности путем воздействия на возбуждение синхронных электрических машин (синхронные и асинхронизированные генераторы, синхронные компенсаторы, синхронные двигатели) и других источников реактивной мощности (статические тиристорные компенсаторы, конденсаторные батареи), а также путем автоматического изменения коэффициентов трансформации трансформаторов и автотрансформаторов.

Ветвь электрической цепи – Участок электрической цепи, по которому протекает один и тот же электрический ток.

Волна бегущая электромагнитная – Электромагнитная волна, распространяющаяся в однородной среде (или в линии передачи) со скоростью, равной фазовой скорости в этой среде (или в линии).

Волна прямая (падающая) электромагнитная – Электромагнитная волна, распространяющаяся в пространстве, в линии или в волноводе в направлении, принятом в системе отсчета за положительное направление.

Волновое сопротивление среды – Отношение комплексной амплитуды напряженности электрического поля к комплексной амплитуде напряженности магнитного поля плоской бегущей синусоидальной электромагнитной волны, распространяющейся в данной среде.

Вращающееся магнитное поле – Результирующее поле, создаваемое многофазной обмоткой электрической машины при протекании по ней многофазного переменного тока.

Главное сечение электрической цепи (графа электрической цепи) – Сечение электрической цепи (графа электрической цепи), состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева графа электрической цепи.

Граф (электрической цепи) направленный – Граф электрической цепи с указанием условно-положительных направлений электрических токов или напряжений в виде отрезков со стрелками.

Граф электрической цепи – Графическое изображение электрической цепи, в котором ветви электрической цепи представлены отрезками, назы-

---

* Приведены термины и определения из стандарта организации ОАО РАО «ЕЭС России» ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКА. ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Терминологический справочник по электроэнергетике. – М.: Типография «КЕМ», 2008. – 912 с.

ваемыми ветвями графа, а узлы электрической цепи - точками, называемыми узлами графа.

График электронагрузки (график нагрузки) – Графическое (табличное) представление режимов потребления электроэнергии отдельными потребителями или энергосистемой в целом, отражающее изменение потребляемой мощности в течение суток, месяца или года.

Двигатель асинхронный – Асинхронная машина, работающая в режиме двигателя.

Единая энергосистема – Совокупность объединенных энергосистем, соединенных межсистемными связями, охватывающая значительную часть страны.

Контур графа электрической цепи – Замкнутый путь, образованный узлами и ветвями графа электрической цепи, в котором один из узлов является одновременно начальным и конечным узлом пути графа электрической цепи.

Линия электропередачи (ЛЭП) – Электроустановка, состоящая из проводов, кабелей, изолирующих элементов и несущих конструкций, предназначенная для передачи электрической энергии между двумя пунктами энергосистемы с возможным промежуточным отбором.

Линия электропередачи воздушная – Устройство для передачи электроэнергии по проводам, расположенным на открытом воздухе и прикреплённым с помощью изоляторов и арматуры к опорам или кронштейнам и стойкам на инженерных сооружениях (мостах, путепроводах и т.п.).

Магнитное поле трансформатора – Магнитное поле, созданное в трансформаторе совокупностью магнитодвижущих сил всех его обмоток и других частей, в которых протекает электрический ток.

Примечание. Для расчетов, определения параметров и проведения исследованний магнитное поле трансформатора может быть условно разделено на взаимосвязанные части: основное поле, поле рассеяния обмоток, поле токов нулевой последовательности и т. д.

Магнитный поток – Скалярная величина, равная потоку магнитной индукции.

Максимум нагрузки энергосистемы – Наибольшее значение активной нагрузки энергосистемы за определенный период времени.

Матрица инциденций – Матрица, отражающая топологию электрической сети, например, матрица инциденций узловых ветвей, матрица инциденций контурных ветвей.

Матрица узловых проводимостей – Матрица, описывающая зависимость между входными токами узлов и узловыми потенциалами.

Машина асинхронная – Электромеханический преобразователь энергии, у которого частота вращения ротора не равна частоте вращения магнитного поля статора.

Машина синхронная – Бесколлекторная машина переменного тока, у которой в установившемся режиме отношение частоты вращения ротора к частоте тока в цепи, подключенной к обмотке якоря, не зависит от нагрузки в области допустимых нагрузок.

Многополюсник – Часть электрической цепи, имеющая более двух выделенных выводов.

Мощность комплексная (двухполюсника) – Комплексная величина, равная произведению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения и сопряженного комплексного действующего значения синусоидального электрического тока двухполюсника.

Мощность потребляемая – Общая мощность, получаемая устройством или совокупностью устройств.

Нагрузка потребителей – Суммарная электрическая мощность потребителей системы (района, узла и т.д.).

Нагрузка электрическая расчетная – Значение мощности (тока), по которой производится выбор параметров электрооборудования, выполняются расчеты режимов распределения мощности и напряжении в электрической сети.

Напряжение линейное – Напряжение между фазными проводами электрической сети.

Напряжение номинальное – Напряжение, на которое спроектирована сеть или оборудование и к которому относят их рабочие характеристики.

Напряжение фазное – Напряжение между фазным проводом и нейтралью.

Нейтраль (нейтральная точка) – Общая точка соединённых в звезду обмоток (элементов) электрооборудования.

Обмотка трансформатора – Совокупность витков, образующих электрическую цепь, в которой суммируются электродвижущие силы, наведенные в витках, с целью получения высшего, среднего или низшего напряжения трансформатора или с другой целью.

Примечания: 1. В трехфазном и многофазном трансформаторе (трансформаторной группе) под «обмоткой» подразумевается совокупность соединяемых между собой обмоток одного напряжения всех фаз.

2. В однофазном трансформаторе под «обмоткой» подразумевается совокупность соединяемых между собой обмоток одного напряжения, расположенных на всех его стержнях.

Обмотка трансформатора вторичная – Обмотка трансформатора, от которой отводится энергия преобразованного переменного тока.

Обмотка трансформатора первичная – Обмотка трансформатора, к которой подводится энергия преобразуемого переменного тока.

Примечание. Термин применим к любому числу обмоток трансформатора, если направление передачи энергии от них к другим обмоткам трансформатора является определенным.

Объединенная энергосистема – Совокупность нескольких энергетических систем, объединенных общим режимом работы.

Параметр электрической цепи (элемента электрической цепи) – Величина, характеризующая какое-либо свойство электрической цепи (элемента электрической цепи) в качественном и количественном отношениях.

Проводимость (электрическая) комплексная – Комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического тока в пассивной электрической цепи или в ее элементе к комплексному действующему значению синусоидального электрического напряжения на выводах этой цепи или на этом элементе.

Прогноз нагрузки – Оценка ожидаемой нагрузки на определенный момент времени.

Расчет потокораспределения – Расчет параметров электрической сети при установившемся режиме при заданных мощностях в узлах и напряжениях в некоторых из них.

Расчет электрической сети – Определение параметров режима электрической сети по заданным ее характеристикам и условиям работы.

Реактор шунтирующий – Реактор параллельного включения, предназначенный для компенсации емкостного тока.

Регулирующий эффект нагрузки электроэнергетической системы по напряжению (регулирующий эффект нагрузки по напряжению) – Степень изменения нагрузки электроэнергетической системы при изменении напряжения.

Регулирующий эффект нагрузки электроэнергетической системы по частоте (Регулирующий эффект нагрузки по частоте) – Степень изменения нагрузки электроэнергетической системы при изменении частоты.

Режим установившийся (в электрической цепи) – Режим электрической цепи, при котором электродвижущие силы, электрические напряжения и электрические токи в электрической цепи являются постоянными или периодическими..

Связь (в электрической сети) – Электрическое соединение двух и более узлов электрической сети.

Связь емкостная – Связь электрических цепей посредством электрического поля в диэлектрике.

Связь индуктивная – Связь электрических цепей посредством магнитного поля.

Сопротивление (электрическое) комплексное – Комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения на выводах пассивной электрической цепи или ее элемента к комплексному действующему значению синусоидального электрического тока в этой цепи или в этом элементе.

Сопротивление линии электропередачи волновое – Отношение мгновенного значения напряжения к мгновенному значению тока в любой точке линии электропередачи, численно равное квадратному корню из отношения удельного комплексного продольного сопротивления проводов к удельной комплексной поперечной проводимости.

Схема электрической сети – Топологическое изображение электрической сети, содержащее необходимую информацию в соответствии с конкретными требованиями.

Узел базисный – Узел электрической сети, вектор напряжения которого, принимается за ось отсчета векторных величин параметров режима.

Узел балансирующий – Узел электрической сети, в котором входная мощность изменяется таким образом, чтобы уравновесить сумму мощностей всех остальных узлов и потерь в сети.

Четырехполюсник – Часть электрической цепи, имеющая две пары выводов, которые могут быть входными или выходными.

Электропередача – Совокупность линий электропередачи и подстанций, предназначенная для передачи электрической энергии из одного района энергосистемы в другой.

Электроэнергетическая система – Электрическая часть энергосистемы и питающиеся от нее приемники электроэнергии, объединенные общностью процесса производства, передачи, распределения и потребления электроэнергии.

Приложение 2. Таблицы соотношений коэффициентов четырехполюсников, параметров элементов ЭЭС и параметров П-образной схемы замещения

Таблица П.1

Соотношения коэффициентов четырехполюсников с параметрами ЛЭП, трансформаторов и нагрузки

Коэффициенты четырехпо-люсника	Модель ЛЭП с распределенными параметрами	Модель идеальной ЛЭП с распределенными параметрами	Модель ЛЭП без учета распределенности параметров	Трансформатор (понижающий) $n > 1$	Трансформатор (повышающий) $n > 1$	Нагрузка
$\underline{A}$	$\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 l$	$\cos\beta_0 l$	$1+\dfrac{\underline{Z}_{\text{Л}}\underline{Y}_{\text{Л}}}{2}$	n	$\dfrac{1}{n}$	1
$\underline{B}$	$\underline{Z}_C\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 l$	$j\underline{Z}_C\sin\beta_0 l$	$\underline{Z}_{\text{Л}}$	$\dfrac{\underline{Z}_{\text{Т}}}{n}$	$\dfrac{\underline{Z}_{\text{Т}}}{n}$	0
$\underline{C}$	$\dfrac{1}{\underline{Z}_C}\mathrm{sh}\underline{\gamma}_0 l$	$j\dfrac{1}{\underline{Z}_C}\sin\beta_0 l$	$\underline{Y}_{\text{Л}}+\dfrac{\underline{Z}_{\text{Л}}\underline{Y}_{\text{Л}}^2}{4}$	$n\underline{Y}_{\mu}$	$n\underline{Y}_{\mu}$	$\underline{Y}_{\text{н}}$
$\underline{D}$	$\mathrm{ch}\underline{\gamma}_0 l$	$\cos\beta_0 l$	$1+\dfrac{\underline{Z}_{\text{Л}}\underline{Y}_{\text{Л}}}{2}$	$\dfrac{1}{n}\left(1+\underline{Z}_{\text{Т}}\underline{Y}_{\text{м}}\right)$	$n\left(1+\underline{Z}_{\text{Т}}\underline{Y}_{\text{м}}\right)$	1

Таблица П.2

Соотношения между параметрами П-образных схем замещения и параметрами ЛЭП, трансформаторов и нагрузки

Параметры П-образной схемы замещения	Модель ЛЭП с распределенными параметрами	Модель идеальной ЛЭП с распределенными параметрами	Модель ЛЭП без учета распределенности параметров	Трансформатор (понижающий) $n > 1$	Трансформатор (повышающий) $n > 1$	Нагрузка
$\underline{Z}$	$\underline{Z}_C \mathrm{sh} \underline{\gamma}_0 l$	$j\underline{Z}_C \sin\beta_0 l$	$(r_0 + jx_0)l$	$\dfrac{\underline{Z}_{\text{т}}}{n}$	$\dfrac{\underline{Z}_{\text{т}}}{n}$	0
$\underline{\boldsymbol{Y}}_1$	$\dfrac{1}{\underline{Z}_C} \mathrm{th} \dfrac{\underline{\gamma}_0 l}{2}$	$j\dfrac{1}{Z_C} \mathrm{tg} \dfrac{\beta_0 l}{2}$	$\dfrac{(g_0 + jb_0)l}{2}$	$\dfrac{(1-n)}{\underline{Z}_{\text{т}}} + \underline{Y}_{\mu}$	$\dfrac{n(n-1)}{\underline{Z}_{\text{т}}} + n^2 \underline{Y}_{\mu}$	0
$\underline{\boldsymbol{Y}}_2$	$\dfrac{1}{\underline{Z}_C} \mathrm{th} \dfrac{\underline{\gamma}_0 l}{2}$	$j\dfrac{1}{Z_C} \mathrm{tg} \dfrac{\beta_0 l}{2}$	$\dfrac{(g_0 + jb_0)l}{2}$	$\dfrac{n(n-1)}{\underline{Z}_{\text{т}}}$	$\dfrac{(1-n)}{\underline{Z}_{\text{т}}}$	$\underline{Y}_{\text{н}}$

Оглавление